



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

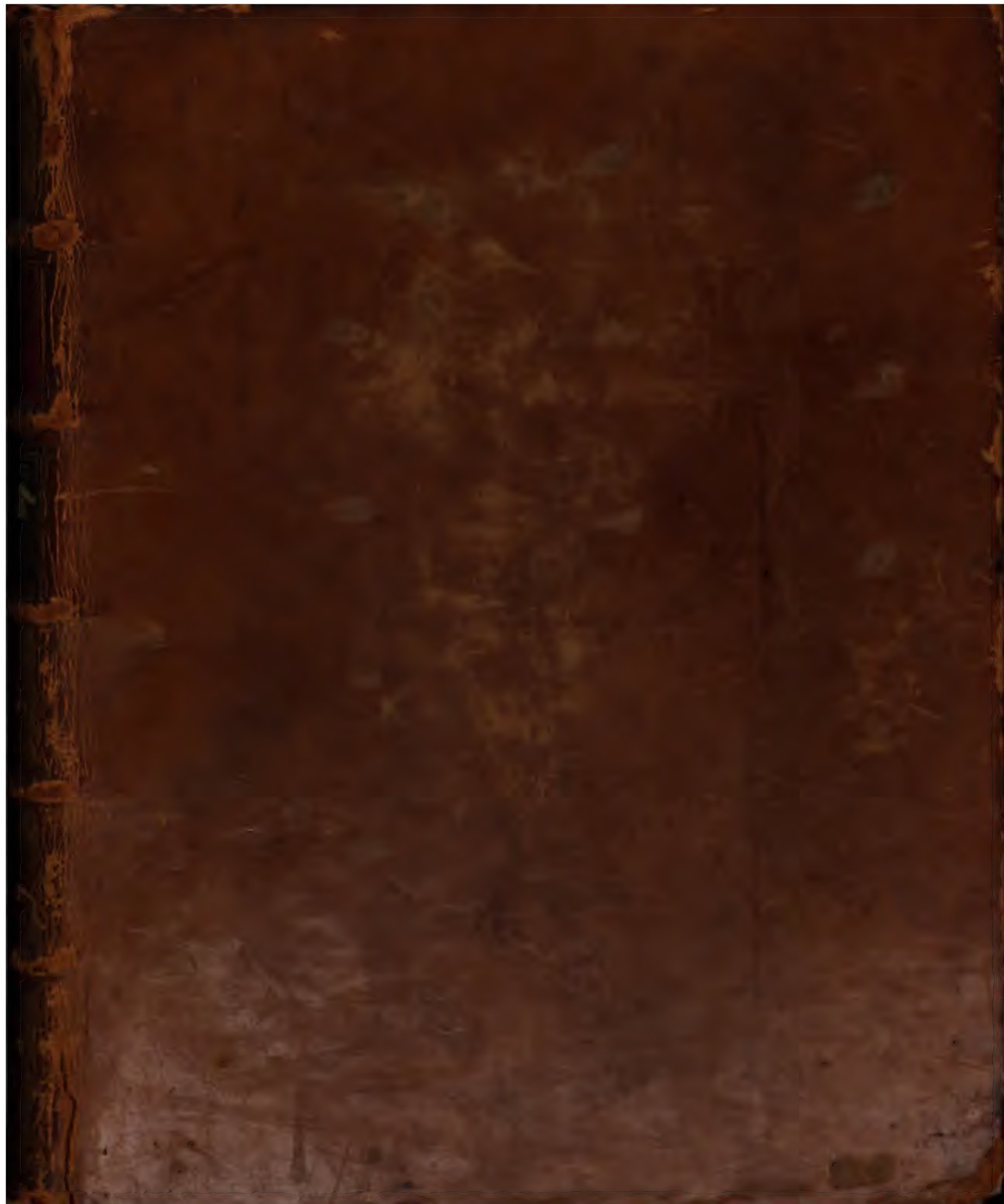
Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>





















56

Sac 1991 d. 59  
1769



1



HISTOIRE  
DE  
L'ACADÉMIE  
ROYALE  
DES SCIENCES.

---

ANNÉE M. DCCLXIX.

---

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,  
pour la même Année ;  
*Tirés des Registres de cette Académie.*



A PARIS,  
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

---

M. DCCLXXII.







# TABLE POUR L'HISTOIRE.

---

## PHYSIQUE GÉNÉRALE.

<i>SUR des Insectes sur lesquels on trouve des plantes.</i>	Page 11
<i>Sur la Pierre appelée Tripoli.</i>	51
<i>Sur le rapport des différentes densités de l'Esprit-de-vin, avec ses différens degrés de force.</i>	8
<i>Observations de Physique générale.</i>	15

---

## A N A T O M I E.

<i>Sur la structure &amp; sur les usages de l'Ouraque dans l'Homme.</i>	35
<i>Sur l'action du Poumon sur l'aorte pendant la respiration.</i>	38
<i>Observations Anatomiques.</i>	42

---

## C H I M I E.

<i>Sur la nature de la Bile.</i>	53
<i>Sur la nécessité de retirer des coupelles, la partie d'Argent fin qu'elles retiennent toujours.</i>	56
<i>Observation Chimique.</i>	66

---

## B O T A N I Q U E.

<i>Sur le changement des espèces dans les Plantes.</i>	71
<i>Observations Botaniques.</i>	77

## T A B L E.

---

### G É O M É T R I E.

<i>Sur la nature des Suites infinies.</i>	83
---	----

---

### A S T R O N O M I E.

<i>Sur la Comète de 1769.</i>	90
<i>Sur la Conjonction éclipique de Vénus &amp; du Soleil, du 3 Juin 1769.</i>	93

---

### H Y D R O G R A P H I E.

107

---

### M É C A N I Q U E.

<i>Sur une Machine propre à moirer les Étoffes de soie.</i>	109
<i>Sur l'éboulement des Montagnes, &amp; sur les moyens de le prévenir.</i>	112
<i>Sur la Courbe décrite par les Boulets &amp; les Bombes, eu égard à la résistance de l'air.</i>	116
<i>Sur l'effet des Roues mues par le choc de l'eau.</i>	121
<i>Machines ou Inventions approuvées par l'Académie en 1769.</i>	128
<i>Éloge de M. Trudaine.</i>	135
<i>Éloge de M. Ferrein.</i>	151
<i>Éloge de M. l'Abbé Chappe.</i>	163
<i>Éloge de M. Jars.</i>	173
<i>Éloge de M. le Duc de Chaulnes.</i>	180





# T A B L E

## POUR LES MÉMOIRES.

<i>M</i> ÉMOIRE sur le mouvement des Étoiles en longitude & en latitude. Par M. CASSINI DE THURY.	Page 1
Nouvelle construction d'une Machine propre à moirer les Étoffes de soie. Par M. DE VAUCANSON.	5
Mémoire sur le mouvement d'Arcturus en ascension droite apparente, & de la vraie Longitude du Soleil pendant une suite d'Observations faites avant & après le Solstice d'été, pour en déduire l'erreur des Tables au temps de l'apogée & au 3 Juin 1769. Par M. LE MONNIER.	14
Remarques sur un Écrit lu à l'assemblée dernière par M. Cassini. Par M. LE MONNIER.	24
Mémoire sur l'inclinaison du troisième Satellite de Jupiter. Par M. MARALDI.	25
Occultation de $\mu$ des Gêmeaux par la Lune, le 11 Avril 1769; avec des Remarques sur la distance des Étoiles $\alpha$ & $\beta$ des Gêmeaux. Par M. LE MONNIER.	29
Examen de la question si les Espèces changent parmi les Plantes; nouvelles Expériences tentées à ce sujet. Par M. ADANSON.	31
Mémoire sur la Comète de 1769. Par M. DE LA LANDE.	49
Observations de deux Éclipses de Lune de cette année 1768, des 30 Juin au matin, & 23 Décembre au soir. Par M. MARALDI.	59
Sur une Éclipse horizontale de la Lune, vue à Châtillon dans la tour de M. le Duc de Croy, le 23 Décembre 1768, au soir. Par M. LE MONNIER.	61

# T A B L E.

<i>Observation de l'Éclipse de Lune du 23 Décembre 1768, &amp; de la Lune dans le Méridien.</i> Par M. DE LA LANDE.	63
<i>Observation de quelques phases de l'Éclipse de Lune du 23 Décembre 1768.</i> Par M. DE FOUCHY.	65
<i>Nouvelles Recherches pour servir à déterminer la nature de la Bile.</i> Par M. CADET.	66
<i>Recherches sur le Calcul intégral.</i> Par M. D'ALEMBERT.	73
<i>Observations de l'Opposition de Jupiter du 8 Mai; du passage de Vénus au-devant du Soleil, du 3 Juin; &amp; de l'Éclipse de Soleil du 4 Juin 1769.</i> Par M. JEAURAT.	147
<i>Mémoire sur la nécessité qu'il y a, dans les Essais ordinaires des matières d'Argent, d'extraire des coupelles la particule d'Argent fin qu'elles retiennent toujours, pour écarter les variations auxquelles cette opération est sujette, &amp; connoître sûrement le titre intrinsèque de ces matières.</i> Par M. TILLET.	153
<i>Observations du passage de Vénus sur le disque du Soleil, faites en présence du Roi, au château de Saint-Hubert, sous la latitude de 48° 43' 25".</i> Par M. LE MONNIER.	187
<i>Mémoire sur la nature des Suites infinies, sur l'étendue des Solutions qu'elles donnent, &amp; sur une nouvelle méthode d'approximation pour les Équations différentielles de tous les ordres.</i> Par M. le Marquis DE CONDORCET.	193
<i>Observation du passage de Vénus sur le disque du Soleil, faite à l'Observatoire royal le 3 Juin 1769.</i> Par M. CASSINI DE THURY.	229
<i>Mémoire sur l'éboulement qui arrive quelquefois à des portions de Montagnes &amp; autres terrains élevés; &amp; sur les moyens de prévenir ces éboulemens &amp; de s'en garantir dans plusieurs circonstances.</i> Par M. PERRONET.	233
<i>Observations de l'entrée totale de Vénus sur le disque du Soleil, faite à l'Observatoire royal le 3 Juin 1769, &amp; de l'Éclipse de Soleil du 4 Juin, au matin.</i> Par M. MARALDI.	245

## T A B L E.

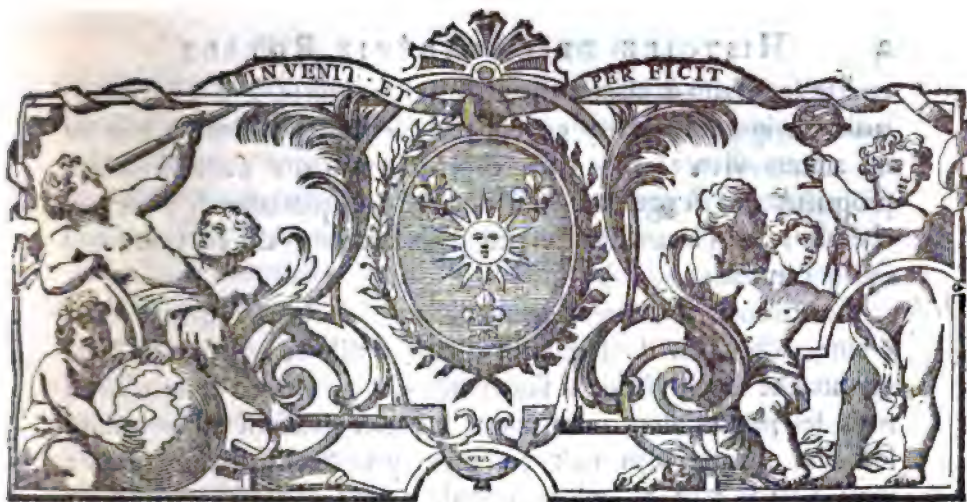
<i>Sur la Courbe décrite par les Boulets &amp; les Bombes, en ayant égard à la résistance de l'air.</i> Par M. le Chevalier DE BORDA.	247
<i>Mémoire sur la Pierre appelée Tripoli.</i> Par M. FOUGEROUX DE BONDARROY.	272
<i>Mémoire sur les principes de la Mécanique.</i> Par M. D'ALEMBERT.	278
<i>Mémoire sur la structure &amp; sur les usages de l'Ouraque dans l'Homme.</i> Par M. PORTAL.	287
<i>Nouvelles Méthodes analytiques pour calculer les Éclipses de Soleil, &amp;c. Septième Mémoire, dans lequel on applique à la solution de plusieurs Problèmes astronomiques, les Équations démontrées dans les Mémoires précédens.</i> Par M. DU SÉJOUR.	297
<i>Observation du passage de Vénus sur le Soleil, faite à Paris le 3 Juin 1769, dans l'Observatoire du Collège Mazarin.</i> Par M. DE LA LANDE.	417
<i>Observation de l'Éclipse de Soleil du 4 Juin 1769.</i> Par le même.	426
<i>Mémoire sur le rapport des différentes densités de l'Esprit-de-vin; avec ses différens degrés de force; d'où l'on déduit un moyen sûr de connoître avec précision la qualité &amp; la force des Esprits-de-vin &amp; des Eaux-de-vie.</i> Par M. BRISSON.	433
<i>Manière de sommer les Suites dont les termes sont des puissances semblables de Sinus ou Cosinus d'arcs qui forment une progression arithmétique.</i> Par M. l'Abbé BOSSUT.	453
<i>Mémoire sur des Insectes sur lesquels on trouve des Plantes.</i> Par M. FOUGEROUX DE BONDARROY.	467
<i>Détermination générale de l'effet des Roues mûes par le choc de l'eau.</i> Par M. l'Abbé BOSSUT.	477
<i>Comparaison des Observations du passage de Vénus, faites en Amérique, avec celles qui ont été faites dans le nord de l'Europe.</i> Par M. LE MONNIER.	498

## T A B L E:

<i>Manière de déterminer l'erreur des Tables de Vénus, indépendamment des effets des parallaxes du Soleil &amp; de Vénus, dans l'Observation du mois de Juin 1769. Par M. LE MONNIER.</i>	505
<i>Comparaison du passage de Vénus observé à Bordeaux, avec les observations faites à Paris. Par M. DE LA LANDE.</i>	509
<i>Observation du passage de Vénus sur le disque du Soleil, faite au Cap François, île de Saint-Domingue, le 3 Juin 1769. Par M. PINGRÉ.</i>	513
<i>Observation du passage de Vénus sur le Soleil, du 3 Juin 1769; faite à l'Observatoire avec une lunette de Dollond de 3 pieds &amp; demi. Par M. le Duc DE CHAULNES.</i>	529
<i>Observation du passage de Vénus sur le Soleil, le 3 Juin 1769; &amp; de l'Éclipse du Soleil, du 4 Juin de la même année. Faite au Cabinet de Physique du Roi, à Passy. Par M.<sup>rs</sup> DE FOUCHY, DE BORY &amp; BAILLY.</i>	531
<i>Remarques sur les différentes Observations du passage de Vénus, faites en Angleterre. Par M. DE LA LANDE.</i>	539
<i>Examen de la plus courte distance des centres de Vénus &amp; du Soleil, le 3 Juin 1769. Par le même.</i>	543
<i>Mémoire sur les Observations du passage de Vénus, faites à Brest. Par le même.</i>	546
<i>Mémoire dans lequel on démontre l'action du Poumon sur l'aorte; pendant le temps de la respiration, &amp; où l'on prouve que dans l'enfant qui vient de naître, le poumon droit respire avant le gauche. Par M. PORTAL.</i>	549
<i>Observations Botanico-météorologiques, faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers en Gâtinois, pendant l'année 1768. Par M. DU HAMEL.</i>	558
<i>Description d'un grand Fourneau à raffiner le cuivre, construit au mois d'Août 1755, dans la fonderie des Mines de Cheffcy en Lyonnois, dans lequel se raffine tout le Cuivre provenant desdites mines &amp; de celles de Saint-Bel. Par M. JARS.</i>	589



HISTOIRE



# HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

*Année M. D. C. C. L. X. I. X.*



## PHYSIQUE GÉNÉRALE.

*SUR DES INSECTES  
SUR LESQUELS ON TROUVE DES PLANTES.*

HISTOIRE Naturelle offre à chaque pas des merveilles V les Méms  
& des singularités dignes de la curiosité des Physiciens; P. 467.  
en voici une qui ne le cède en ce genre à aucune de  
celles qui sont connues. On savoit que quelques plantes pouvoient

*Hist. 1769.*

A

## 2 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

croître sur d'autres plantes desquelles elles tiroient leur subsistance; mais on ignoroit qu'il y en eût plusieurs qui pussent s'établir sur un animal vivant; il y en a cependant qui ont cette singulière propriété. M. Fougereux en a observé quelques-unes & a recherché dans les Naturalistes le peu d'observations de ce genre qui s'y rencontroient.

\* Voy. Hist.  
Acad. année  
1726, p. 19.

Ces plantes sont précisément l'inverse de la plante-ver de la Chine, dont M. de Reaumur donna l'histoire en 1726<sup>a</sup>, un ver attache sa chrysalide à l'extrémité des racines de cette plante; mais les plantes dont nous avons à parler naissent au contraire sur des animaux vivans & en tirent peut-être leur subsistance; mais c'est-là tout ce qu'elles ont de commun avec eux, & on ne peut guère les regarder, comme quelques célèbres Physiciens, que comme une espèce moyenne entre le règne végétal & le règne animal. On pourroit peut-être, à plus juste titre, les nommer *parasites* des animaux sur lesquels elles végètent, encore faudroit-il s'assurer, par des expériences décisives, qu'elles tirent leur nourriture de quelques-uns des sucres de ces animaux: passons à la description que donne M. Fougereux, des plantes de cette espèce qui sont venues à la connoissance.

Les Transactions Philosophiques font mention des mouches végétantes des Caraïbes.

\* Tettig. cicada;  
Mater mater.

La nymphe de la cigale de la moyenne espèce, appelée par Aristote, *Tettigomètre*<sup>b</sup> ou *mère de cigale*, est sujette à porter sur elle une plante du genre des *clavaria*, ainsi nommée parce que ses tiges & ses branches, quand elle en a, sont terminées par des tubercules qui lui donnent l'air d'une petite massue.

La racine ou pédicule de la plante couvre ordinairement le corps de l'insecte & quelquefois la tête ou le corcelet, & lorsque l'un & l'autre ont été conservés dans l'esprit-de-vin, on peut enlever la plante & la séparer de l'animal sans endommager celui-ci; le pédicule de la plante se trouve alors traversé par des cannelures que les anneaux de l'insecte y ont imprimé; mais on ne trouve aucun vestige de racines qui pénètrent dans le corps de l'animal.

Cette plante produit des filets plus ou moins longs & en plus ou moins grand nombre, M. Fougereux en a vu qui avoient

jusqu'à deux pouces de long, ces filets sont terminés par des têtes ou tubercules, ils sont pleins & solides, tant qu'ils ne sont pas parvenus à leur entier accroissement; passé ce terme, les sommités se trouvent souvent percées, vraisemblablement par des vers qui se métamorphosent en sortant de ces plantes.

Certaines plantes se trouvent encore quelquefois, non-seulement sur la nymphe de cigale, mais encore sur la cigale même; M. Fougereux en a vu une sur une cigale apportée de Cayenne, celle-ci est différente de la *clavaria* dont nous venons de parler, c'est une espèce de *fucus* formé de longs filets blancs & foyeux qui recouvrent tout le corps de l'insecte & le débordent de sept à huit lignes dessus & dessous le ventre de l'animal. M. Fougereux a encore vu la même plante attachée à un autre insecte du genre des procigales.

La *clavaria* vient aussi sur des vers, M. Fougereux en a vu sur plusieurs, & notamment sur ceux que produisent, en se métamorphosant, la petite espèce de hannetons, & on ne peut pas supposer que ces vers soient du genre de ceux qui produisent les cigales; ces deux espèces de vers ont entr'eux des différences trop marquées pour les confondre, les vers de cigales ont deux grosses pinces qui leur sont particulières & qui ne permettent pas de s'y méprendre.

Nous avons dit que les Transactions Philosophiques parloient de la mouche végétante des Caraïbes : voici ce qu'en dit M. Watson; ces mouches se trouvent dans la Dominique, elles s'enterrent, selon lui, dans le mois de Mai & commencent à se métamorphoser en Juin; le petit arbrisseau qui en naît ressemble à une branche de corail, il croît jusqu'à la hauteur de trois pouces & porte plusieurs petites gouffes; où naissent certains vers qui se métamorphosent ensuite en mouches.

Il est presque inutile de réfuter ce sentiment, absolument contraire aux idées de tous les Naturalistes & aux faits sur lesquels elles sont appuyées, & il est évident que M. Watson a été trompé par les vers, qui, comme nous l'avons dit, rongent la *clavaria* & se métamorphosent dans les creux qu'ils y ont formés.

Celui de M. Hill paroît bien plus probable & est fondé sur

#### 4 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

les observations qu'il a faites à la Martinique; les cigales sont fort communes dans cette île, & pendant leur état de nymphe, elles s'enterrent sous les feuilles mortes pour attendre leur métamorphose; si le temps n'est pas favorable, il périt un grand nombre de ces insectes, alors les semences de *clavaria* s'attachent aux cadavres & se développent à peu près comme le *fungus ex pede equino* vient sur la corne des chevaux morts; cette explication ne présente rien de contraire à la bonne Physique, & M. Fougereux penche beaucoup à l'adopter.

Il paroît donc constant qu'il y a des plantes qui viennent sur les cadavres de quelques animaux, que celles qu'on connoît sont presque toutes du genre des *fungus*, que même quelques-unes viennent sur des animaux vivans; M. Fougereux a cru, comme nous l'avons dit, remarquer des pièces qui sembloient le prouver, & la mousse qu'on observe sur les anciennes carpes, telles que celles de Fontainebleau, en peut encore fournir une preuve.

Mais s'il y a des plantes qui peuvent croître & végéter sur des animaux vivans, il y a aussi des insectes qui choisissent les racines ou d'autres parties d'une plante pour s'y attacher lorsqu'ils sentent approcher le temps de leur métamorphose; la plante-ver de la Chine est de ce nombre, il est vrai que l'insertion de l'animal dans la racine, où il semble être comme chatonné, sembleroit insinuer que c'est la plante qui est crüe sur le ver, & non pas celui-ci, qui s'est attaché à la plante; cependant le volume de la plante, qu'on dit être analogue au *Gin-feng*, & la manière, commune à un grand nombre d'insectes, de s'attacher à différens corps pendant leur métamorphose, ne permettent pas de s'écarter en ce point du sentiment de M. de Reaumur.

Nous avons même en Europe un insecte du genre des mantes qui fait, à découvert, la même manœuvre, on le nomme en Portugal *loura deos*; & en Provence, où il s'en trouve un, de même espèce, *prega-dieu*, parce qu'il se met souvent dans la posture d'un homme qui est à genoux & qui prie Dieu, Cet animal s'attache, au temps de sa métamorphose, aux extrémités des branches de quelques arbres, & il n'en a pas fallu davantage à ceux qui les ont vus sortir de leurs chrysalides, ainsi



## DES SCIENCES. §

stucées, & qui sont à peu près du même vert que la branche à laquelle elles sont attachées, pour assurer que ces insectes naissoient effectivement d'un arbre.

On pourroit peut-être s'étonner de la constance avec laquelle la *clavaria* semble s'attacher par préférence, aux nymphes de cigales dans l'Amérique, & de ce que dans les autres pays où ces insectes se multiplient, on ne trouve pas cette plante sur elles ni sur leurs nymphes; mais pour peu qu'on y fasse réflexion, on verra aisément que rien n'est plus naturel. Ces plantes sont du genre des parasites, & on sait que chaque parasite affecte de s'attacher à une espèce de plante déterminée, il n'est donc pas étonnant que celle-ci s'attache par préférence à une même espèce d'insecte: il est aussi facile de voir que le grand nombre de ces nymphes qui se trouvent en Amérique, & les circonstances du climat & de l'endroit, y rendent cette espèce de phénomène très-commun, quoiqu'on ne l'observe pas dans les contrées de l'Europe où il y a le plus de cigales. Au reste, M. Fougeroux, qui n'a pu faire ses observations que sur des insectes desséchés ou conservés dans l'esprit-de-vin & sur les figures qu'en ont donné quelques Physiciens, est bien éloigné de regarder ce travail comme complet, & il invite ceux des Naturalistes qui seront à portée d'examiner ce fait sur le lieu, & par eux-mêmes, à multiplier les observations d'après lesquelles seules on peut obtenir la véritable théorie de ce phénomène d'Histoire Naturelle.

## SUR LA

## PIERRE APPELÉE TRIPOLI.

**Q**UOIQUE le Tripoli soit une matière très-souvent employée V. les Méms. dans les Arts, & qu'à cet égard, il soit devenu un objet P. 272. de commerce, on n'en est pas mieux instruit sur la nature & sur son origine, & il y a peu de points d'Histoire Naturelle sur lequel les sentimens des Physiciens aient plus varié.

Nous avons en France des carrières de Tripoli, on en trouve à

## 6 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

Polligné en Bretagne, & à Menat à sept lieues de Riom en Auvergne; mais celui dont on fait le plus de cas, est celui qu'on tire de Venise, & que les Vénitiens prennent aux environs de Corfou dans une montagne nommée *Epiro*, près d'un bourg appelé *Santi-Quarenta*.

Cette espèce de pierre est légère & peu solide, les parties qui la composent n'étant que foiblement liées, sur-tout lorsqu'elle est récemment tirée de la carrière; par cette raison même, elle se sépare dans l'eau, plutôt qu'elle ne s'y dissout, & s'y précipite peu de temps après. Lorsqu'on en applique un morceau sur la langue, elle s'y attache, donne une saveur de glaise qui est même perceptible à l'odorat; les acides n'agissent que très-peu sur le tripoli, il se vitrifie à un feu violent; enfin sa couleur est d'un jaune plus ou moins foncé, & quelquefois même d'une légère nuance de rouge, suivant la nature de la matière dont le tripoli a été formé & la préparation qu'elle a reçue pour être réduite en cet état.

Les sentimens des Naturalistes ont extrêmement varié sur la nature du tripoli, l'analyse chimique n'a même pu fixer ces variations; les uns l'ont mis au rang des argiles vitrifiables; d'autres l'ont placé avec les terres réfractaires, d'autres l'ont mis au rang des craies; quelques-uns en ont fait un sablon minéral, d'autres ont cru qu'il étoit formé d'arbres & de bois fossiles; d'autres enfin, croient que cette pierre est formée d'une argile ou limon fin qui lui est particulier; & ce dernier sentiment, qui est adopté par M. Pott, semble être celui qui s'accorde le mieux avec les expériences & les observations.

Mais quand même on admettroit que le tripoli eût été originairement une espèce d'argile, il est sûr qu'il n'est plus en cet état dans les carrières où on le trouve, & il est question de déterminer le changement qu'il a souffert, & les agens qui le lui ont fait éprouver: la seule inspection des carrières d'où on le tire pouvoit décider cette question, & c'est aussi à ce moyen qu'a eu recours M. Fougeroux; voyons ce qu'a produit cet examen.

Les pierres des environs de Menat en Auvergne & de Polligné en Bretagne, où se trouve le tripoli, sont schisteuses & non litées; elles sont jaunes & de différentes nuances de rouge, & cette

dernière couleur leur vient d'une légère quantité d'ocre qu'elles contiennent & qui a subi l'action du feu; aussi est-ce une espèce de tradition, que les carrières de tripoli de Menat ont été autrefois embrasées pendant sept à huit ans; on y trouve des pierres brûlées & réduites en écume plus ou moins légère, & les mêmes indices de la présence d'un volcan, se retrouvent à la carrière de Polligné. Le tripoli de Menat a donné, par l'analyse chimique, du soufre & du fer; & celui de Polligné, du soufre & de l'alun; matières qu'on fait être ordinairement des produits de volcan.

Il y a plus; en couvrant de terre la glaise ou le schiste glaiseux & l'exposant au feu, dans des vaisseaux fermés, on obtient une espèce de tripoli semblable au mauvais tripoli de Bretagne. Il y a bien lieu de croire qu'avec un peu plus de peine, l'Art viendrait à bout d'imiter en ce point plus parfaitement la Nature.

On trouve dans quelques endroits de l'Italie, des terres argileuses brûlées par les feux souterrains, & souvent elles renferment des végétaux, ce qui pourroit appuyer le sentiment de M. de Gardeil, sur la nature du tripoli.

Mais rien ne peut mieux prouver la nécessité de l'action des feux souterrains pour la formation du tripoli, que ce qui se passe en Forès dans la carrière de *Saint-Génis*, proche Saint-Étienne, où le feu est depuis plus de cent ans, & dont nous avons parlé en 1765\*.

Les pierres de tout ce canton sont du schiste & le charbon est recouvert en particulier d'une couche de pierre argileuse, ou d'un schiste jaune & rougeâtre, au moins c'est ce qu'on retrouve dans les endroits voisins de la carrière, & qui n'ont point été atteints par le feu; mais dans ceux qui ont éprouvé son action, on retrouve les mêmes pierres qu'à Polligné: quelques-unes sont poreuses ou réduites en écume, d'autres sont vitrifiées, d'autres enfin, sont tendres, se réduisent en poussière & sont un vrai tripoli plus ou moins rouge, selon que la terre contenoit plus ou moins d'ocre ferrugineuse.

Voilà donc un tripoli évidemment formé par l'action du feu avec une terre semblable à celle qui avoisine presque toujours les carrières de cette matière; on retrouve aux environs de ces carrières,

\* Voy. Mém. de  
l'Acad. 1765.  
p. 389.

## 8 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

les mêmes pierres brûlées, dans le même état qu'à Saint-Génis; où la présence du feu n'est pas équivoque; & s'il se trouve quelques carrières de tripoli où ces signes manquent, ne pourroit-on pas supposer qu'il s'est formé plus haut, & y a été entraîné par les eaux qui l'y ont déposé?

Il seroit donc très-naturel de conclure que le tripoli est essentiellement un schiste ou une glaise brûlée, on a souvent adopté en Physique des opinions moins appuyées de preuves; mais M. Fougereux n'ose encore prononcer sur cet article, & ne propose les idées, que comme un motif aux Naturalistes d'étudier de plus près la nature de cette matière. Plus on est au fait de l'Histoire Naturelle & moins on se presse de donner des décisions générales.

---

### S U R

## LE RAPPORT DES DIFFÉRENTES DENSITÉS DE L'ESPRIT-DE-VIN,

### AVEC SES DIFFÉRENS DEGRÉS DE FORCE.

V. les Mém.  
P. 433.

ON a dû s'apercevoir de bonne heure, qu'en mêlant de l'eau pure à une liqueur spiritueuse, comme, par exemple, de l'esprit-de-vin, on affoiblissoit ce dernier dans la même proportion qu'on y joignoit de l'eau; en sorte qu'une liqueur composée de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin, étoit de moitié moins forte, ou moins spiritueuse que l'esprit-de-vin pur.

Il résulloit encore nécessairement du mélange des deux liqueurs; que l'eau étant spécifiquement plus pesante que l'esprit-de-vin, la liqueur composée des deux, devoit être d'une gravité spécifique, moyenne entre l'un & l'autre, & jusque-là on avoit bien raisonné; mais on se pressa un peu trop de conclure que cette augmentation de pesanteur étoit toujours proportionnelle à la quantité d'eau pure qu'on y avoit fait entrer, c'est-à-dire en raison inverse de la force de la liqueur, & cette conclusion quoiqu'universellement adoptée par les Physiciens fut démentie par l'expérience.

En

En 1733\*, feu M. de Reaumur travaillant à la construction de ses thermomètres, eût besoin d'établir avec précision le degré de force de l'esprit-de-vin qu'il employoit; pour cela, il fit plusieurs mélanges de l'esprit-de-vin le plus pur, le plus déflegmé, avec de l'eau pure, & ces opérations lui offrirent un phénomène auquel il ne se seroit pas attendu.

\* Voyez *Hist. de l'Acad.* année 1733, p. 18.

Il étoit naturel de penser qu'en ajoutant à deux mesures d'esprit-de-vin, qui occupoient un pouce de hauteur dans un tuyau, deux semblables parties d'eau, la liqueur totale, après le mélange, y devoit occuper deux pouces; ce fut cependant ce qui n'arriva point; la liqueur composée occupa toujours un moindre espace que celui qu'auroient occupé séparément, les deux liqueurs composantes.

Cette observation, rapportée alors par M. de Reaumur, fit du bruit dans le monde Physicien; mais on se contenta de la considérer comme un fait curieux & isolé, & M. de Reaumur lui-même, qui n'avoit pour but dans cette recherche que de fixer, s'il m'ést permis d'employer ce terme, le titre de son esprit-de-vin, ne la poussa pas plus loin.

L'expérience de M. de Reaumur, faisoit voir évidemment que les deux liqueurs se pénétoient mutuellement, ou qu'au moins l'une des deux pénétoit l'autre, & qu'il résultoit de cette pénétration une liqueur spécifiquement plus pesante que la proportion dans laquelle les liqueurs composantes étoient mêlées, ne sembloit la donner, & tous les Physiciens en demeurèrent d'accord; mais personne ne s'avisa de remarquer qu'il naissoit de-là deux questions importantes: la première de savoir dans le cas où il n'y auroit qu'une liqueur qui pénétrât l'autre, laquelle de l'eau ou de l'esprit-de-vin étoit la liqueur pénétrante ou pénétrée, & la seconde de déterminer quelle étoit la loi suivant laquelle se faisoit cette pénétration & l'augmentation de densité de la liqueur composée; on ne pensa pas même à la première, & quant à la seconde on supposa, sans aucune preuve, que cette augmentation de densité étoit proportionnelle à l'affoiblissement de la liqueur, c'est-à-dire, à la quantité d'eau qu'on y avoit introduit.

C'est à l'examen de ces deux questions qu'est destiné le Mémoire

*Hist.* 1769.

B

de M. Briffon dont nous avons à rendre compte; il examine d'abord les loix du rapport qui se trouve entre la gravité spécifique de la liqueur composée d'eau & d'esprit-de-vin, & la force de cette liqueur; & en second lieu, si les deux liqueurs se pénètrent mutuellement & en quelle proportion; & dans le cas où il n'y en auroit qu'une qui pénétrât l'autre, laquelle des deux jouit de cette propriété.

On juge bien que de semblables questions ne peuvent se décider que par des expériences nombreuses & très-précises; & c'est aussi la voie qu'a prise M. Briffon.

Pour y parvenir, il a commencé par le pourvoir d'un esprit-de-vin extrêmement déflégré & d'eau de pluie recueillie en plein air, dans un vase de fayence bien net, & qu'il n'avoit commencé à recueillir que quelques heures après le commencement de la pluie, pour donner le temps aux particules étrangères flottantes en l'air, & qui auroient pu altérer la pureté de l'eau, de se précipiter; il poussa même l'attention jusqu'à filtrer cette eau avant que de l'employer.

Avec cette eau & cet esprit-de-vin, M. Briffon a fait quinze mélanges; le premier, d'une partie d'eau avec quinze parties d'esprit-de-vin; le second, de deux parties d'eau avec quatorze parties d'esprit-de-vin, & ainsi de suite jusqu'au quinzième, qui ne contenoit plus qu'une partie d'esprit-de-vin contre quinze parties d'eau; ces parties étoient mesurées par un chalumeau de verre renflé qu'il plongeait dans la liqueur, jusqu'à un fil délié placé sur le tube très-menu qui termine cet instrument, & il n'avoit aucune erreur à craindre sur ces mesures; toutes les expériences ont été faites à la température indiquée par le quatorzième degré au-dessus de la congélation du thermomètre de M. de Reaumur. Sitôt que chaque mélange étoit fait, il étoit mis dans une bouteille bien bouchée pour éviter l'évaporation; il le remuait pour faciliter le mélange, & le laissoit reposer assez de temps pour dissiper la chaleur causée par le mélange des deux liqueurs.

Il résulta du travail de M. Briffon, dix-sept liqueurs de force & de pesanteur spécifique différentes; savoir, l'esprit-de-vin pur, l'eau pure, & les quinze mélanges dont nous venons de parler,

dont il connoissoit exactement la force par la proportion dans laquelle l'eau & l'esprit-de-vin étoient mêlés.

Pour connoître présentement la marche de leur augmentation de densité, & savoir quelle proportion elle avoit avec l'affoiblissement connu de la force de ces liqueurs, il falloit examiner avec précision leurs pesanteurs spécifiques.

Pour y parvenir, M. Briffon a pris un aréomètre de verre, lesté à l'ordinaire de mercure; cet instrument avoit le col du tube très-mince, & portoit au haut de ce tube un petit plateau, sur lequel on pouvoit mettre de petits poids, soigneusement étalonnés, pour obliger l'instrument à s'enfoncer quand il étoit nécessaire: cet aréomètre fut pesé dans une balance très-exacte, & M. Briffon eut grand soin d'écrire son poids.

C'est à l'aide de cet instrument que M. Briffon a mesuré la pesanteur spécifique de cet instrument; il l'a d'abord plongé dans l'esprit-de-vin pur, & il a marqué avec un fil, sur le col de l'aréomètre, le point jusqu'auquel il s'enfonçoit; le volume d'esprit-de-vin, déplacé par cette immersion, a pesé 686 grains &  $\frac{6}{8}$ . On juge bien que pour le faire enfoncer autant dans l'eau, il a fallu mettre des poids dans le plateau de la balance, & le volume d'eau, égal à celui de l'esprit-de-vin, a pesé 820 grains &  $\frac{3}{8}$ .

Il est presque inutile d'ajouter ici, qu'en plongeant successivement l'aréomètre dans les différentes liqueurs composées, le même volume a été de plus pesant en plus pesant, à mesure que les liqueurs étoient plus chargées d'eau; M. Briffon n'en a pas été surpris, c'étoit une conséquence nécessaire du mélange plus ou moins grand de l'eau avec l'esprit-de-vin; il ne fut pas plus étonné de trouver toujours la pesanteur spécifique des liqueurs composées plus grande que ne le demandoit la quantité d'eau mêlée avec l'esprit-de-vin, c'étoit l'effet de la pénétration des liqueurs entr'elles; mais il le fut beaucoup de voir la marche de ces augmentations, & de reconnoître qu'elle n'étoit nullement proportionnelle à l'affoiblissement de l'esprit-de-vin. Deux Tables, dont la première contient les augmentations de poids observées, avec leurs différences; & la seconde, ces mêmes augmentations réelles comparées avec celles qui résulteroient du mélange de l'eau avec l'esprit-de-vin, s'il ne

se faisoit point de pénétration entre les deux liqueurs , lui ont fait voir toutes ces différences.

Des expériences de M. Briffon , que nous venons de rapporter ; il résulte que l'esprit-de-vin augmente de densité à mesure qu'on y mêle de l'eau , mais cette augmentation n'est nullement proportionnelle à la quantité d'eau mêlée , ou ce qui revient au même , à l'affoiblissement de l'esprit-de-vin : les différences entre les augmentations de densité , causées par la pénétration mutuelle des deux liqueurs vont en diminuant , jusqu'à ce que la liqueur soit composée de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin : passé ce terme , à mesure qu'on ajoute de l'eau , les différences entre les augmentations ; vont en augmentant. Tout cela prouve incontestablement que , comme nous l'avons déjà dit , l'eau & l'esprit-de-vin se pénètrent mutuellement , mais que cette pénétration a un terme , & qu'elle n'a lieu que jusqu'à ce que le mélange soit composé de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin , & qu'après ce terme , elle éprouve un décroissement très-sensible.

Mais comment accorder ceci avec les observations de M. de Reaumur , qui assure que la plus grande diminution de volume se trouve quand le mélange est composé de deux tiers d'eau & d'un tiers d'esprit-de-vin ? voici la raison très-probable que donne M. Briffon de cette différence. M. de Reaumur , qui n'avoit pas les mêmes vues que lui , ne faisoit pas les mélanges séparément , il ajoutoit seulement de l'eau à des mélanges déjà faits , sans même leur donner le temps de perdre la chaleur que le mélange avoit occasionnée ; d'où il suit qu'il a vraisemblablement ajouté à la diminution de volume , causée par la pénétration , celle qui ne venoit que du refroidissement de la liqueur ; & que l'opinion de M. Briffon , qui fixe , par ses expériences plus suivies , le terme de la plus grande diminution de volume au terme de l'égalité de l'eau & de l'esprit-de-vin , n'en peut être ébranlée.

L'augmentation de densité qui provient de la pénétration mutuelle des deux liqueurs , est , suivant M. Briffon , de  $\frac{1}{17}$  &  $\frac{1}{3}$  , ou  $\frac{3}{17}$  du poids de l'esprit-de-vin. M. de Reaumur ne la faisoit que d'un vingtième ; mais cette différence est une suite de la première erreur , étant précisément la quantité qui convient au mélange.



de deux tiers d'eau & d'un tiers d'esprit-de-vin, que ce savant Physicien regardoit comme celui qui occasionnoit la plus grande pénétration.

Il est donc déjà bien prouvé que dans le mélange de l'eau & de l'esprit-de-vin, il se fait une pénétration réelle entre les deux liqueurs, de laquelle il résulte une augmentation de densité; mais la pénétration est-elle mutuelle, ou une seule des deux liqueurs pénètre-t-elle l'autre?

M. Briffon croit que l'augmentation de densité est due à une pénétration mutuelle des deux liqueurs, & voici comme il le prouve. L'augmentation de densité d'un mélange, composé de huit parties d'eau & de huit parties d'esprit-de-vin, est d'environ vingt grains; si la seule introduction de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, étoit la cause de cette augmentation, un mélange d'une seule partie d'esprit-de-vin, avec quinze parties d'eau, devroit augmenter en densité de deux grains & demi, huitième partie de vingt grains, puisqu'il y auroit bien plus d'eau qu'il ne faut pour remplir les pores de l'esprit-de-vin; cependant il n'augmente en densité que d'environ un grain & trois quarts, preuve évidente que l'esprit-de-vin pénètre aussi les pores de l'eau, puisqu'étant en trop petite quantité dans le mélange, il n'a pu fournir assez de particules pour les remplir: d'un autre côté, si l'augmentation de densité n'étoit due qu'à l'introduction de l'esprit-de-vin dans l'eau, un mélange d'une seule partie d'eau, avec quinze parties d'esprit-de-vin, devroit donner deux grains & demi d'augmentation de densité, & il en donne une de près de quatre grains & demi; l'eau s'insinue donc elle-même dans les pores de l'esprit-de-vin, & l'introduction de l'esprit-de-vin, dans les pores de l'eau, n'est pas la seule cause de l'augmentation de densité de ce mélange.

Il est donc déjà bien sûr que les deux liqueurs se pénètrent mutuellement, mais se pénètrent-elles également?

Pour parvenir à décider cette question, il ne faut que considérer ce qui devroit arriver si les deux liqueurs se pénétraient également; & ce qui arrive réellement dans l'expérience: si la pénétration étoit égale, il est sûr que l'augmentation de densité seroit la même; soit que le mélange fût composé de quinze parties d'eau & d'une

d'esprit-de-vin, ou de quinze parties d'esprit-de-vin & d'une d'eau : or, c'est ce que l'expérience ne donne nullement ; la densité, produite par le mélange d'une partie d'esprit-de-vin avec quinze parties d'eau, n'est que de quatre grains & demi ; tandis que celle qui vient du mélange d'une partie d'eau avec quinze parties d'esprit-de-vin, n'est que d'un grain & trois quarts : il y a donc plus de parties d'eau qui pénètrent l'esprit-de-vin, qu'il n'y a de parties d'esprit-de-vin qui pénètrent l'eau ; & M. Briffon trouve que l'eau contribue au phénomène pour deux tiers, & l'esprit-de-vin pour deux tiers.

Il résulte encore des expériences qu'il a faites, que toutes les parties de l'eau ne sont pas également propres à s'infinuer dans les pores de l'esprit-de-vin, & que par conséquent elles ne sont pas toutes semblables : mais comment supposer des parties dissemblables dans une matière regardée jusqu'ici comme un élément, & qui par conséquent devoit avoir toutes les parties homogènes ; mais M. Briffon ne convient nullement de cette conséquence ; la matière de la lumière ou du feu est bien certainement un élément ; cependant les expériences de M. Newton prouvent évidemment que les parties ne sont rien moins qu'homogènes & que par conséquent l'homogénéité des parties n'est nullement nécessaire à un élément.

Toutes ces expériences semblent conduire & conduisent réellement à un moyen de connoître la force des différentes espèces d'esprit-de-vin & d'eau-de-vie, c'est-à-dire en quelle proportion l'esprit inflammable y est mêlé avec l'eau ; mais pour peu qu'on y fasse d'attention, il sera aisé de voir que ce ne peut être par le moyen de l'aréomètre seul & sans aucun calcul ; cet instrument ne donne, par ses différens enfoncemens, que le rapport des densités des liqueurs où on le plonge, & nous venons de voir que ces densités n'ont aucun rapport avec les quantités d'eau & d'esprit ardent qui composent la liqueur qu'on examine.

M. Briffon trouve cependant le moyen de ramener le peseliqueur à cet usage. Pour cela, il a dressé une Table qui contient les pesanteurs spécifiques de toutes les liqueurs mêlées d'eau & d'esprit-de-vin, depuis 1000, qui représente celle de l'eau pure, jusqu'à 837, qui représente celle de l'esprit-de-vin pur. Alors,

en se servant de l'aréomètre, on le plongera dans l'eau pure, & on remarquera la quantité de poids qu'il faudra y ajouter pour le faire enfoncer jusqu'à la marque qui doit être sur la tige, & on ajoutera ce poids avec celui de l'aréomètre. On fera pareille opération sur l'eau-de-vie à essayer, & on dira comme, le poids du volume d'eau pure, indiqué par l'instrument, est à 1000 pesanteur spécifique de l'eau dans la Table; ainsi le poids du même volume de l'eau-de-vie proposée, est à un quatrième terme qu'on cherchera dans la Table; & à côté de ce nombre, ou en prenant une partie proportionnelle entre ceux qui en approcheront le plus, on trouvera la quantité d'eau & celle d'esprit ardent que contient la liqueur. C'est ainsi que M. Briffon trouve le moyen de ramener l'aréomètre à un usage que le peu de rapport qu'il y a entre les quantités de flegme & d'esprit ardent, & l'augmentation de densité des liqueurs qui en sont composées paroïssoit lui interdire, & qu'il lève la difficulté que ses recherches, dont nous venons de rendre compte, semblent introduire dans cette opération.

## OBSERVATIONS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE.

### I.

L'ACADÉMIE à déjà donné, en 1761\*, l'histoire d'un Tireur de Houille, qui avoit été pendant huit jours enfermé, par un accident, dans la galerie d'une mine de cette matière, auprès de Charleroy. Voici encore un fait à peu près pareil, arrivé dans une semblable mine, & que l'Académie doit au soin que M. Bertin, Ministre, a eu de lui en faire passer la relation.

\* Voy. Hist.  
de l'Acad. année  
1761, p. 26.

Le 17 Novembre 1768, le nommé Vital, Charbonnier; du bourg de Sainte-Florine en Auvergne, travaillant avec un de ses camarades dans une mine de charbon, à la profondeur de 275 pieds ou près de 56 toises, ils furent tout-à-coup engloutis avec les étais & plus de 20 toises de charbon sur eux, dans des

galeries inférieures précédemment vidées, & dont ils n'avoient point de connoissance : le père de Vital & d'autres ouvriers qui se trouvèrent présens, firent aussitôt tous leurs efforts pour tâcher de les retirer, mais leurs tentatives furent vaines, parce qu'il retomboit toujours plus de charbon d'en haut qu'ils n'en pouvoient enlever ; ils se retirèrent ayant perdu tout espoir de les revoir jamais, & leur firent même rendre les honneurs funèbres tant ils étoient persuadés de leur mort.

Le nommé Vital étoit cependant échappé, quelques bois des débris avoient mis en se croisant, sa tête & la moitié de son corps, à l'abri sous une espèce de voûte, mais ses cuisses & ses jambes étoient retenues dans le charbon éboulé, dont il eut bien de la peine à se débarrasser ; il fut plus de trois heures à y parvenir : pendant ce travail, il entendit quelque temps son camarade crier & se plaindre dans une galerie plus basse ; mais ne l'entendant plus, il l'appela inutilement, il étoit apparemment péri. Vital enfin dégagé des décombres, étouffant faute d'air, & tombant de foiblesse & de fatigue, s'assit & s'endormit ; à son réveil il se mit à tâter de tous côtés & trouva que l'extrémité de ce passage étoit terminée par un puits de quatre pieds en quarré & d'environ trente pieds de hauteur, par où l'on y descendoit autrefois ; mais ce puits étoit bouché, du moins de son côté, par des décombres qu'on y avoit jetés ; il entreprit de tirer ces décombres dans le passage & de se faire jour dans le puits & il y travailla le reste du jeudi, la nuit qui suivit, le vendredi, la nuit du vendredi au samedi & une partie du samedi. Quoiqu'il eût eu un poignet démis lors de l'éboulement, l'espoir de conserver sa vie lui donnoit des forces ; il parvint enfin à monter par ce puits dans les galeries où l'on travailloit, mais il n'y trouva personne, les ouvriers ayant déjà quitté leur travail, & malgré son bras estropié, il monta dans le principal puits, jusqu'à cinquante pieds de hauteur, à la faveur des bois des étais auxquels il s'accrochoit ; mais ce secours lui ayant manqué, parce que le reste du puits étoit percé dans le roc & n'avoit pas eu besoin d'étais, il demeura à cette hauteur suspendu en l'air accroché par les mains au dernier étai, & les jambes appuyées contre le puits : deux heures s'écoulèrent dans cette  
fatigante



épuisante situation, pendant lesquelles il ne cessa de crier; enfin un habitant de Sainte-Florine l'entendit, on vint à son secours & on lui jeta une corde, au moyen de laquelle il sortit de la mine où il avoit été près de trois jours & deux nuits depuis son accident. On lui présenta à boire & à manger au sortir de la mine, mais il ne put rien prendre; il retourna chez lui à pied; & après quelques momens de repos, il mangea un peu de potage: il a déclaré que pendant son séjour dans cet abîme, & malgré le travail forcé qu'il y avoit fait, il n'avoit senti ni faim ni soif; étoit-ce l'émotion? étoit-ce l'air étouffé qu'il respiroit, qui l'en avoit garanti? Il ne lui est demeuré, de ce terrible accident, que la douleur de son poignet démis, & quelques accès de rétention d'urine.

Ce fait, & celui que l'Académie a rapporté en 1761, font bien voir combien il est essentiel de ne pas se rebuter dans le secours qu'on entreprend de donner aux malheureux qui sont dans le cas que nous venons de rapporter, & combien il est contraire à l'humanité de se figurer trop légèrement qu'ils sont périés. La Nature a, comme on voit dans de certaines circonstances, plus de ressources qu'on n'oseroit ordinairement lui en supposer.

## I I.

La ville de l'Argentière en Vivarais est bâtie en amphithéâtre sur le bord d'un ruisseau qui coule toujours, mais qui n'a que très-peu d'eau hors le temps des inondations; il y en eut une vers la fin de Décembre 1768, qui le fit enfler prodigieusement; mais les pluies qui la caufoient ayant cessé, il commença à baisser la nuit du 2 au 3 Janvier par un temps très-serein. Le 3, sur les dix heures du matin, on vit, avec la plus grande surprise, naître dans les endroits bas de plusieurs maisons, des sources abondantes d'une eau très-claire qui, après avoir rempli les caves, se répandit dans les rues; dans le même temps on vit jaillir, dans plusieurs endroits du lit du ruisseau dont les eaux étoient encore troubles, des eaux très-claires & fumantes; ce phénomène dura trois jours, & la quantité de ces eaux jaillissantes, sorties pendant les trois jours, fut évaluée à 43200 toises cubes. On soupçonna que les eaux

*Hist. 1769.*

C

du ruisseau, dans l'inondation précédente, s'étoient fait jour dans quelque cavité souterraine, placée sous la ville de l'Argentière, & que c'étoit cette même eau qui avoit reparu par les différentes sources & les différens jets qu'on avoit observés. Cette explication, d'ailleurs assez naturelle, n'étoit pas propre à rassurer les habitans de la ville de l'Argentière; aussi furent-ils dans la plus vive inquiétude, qui n'a été calmée que par le long temps qui s'est écoulé sans accident depuis l'observation de ce phénomène. Tout ce détail est tiré d'une lettre écrite à M. le Prince de Beauvau, que ce Seigneur avoit remise à M. le Comte de Maillebois, pour la communiquer à l'Académie.

## I I I.

Le 7 Juillet 1769, il y eut à Paris un orage accompagné de grêle d'une grosseur considérable, circonstance rare dans les pays de plaines peu élevées; M. Adanson qui l'observa hors des portes de Paris, & au sud-est du Jardin du Roi, en donna le lendemain le détail à l'Académie : en voici les circonstances les plus essentielles.

Cet orage avoit été précédé de sept jours complets de sécheresse, pendant lesquels il avoit soufflé un vent assez fort, variant depuis le nord-ouest jusqu'au nord-est, & cependant quelques nuages élevés paroissoient venir du sud-est; le baromètre s'étoit toujours soutenu à 28 pouces 4 lignes, & le thermomètre de M. de Reaumur avoit marqué de 17 à 22 degrés au-dessus de la congélation; le vent de nord-est avoit beaucoup moli dans les deux derniers jours, & avoit fini par tomber entièrement; le baromètre étoit baissé d'une ligne, & le thermomètre s'étoit élevé presque subitement jusqu'à 26 & 27 degrés.

Tel avoit été l'état de l'atmosphère lorsque l'orage s'annonça; le 7 Juillet sur les 6 heures du soir, par de grosses gouttes de pluie très-écartées & accompagnées d'éclairs & de coups de tonnerre assez forts & assez fréquens; à ce prélude, succéda une pluie forte mêlée de grêle & chassée par un vent d'ouest assez fort; les grêlons étoient figurés en pyramide à six pans, très-obtus, de 6 lignes de longueur sur 3 de largeur : tout ceci dura une demi-heure; après

quoï, le vent s'étant rangé au nord-est, y souffla très-violemment, lançant avec la pluie des grêlons faits comme des boutons d'habit & de 9 lignes de diamètre; ces grains étoient si transparens & si réguliers, qu'ils grossissoient les objets sans les défigurer, comme auroit pu faire un verre plan convexe; cette dernière grêle dura environ un quart-d'heure.

La chute de la première grêle avoit fait peu de mal aux plantes; mais la seconde les maltraita beaucoup; les feuilles un peu grandes étoient percées comme par des balles de mousquet; les fruits meurtris & les plantes basses écrasées contre la terre; les seigles & les orges qui étoient presque mûrs, furent répandus sur la terre; les fromens qui étoient plus éloignés de leur maturité, furent versés: quant à la vigne, elle en reçut peu de dommage, parce que le raisin étoit encore trop peu avancé.

## I V.

L'Académie a rendu compte en 1751<sup>a</sup> & en 1768<sup>b</sup> de la résine élastique de Cayenne, formée par le suc laiteux épaissi d'un arbre, & que les naturels du pays nomment *Caoutchouc*.  
<sup>a</sup> Voy. Hist. 1751, p. 17.  
<sup>b</sup> Voy. Hist. 1768, p. 58.  
 M. Poivre, Commissaire-ordonnateur à l'Isle de France, a mandé à M. le Chevalier Turgot, qu'il avoit découvert une plante très-commune dans cette Isle, qui donne, lorsqu'on la casse, un suc laiteux, pareil à celui de l'arbre de Cayenne, qui, comme lui, forme en s'épaississant une résine semblable au caoutchouc; quoiqu'un peu moins élastique que ce dernier, elle est, comme lui, susceptible d'une très-grande extension. M. le Chevalier Turgot a fait voir à l'Académie un cordon de cette matière, qui, comme on voit, pourroit n'être pas si particulière à la Guyane, qu'il ne s'en trouvât en plusieurs endroits de la terre.

## V.

Le Père Cotte, Prêtre de l'Oratoire & Correspondant de l'Académie, étant à Montmorency, où il avoit établi sur une terrasse un conducteur isolé pour recevoir l'électricité des nuées orageuses, fit pendant tout l'été 1769, & sur-tout pendant un violent orage qui arriva le 7 Juillet, les observations suivantes:



## 20 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

pendant la durée de l'orage, le conducteur donnoit des étincelles très-vives & très-piquantes, même pendant qu'il pleuvoit; mais cette électricité, quoique très-forte; n'étoit pas continue, elle cessoit quelquefois tout-à-coup & reparoissoit un instant après; elle n'étoit jamais plus forte que dans le moment où brilloit un éclair, & au contraire elle diminuoit considérablement & dispa-roissoit même quelquefois entièrement pendant les roulemens du tonnerre. Il a encore observé plusieurs fois, & notamment <sup>Voy. hist. 1767. p. 31.</sup> en 1767\*, ce que lui-même avoit communiqué l'année dernière à l'Académie, que l'éclair, ou pour parler plus juste, le trait de feu qui le cause, partoît souvent en même temps de la terre & du nuage.

### VI.

Trois faits singuliers du même genre, qui ont eu cette année pour époque, ont paru mériter que l'Académie en fit part au Public. Au mois de Février 1769, M. l'abbé Bacheley, son Correspondant, lui fit voir une pierre qu'on disoit être tombée avec le tonnerre, près du château de Lucé dans le Maine; & les circonstances du sifflement qu'on avoit entendu, de la chaleur de la pierre & de l'état où elle avoit été trouvée, sembloient donner quelque vraisemblance à cette opinion. Vers la fin de la même année, M. Gursion de Boyaval, Lieutenant général honoraire au Bailliage d'Aire en Artois, lui en fit remettre une semblable, & qu'on disoit aussi avoir été produite & jetée par le tonnerre; enfin M. Morand fils en remit encore une troisième qu'on disoit être tombée dans le Cotentin, dans les mêmes circonstances. Ces trois pierres comparées ensemble, n'ont offert à l'œil aucune différence, elles sont de même couleur & à peu près du même grain; on y reconnoît de petites parties métalliques & pyriteuses; elles sont recouvertes d'une croûte noire & ferrugineuse; un morceau d'une de ces pierres a été pulvérisé, & on l'a fait brûler; cette poudre prête à rougir, a donné une forte odeur de soufre; puis de grise qu'elle étoit, elle est devenue de la couleur du safran de Mars: on l'a pesée au sortir du feu, & malgré le soufre qui s'en étoit évaporé, elle n'avoit rien perdu de son poids, la poudre

## DES SCIENCES. 77

alcinée & mêlée avec le verre, le borax & le charbon a donné un verre noir semblable au laitier, qui étoit recouvert d'une poudre noire attirable par l'aiman, & le verre noir pulvérisé l'étoit aussi; la pierre soumise à l'action de l'acide marin a donné une forte odeur de foie de soufre; & il s'est excité une légère effervescence; elle n'en a presque point fait avec l'acide vitriolique, & il en est résulté un sel martial: enfin avec l'acide nitreux, elle a donné une forte odeur de soufre. L'Académie est certainement bien éloignée de conclure, de la ressemblance de ces trois pierres, qu'elles aient été apportées par le tonnerre; cependant la ressemblance des faits arrivés en trois endroits si éloignés, la parfaite conformité entre ces pierres & les caractères qui les distinguent des autres pierres, lui ont paru des motifs suffisans pour publier cette observation & pour inviter les Physiciens à en faire de nouvelles sur ce sujet; peut-être pourroient-elles jeter de nouvelles lumières sur la matière électrique & sur son action dans le tonnerre.

### V. I. I.

M. Dutour, Correspondant de l'Académie, lui a envoyé une collection de pierres trouvées aux environs de Riom en Auvergne; dans la carrière de tripoli de Menat, ces pierres sont de véritables lames de tripoli, sur lesquelles on trouve des empreintes assez bien marquées de feuilles qui paroissent appartenir à la classe des arbres, sans qu'on puisse cependant bien nettement décider à quelle espèce indigène ou exotique elles ont appartenu; ces empreintes ont paru différentes de celles qui se trouvent ordinairement dans les premiers bancs de charbon de terre: quoique ce fait ne soit pas absolument nouveau, que M.<sup>rs</sup> Ludwig & Gardeil aient pensé que le tripoli étoit en grande partie composé de matières végétales, que M.<sup>rs</sup> Guettard & Fougereux aient fait mention de matières végétales trouvées dans le tripoli; cependant comme les échantillons de pierre envoyés par M. Dutour ont quelque rapport avec les schistes, ce qui tendroit à prouver que cette substance est plus commune qu'on ne pense, & que d'ailleurs cette observation peut servir à appuyer ce que nous avons déjà dit

## 22 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

\* Voy. ci-dessus, page 1 & suiv.

dans cette histoire \*, d'après M. Fougeroux, sur la formation de Tripoli, l'Académie a cru la devoir insérer dans son Histoire.

### VIII.

\* Voy. Hist. 1767, p. 28.

Des ouvriers qui travailloient dans une carrière à plâtre, située à Montmorency, trouvèrent dans un morceau de masse qu'ils détachèrent, des os & des dents d'animaux; cet endroit n'étoit éloigné que d'environ 30 toises de celui où l'on avoit trouvé, il y avoit environ deux ans, de pareils ossemens, que le P. Cotte avoit envoyés à l'Académie, qui en a fait mention dans son Histoire de 1767 \*: les nouveaux lui furent aussi portés, & il les fit de même passer à l'Académie; l'examen qu'on en fit, prouva qu'ils étoient réellement pétrifiés; ils rougissoient au feu sans donner aucune fumée & sans se consumer, & ils étoient dissolubles par les acides: mais il ne fut pas plus possible cette fois que la première, de déterminer à quel animal ces dents avoient appartenu; tout ce qu'on put remarquer, fut qu'elles différoient de celles de tous les animaux que nous connoissons dans ce pays.

### IX.

Le 24 Octobre 1769, il y eut une très-belle Aurore boréale; qui fut observée en plusieurs endroits du Royaume; à Reims, où étoit pour lors M. Lavoisier, elle commença presque à la chute du jour, M. Lavoisier n'en fut averti que vers les huit heures & demie, il se transporta aussitôt sur les remparts de la ville pour y avoir le Ciel plus découvert; l'horizon lui parut nébuleux jusqu'à quelques degrés de hauteur, & on y voyoit un nuage échancré; d'où partoient des rayons lumineux assez blancs; le nuage étoit terminé à l'est par un vertical qui auroit passé par le milieu de la constellation de Cassiopée; & à l'ouest, par celui qui auroit passé par la dernière étoile de la queue de la grande Ourse; les rayons qui en partoient s'élevoient d'environ 60 degrés, & paroissent tendre à se réunir non au zénith, mais à un point plus méridional; celui qui partoît du point précis du nord, paroissoit passer par le zénith; à droite & à gauche du nuage, étoient deux taches lumineuses d'un rouge de sang, qui occupoient la partie de l'est & de l'ouest; bientôt la tache occidentale se convertit en rayons de la

même couleur, qui prirent une direction semblable aux rayons blancs qui partoient du nuage ; bientôt après, la tache rouge orientale s'étendit, sans perdre sa couleur rouge, jusqu'aux étoiles de la grande Ourse & d'une égale quantité : de l'autre côté, la couleur rouge commença alors à diminuer peu à peu ; & vers  $9^h\frac{1}{2}$ , tout étoit presque entièrement fini.

Cette même Aurore boréale fut observée à Auch, par M. Despiaud, Professeur de Philosophie, qui en avoit observé le 15 une autre qui ne put être aperçue à Paris, le Ciel y ayant été couvert.

## X.

Le 1.<sup>er</sup> Décembre 1769, un peu après  $6^h\frac{1}{2}$  du soir, il y eut un tremblement de terre qui se fit sentir à peu de distance de Paris, & même dans quelques quartiers de cette capitale ; un des amis de M. Fougeroux, qui étoit alors dans son appartement au château de Saint-Cloud, se sentit comme soulevé avec un mouvement de tourbillon fort singulier, la charpente craqua ; & dans l'appartement au-dessus, tous les instrumens de cuisine furent mis en mouvement ; chez un autre particulier logé dans la même aile du château, le craquement fut si fort, que toute la compagnie s'enfuit en criant que le plancher tomboit : ce même tremblement de terre fut ressenti & observé à Dieppe par M. Anceel ; à Rouen, par M. Bouin ; & à Montmorency, par le Père Cotte, qui tous ont eu l'attention d'en informer l'Académie.

## X I.

Dans l'intérieur de la coquille de quelques grandes moules d'eau douce, qu'on nomme communément *moules d'étang*, il s'est trouvé plusieurs petites perles de différentes grosseurs, il y en avoit même une assez grosse, mais celle-ci avoit pour noyau une petite pierre recouverte par une couche de nacre. On sait que les perles ne sont qu'une espèce d'extravasation du suc destiné à former la nacre, & qui est vraisemblablement causée par une maladie de l'animal ; quelques Asiatiques, voisins des pêcheries de perles, ont l'adresse d'insérer dans les coquilles des huîtres à perles, de petits ouvrages qui se revêtissent, avec le temps, de la matière



qui forme les perles : les moules en question , qui ont une espèce de nacre , peuvent être sujettes à quelque maladie semblable ; & puisqu'une petite pierre s'étoit incrustée dans une moule , pourquoi ne tenteroit-on pas de se procurer de petits ouvrages incrustés de même ? Ces moules avoient été pêchées dans les fossés du château de Maulette près de Houdan , & elles ont été envoyées à l'Académie par M.<sup>me</sup> Pétau , fille de son Historien.

## X I I.

En travaillant aux fouilles nécessaires pour asseoir la culée du nord-ouest du pont de pierre qu'on construit à Neuilly , on trouva , après plusieurs lits de terre , de gravier , de coquilles & de glaise , à 8 pieds plus bas que la superficie des plus basses eaux , un lit que M. Morand fils , qui étoit présent , reconnut pour du charbon de bois fossile ; & au-dessous de ce banc , qui pouvoit avoir environ un ou deux pieds d'épaisseur , il y en avoit un autre de 7 à 8 pieds d'épais ; & entre deux , couloient des sources assez abondantes. M. Morand eut la curiosité d'examiner si dans l'isle où se trouvoit l'emplacement de la culée du nord-est , il retrouveroit le même banc de charbon fossile , il ne l'y retrouva pas ; mais la recherche ne fut pas pour cela tout-à-fait inutile , & il trouva une substance bien plus singulière que celle qu'il cherchoit : la superficie du terrain de l'isle en question est élevée de 25 pieds au-dessus du niveau du lit de charbon fossile dont nous avons parlé ; cette masse de terrain est composée d'un lit de terre limoneuse , mais un peu moins grasse que celle de la rive opposée ; d'un lit de gros gravier posé sur un autre lit de sable ; celui-ci posé sur un lit de coquilles de moules de rivière , la plupart incrustées de vase durcie ; enfin au-dessous de celui-ci , est un lit épais de glaise dont le dessus est mal formé ; mais celle de dessous a tous les caractères de la véritable glaise ; on y trouve des coquilles de moules d'étang , sans presque aucune altération ; on y trouve encore des gâteaux assez épais de feuillages , quelques branchages & des racines qui paroissent avoir appartenu à la salicaire ou à d'autres plantes approchantes ; ces branches & ces racines n'ont d'entier que l'écorce , le dedans en est absolument détruit & rempli de grumeaux

grumeaux remarquables par une belle couleur bleue : tandis qu'il considéroit cette singulière matière , M. Perronet lui en montra d'absolument semblable tirée des fouilles faites pour la fondation des piles du pont de Creil , & qui s'y trouve en assez grande abondance ; quelques-uns de ces grumeaux ne sont bleus qu'à leur surface qui renferme une terre jaunâtre assez dure ; leur couleur est foncée lorsqu'on les tire de la fouille , mais ils prennent en séchant une belle couleur de bleu-céleste : en un mot , ils sont de vrai bleu de Prusse dont la Nature a fait tous les frais. Pour mieux s'assurer de la nature de cette substance bleue , M. Morand en a employé d'abord avec l'eau gommée , & elle a donné une couleur bleue-pâle & un peu tirant sur le vert : traitée avec l'huile , elle a donné un bleu plus foncé & qui s'est très-bien soutenu ; les acides minéraux , & même l'acide végétal , détruisent plus ou moins efficacement cette belle couleur , elle n'est pas même à l'abri de l'action de l'alkali fixe ; mais si les uns ou les autres de ces agens l'ont détruite , on peut faire reparoître la partie colorante dont ils sont chargés , en versant dans l'acide une solution d'alkali fixe , ou dans l'alkali fixe un acide délayé.

Ces grumeaux , dans leur état naturel , ne sont point attirables par l'aiman ; mais si on les expose au feu , ils perdent leur couleur , prennent celle d'une ocre rouge ; & si on mêle cette ocre avec du charbon en poudre & du suif , le feu la convertit en une poudre noire dont une grande partie est attirable par l'aiman.

Il ne manque donc rien à cette substance pour être un véritable bleu de Prusse natif. Il seroit certainement curieux , mais il est en même temps bien difficile , d'imaginer les moyens que la Nature a employée pour suppléer aux opérations par lesquelles les Chimistes obtiennent , à l'aide du feu , cette substance dans leurs laboratoires.

**N**OUS renvoyons entièrement aux Mémoires :

Les Observations Botanico-Météorologiques , faites en V. les Mém. 1768 , au château de Denainvilliers , près Pithiviers en Gâtinois , p. 558.  
par M. du Hamel.

*Hist. 1769.*

D

CETTE année M. de la Faille , Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres , & de la Société d'Agriculture de la Rochelle , Membre des Académies Impériale & Royale d'Augsbourg & de Lunebourg , de la Société Économique de Berne , & Correspondant de l'Académie , lui envoya un ouvrage intitulé : *Essai sur l'Histoire Naturelle de la Taupe & sur les différens moyens qu'on peut employer pour la détruire.*

La taupe est peut-être , malgré sa petitesse , un des animaux des plus nuisibles ; son dégât est extrême dans les prairies , & sur-tout dans celles qui sont les plus fraîches & les meilleures. Pour attraper les vers de terre , qui sont sa nourriture , elle creuse des rameaux de mine multipliés & détruit toutes les racines qui s'opposent à son passage ; on prétend même qu'il y en a quelques-unes qu'elle recherche pour elles-mêmes & dont elle se nourrit. Ces raisons ont déterminé M. de la Faille à en faire l'objet de ses observations & de ses recherches.

Il y a plusieurs espèces de cet animal , les unes plus grosses , les autres plus petites que la taupe vulgaire , mais qui , pour la plupart , n'en diffèrent que par la variété des couleurs de leur poil ; il y en a cependant une plus singulière en Canada , qui est caractérisée par des différences bien plus marquées. M. de la Faille ne laisse ignorer à son lecteur , aucunes de ces variétés singulières dont il donne toute l'histoire avant que d'en venir à la taupe vulgaire , principal objet de son travail : On a su presque de tout temps , & la taupe ne l'a que trop fait voir , que cet animal creuse continuellement sous terre & assez près de la superficie du terrain , une infinité de boyaux ou galeries de mines dont il rejette la terre d'espace en espace & en forme des montes plus ou moins grosses , qu'on nomme des *taupinières* , ces galeries lui servent à chercher les vers & autres insectes souterrains dont il se nourrit , & à se mettre à l'abri du vent qu'il craint & de la lumière qui l'incommode ; car , malgré tout ce qu'on a pu dire de son aveuglement , il est certain que la taupe a des yeux , mais très-petits , & il est à présumer qu'étant destinée à vivre sous terre , les yeux ont été

disposés pour être sensibles à la foible lumière qu'elle peut y trouver & sont désagréablement affectés du grand jour.

Ces rameaux que creuse la taupe, suffisent pour lui procurer la nourriture qu'elle cherche, mais ils ne suffiroient pas pour la loger dans les temps où elle vaque à la propagation de son espèce & à l'éducation de ses petits ; comme elle a besoin pour cela d'être à l'abri des eaux, elle choisit quelque berge un peu élevée ; ou, à ce défaut, elle fait élever le terrain du pré le plus humide & y bâtit une maison solide, couverte de la même matière, ressemblante à une très-grosse taupinière, dans laquelle elle a suffisamment d'espace pour se loger avec toute sa famille ; & pour y être en sûreté, elle ménage toujours plusieurs galeries qui y aboutissent. La description de ces singuliers logemens n'est pas un endroit des moins intéressans du livre de M. de la Faille.

Quoique toutes les fouilles de la taupe n'aient pour but que la recherche des vers, elles ne nous sont pas moins nuisibles ; ces routes multipliées coupent & détruisent toutes les racines des plantes & les font périr : on doit donc regarder cet animal comme un ennemi, & faire tous les efforts pour s'en délivrer.

On auroit peut-être de la peine à imaginer combien de secrets & de recettes ont été proposées pour détruire les taupes ou pour les éloigner, M. de la Faille en a essayé la plus grande partie, mais presque toujours inutilement, & il leur préfère les pièges qui servent à les tuer ou à les prendre en vie ; il en donne la description, mais il s'attache sur-tout à celui qu'on nomme *taupière* ; & qui réussit presque toujours quand il est bien fait & qu'on sait l'employer.

Cet instrument consiste en un tuyau de bois, long d'environ neuf à dix pouces, cylindrique & d'environ 18 lignes de diamètre intérieur ; ce tuyau porte à l'un de ses bouts une espèce de soupape qui cède aisément au moindre effort de l'animal, & retombant ensuite par son propre poids dès qu'il est passé, lui interdit le retour ; l'autre bout est fermé, ou par un bouchon, ou par un grillage : ce piège se met dans l'un des boyaux nouvellement creusé par la taupe ; l'animal inquieté par l'air frais qui entre par l'extrémité grillée de ce piège, vient pour réparer le dommage



fait à sa demeure, & se précipite lui-même dans la prison qu'il l'attend.

Ce piège manque rarement son effet lorsqu'il est bien fait & bien placé; mais faute de ces deux conditions, il demeure inutile: voici les réflexions que M. de la Faille a tirées de sa propre expérience & des conférences qu'il a eues avec les meilleurs Taupiers.

Puisque la taupe n'est déterminée à entrer dans la taupière que par l'envie de fermer le chemin à l'air froid qui entre par-là dans son souterrain, on doit en mesurer si bien la grosseur, qu'il fasse pour ainsi dire une continuité de tuyau avec le boyau creusé par l'animal, sans quoi il s'apercevrait bientôt que cette portion de la galerie n'est pas de son ouvrage, & il reculeroit au lieu d'avancer; c'est pourquoi M. de la Faille fixe le diamètre intérieur de la taupière à 18 lignes, parce que ses expériences lui ont appris que c'étoit presque invariablement le diamètre des boyaux creusés par les taupes.

Par la même raison, on doit éviter de les percer avec une tarière qui soit ébréchée, ces brèches feroient nécessairement des circonférences en relief dans le creux du tuyau, qui avertiroient infailliblement la taupe du piège & l'empêcheroient de s'y enfoncer. Il en est de même de la porte qu'elle doit soulever, elle peut être mise en garde par cet obstacle qu'elle n'a pas mis en son chemin, & qui même, lorsqu'elle l'a soulevée, la gêne par une saillie incommode.

Il ne faut pas moins observer de précaution pour placer le piège; il doit paroître à la taupe une continuation de sa galerie, une direction trop différente lui feroit bientôt reconnoître la supercherie, & elle ne manqueroit pas de s'en éloigner.

Pour remédier à ces inconvéniens, M. de la Faille prescrit; comme nous l'avons dit, les dimensions de la machine, il adopte la méthode usitée dans quelques Provinces, de noyer la porte ou soupape dans le dessus du cylindre & de l'y tenir relevée & cachée, au moyen d'une espèce de verrou long qui la retient dans cette situation & qui porte à son autre extrémité une plaque qui bouche une partie du tuyau; l'animal ne trouvant alors aucun obstacle, entre dans la taupière sans défiance; & il n'a pas plutôt

légèrement touché la plaque en question , que le verrou abandonne la porte qui , retombant par son propre poids derrière la taupe , l'enferme absolument dans la taupière.

Comme on pourroit trouver quelque difficulté à creuser la place de la porte & du verrou , & à placer toutes ces pièces dans l'intérieur du tuyau , M. de la Faille propose de le faire de deux pièces , ce qui donne le moyen de faire cette opération avec la plus grande facilité ; & les deux demi-cylindres réunis & retenus par quelques cercles ou quelques liens , remettent la taupière en état de servir.

Mais une attention essentielle est de passer à la flamme l'intérieur de la taupière avant que de la remettre en place , si une taupe a péri dedans , ce qui arrive quand on n'est pas exact à les aller visiter ; l'animal instruit , par l'odeur qu'y a laissé le cadavre de son semblable , du danger qui le menace , s'en éloigneroit infailliblement & rendroit par-là le piège inutile.

Nous ne pouvons entrer ici dans tout le détail des précautions que prescrit M. de la Faille pour réussir dans cette utile chasse ; mais en les observant avec attention , on ne pourra s'empêcher d'être étonné du nombre de ces animaux qu'on peut détruire par ce moyen : un seul Taupier des environs de la Rochelle en avoit pris au printemps de 1765 , quatre cents treize dans l'espace d'environ neuf arpens.

L'ouvrage de M. de la Faille est donc également intéressant , & pour la curiosité des Physiciens , auxquels il offre l'histoire naturelle intéressante & les variétés d'un animal jusqu'ici médiocrement connu , & pour l'utilité des cultivateurs auxquels il donne les moyens , sinon d'arrêter les ravages d'un ennemi très-dangereux , au moins de les diminuer beaucoup.

---

CETTE année M. de Fallois , Major du corps des Ingénieurs , Instituteur dans les Mathématiques & l'Art militaire de S. A. S. Électorale de Saxe , Membre de l'Académie des Arcades & de la Société Électorale d'agriculture de Leipzig , présenta à l'Académie un ouvrage intitulé *l'École de la fortification , &c.*

A ne considérer que superficiellement la manière de fortifier des Anciens, leur manière d'attaquer & de défendre les places, il semble qu'il n'y ait sur ce point rien de commun entre eux & nous; cependant, malgré l'énorme changement qu'a dû produire dans cet art l'invention de la poudre & le changement des armes, on est étonné de retrouver dans ces méthodes si différentes, les mêmes principes & presque les mêmes maximes. C'est par ce parallèle que M. de Fallois commence son ouvrage.

Les premières fortifications ont été des murailles dont on entourait les habitations, & du haut desquelles on lançait des traits sur l'ennemi qui oloit s'en approcher. Bientôt on s'aperçut que la nuit pouvoit favoriser les approches, & que l'ennemi, une fois au pied du mur, étoit à l'abri de la plus grande partie des traits de l'assiégé & pouvoit sapper le mur, & le faire écrouler, sans courir presque aucun risque.

Pour remédier à cet inconvénient, on fit au haut du mur une saillie qui avoit des ouvertures en dessous, par lesquelles on jetoit des pierres, des traits, &c. dont on l'accabloit.

Cette défense fit imaginer une nouvelle manière d'attaquer. L'assiégeant se couvrit de larges boucliers, mis l'un sur l'autre comme les tuiles d'un toit, il construisit des galeries qui le mirent à l'abri, & on reconnut bientôt que ce n'étoit pas assez que de voir le pied du mur de haut en bas, mais qu'il falloit encore le voir de côté & s'il se pouvoit de revers, & c'est à quoi l'on parvint par les tours saillantes rondes & carrées qu'on joignit au mur.

Ces tours, & sur-tout les carrées, avoient toujours un côté parallèle à la place que l'ennemi pouvoit attaquer sans être vu d'aucun endroit; pour obvier à cet inconvénient, on tourna les tours de manière qu'elles se présentassent par un de leurs angles, & pour lors il n'y eut aucun point sur toute la surface extérieure de la tour où l'ennemi pût paroître sans être exposé aux traits de la place, & voilà l'angle flanqué & les faces des bastions d'aujourd'hui.

Ces tours incommodoient l'assiégeant, celui-ci trouva moyen de les faire abandonner en construisant de grandes tours de bois

mobiles sur des roûtes plus hautes que les tours des villes; du haut desquelles on perçoit, à coups de dards & de flèches, ceux qui défendoient la place, & par le moyen desquelles, & des espèces de ponts qui s'en détachoiént lorsqu'on les avoit assez approchées de la place, l'assiégeant pouvoit passer sur le rempart.

Pour rendre ces tours inutiles, on entoura les places d'un large fossé qu'on tâcha de remplir d'eau; pour lors les tours mobiles ne purent plus approcher des places, & il fallut combler ou saigner le fossé, pour pouvoir être à portée de battre la muraille.

Ce fut ce qui donna lieu aux tranchées; on les fit d'abord en ligne droite, & pour se couvrir des traits de la place, on les couvroit avec des pièces de bois; mais les pierres lancées par les machines rendant ce blindage inutile, on imagina les tranchées en zig-zag, telles que nous les avons aujourd'hui, & on se contenta de couvrir la tête des sapes de pièces de bois assez fortes pour résister aux pierres: qui ne reconnoît, dans cette attaque les mêmes principes que ceux qui sont encore en usage aujourd'hui.

Quelquefois on entouroit une place d'une seconde & d'une troisième enceinte, c'étoit autant de sièges qu'il falloit faire l'un après l'autre; il est aisé de voir que ces doubles & triples enceintes tenoient lieu des dehors ajoutés à nos places, seulement elles étoient beaucoup moins utiles, parce que l'ennemi une fois entré dans une de ces enceintes, étoit maître de tout le tour & d'attaquer celle qui suivoit par où il vouloit; au lieu que nos dehors étant séparés, l'ennemi qui s'est emparé d'une pièce, n'est maître que de celle-là seule, & ne peut attaquer celle qui suit que par l'endroit que celle qu'il a pris, couvroit.

L'invention de la poudre fit une révolution étonnante dans l'attaque & dans la défense des places, mais elle laissa subsister presque tous les principes de cet art. Le canon substitué au bélier & aux catapultes, fit disparoître les hautes tours qui donnoient trop de prise à son action; mais on en retint la base qui fut convertie en bastions, on éloigna les pièces les unes des autres, parce que la portée de ces nouvelles armes étoit plus grande; on terrassa les murailles pour les mettre à portée de résister au canon; on imagina les dehors pour tenir lieu des doubles enceintes; en

un mot, tout l'art changea, mais les maximes fondamentales ne changèrent pas.

Ce sont ces maximes que M. de Fallois a soigneusement rassemblées, qui forment la première partie de ses recherches sur la Fortification proprement dite, ce qui a précédé n'étant, pour ainsi dire, que l'histoire de la marche de l'esprit humain sur cette matière, nécessaire pour les découvrir.

M. de Fallois commence son ouvrage par les définitions des parties qui composent la Fortification actuelle; après ce préliminaire, il applique les maximes qu'il a énoncées à chaque partie, tant pour la bien construire en particulier que pour la disposer relativement aux autres, de manière qu'elle puisse les défendre, & en être défendue, il ajoute la manière de les tracer sur le papier & sur le terrain & de les construire, eu égard à la poussée des différentes espèces de terres, à la force des revêtemens & aux différentes circonstances locales qui peuvent les faire varier.

De-là il passe à l'examen, toujours fondé sur les mêmes principes, des trois systèmes de Fortification de M. de Vauban, & fait voir les améliorations desquelles le troisième peut être susceptible; il examine de même un des systèmes de M. de Cohorn relativement à l'attaque & à la défense des places, usitées aujourd'hui, & un système de Fortification, proposé par un auteur anonyme; & enfin il donne la manière de fortifier tous les polygones tant réguliers qu'irréguliers. Nous passons légèrement sur tous ces articles dont la plupart sont tirés des meilleurs auteurs & rassemblés avec le choix le plus éclairé; mais ce que nous ne pouvons nous dispenser de présenter avec un peu plus de détail, c'est l'idée que propose M. de Fallois, relativement aux dehors, ou ouvrages extérieurs, & qui semble mériter une attention toute particulière.

C'est un usage constant, & qui est même regardé comme une règle parmi les Ingénieurs, que le corps de la place doit dominer tous les dehors, & que ceux-ci doivent être commandés les uns par les autres, de manière que les plus éloignés du corps de la place soient toujours les plus bas; on prétend qu'il résulte de cette disposition, un avantage considérable, qui est d'écarter plus efficacement l'assiégeant par un feu en amphithéâtre; mais, selon  
M.



M. de Fallois, cet avantage n'est qu'apparent; si les ouvrages dominent beaucoup les uns sur les autres, ils sont en prise à l'ennemi qui en a bientôt éteint le feu avec ses batteries; & s'ils dominent peu, la place ne peut se servir de son canon sans risquer de tuer son propre monde.

Pour obvier à cet inconvénient, M. de Fallois propose de substituer au glacis & au chemin couvert, des ouvrages aussi élevés que le corps de la place; par-là il met l'assiégeant dans l'impossibilité de ruiner les défenses par le ricochet & dans l'incertitude de ce qu'il trouvera derrière la partie qu'il attaque. Ces ouvrages sont en terre, revêtus de gazons, leurs fossés ont sept à huit toises, & au milieu du fond de ces fossés, est placée une palissade: ces ouvrages sont détachés les uns des autres, & s'entrelacent de façon qu'ils peuvent se défendre de front & de revers; on y peut établir des batteries contre la tête de la tranchée, c'est-là même qu'il place la plus grosse artillerie pour éloigner davantage les approches, réservant la moindre pour le corps de la place qui, dans cette construction, n'a jamais à tirer que de près: ces batteries sont à l'abri du ricochet, par le peu d'étendue des faces de ces ouvrages, qui sont petites & sans traverses; & pour faciliter les sorties, il y a entre ces ouvrages des ouvertures fermées de barrières à couvert du canon de l'ennemi, & défendu par les ouvrages voisins: aux angles saillans & rentrans, sont de grandes places d'armes, dont la retraite est couverte par des lunettes construites aux angles rentrans de la contrescarpe, qui protègent de leurs feux les ouvrages qu'elles ont devant elles. M. de Fallois nomme l'ensemble de tous ces ouvrages, *la Crémaillère*.

Comme il n'a pu se dissimuler combien il seroit exposé à perdre l'artillerie qu'il place dans la crémaillère, il ménage des ponts, ou plutôt des bâtardeaux, au travers des fossés des lunettes dont nous venons de parler placées à l'épaule de la contregarde des bastions, & coulant sur la contrescarpe du fossé du corps de la place qui tient lieu de chemin couvert; il passe le long de cette contrescarpe, de-là par un pont, il passe le fossé qui doit être plein d'eau, & enfin par une poterne dans le corps de la place: cette eau des fossés peut tomber aussi dans les fossés des ouvrages

avancés, quand le besoin le demande, par des écluses pratiquées dans les bâtardeaux dont nous venons de parler.

De tout ce que nous venons de dire, il est facile de conclure que la plus grande partie de l'ouvrage de M. de Fallois contient beaucoup de choses déjà connues, mais rangées de manière à être facilement enseignées aux jeunes Militaires; ce qui paroît avoir été le but de l'Auteur, qui parle par-tout en homme qui a joint à la spéculation l'expérience de plusieurs sièges, dont il tâche de faire profiter son lecteur. Ce qui est plus particulièrement à lui, est la suppression du chemin couvert & la construction des ouvrages en crémaillère qu'il y substitue. Les avantages de cette nouvelle fortification se présentent d'eux-mêmes; on a craint seulement que les communications qu'elle laisse ne pussent donner, à un ennemi vigilant & actif, le moyen de forcer les barrières & de s'emparer de ces ouvrages avancés; mais nul système de fortification ne peut mettre une place à l'abri des entreprises d'un tel ennemi, sans la vigilance du chef, & sans la bravoure de la garnison; & c'est ce qui rend comme impossible la comparaison des systèmes de fortification.

On a vu, du temps de la Ligue, la place de Quillebeuf, dont les fortifications n'étoient qu'à peine tracées, défendue pendant seize ou dix-sept jours par le grand Écuyer de Bellegarde, contre l'armée de l'Amiral de Villars; & nous avons vu, de nos jours, Berg-op-zoom, place qu'on pouvoit regarder comme imprenable, si cependant il y en avoit de cette espèce, emportée presque en aussi peu de temps par M. le Maréchal de Lowendal. Il n'est donc pas possible de prononcer, d'après l'expérience même, sur cette matière; mais à en juger selon les règles de la théorie, la construction des crémaillères paroît offrir des avantages considérables. On ne peut d'ailleurs savoir trop de gré à M. de Fallois du travail avec lequel il a réduit, dans un Ouvrage de médiocre volume, tous les principes essentiels de la fortification, nécessaires à ceux qui se destinent au génie, & de la clarté avec laquelle il a trouvé moyen de les présenter.





## ANATOMIE.

*SUR LA STRUCTURE ET SUR LES USAGES  
DE L'OURAQUE DANS L'HOMME.*

IL n'est peut-être aucune partie du corps animal sur la structure & sur les usages, de laquelle les Anatomistes aient autant varié que sur celle qui fait l'objet de cet article : on sait que l'Ouraque est une partie ayant à peu près, sur-tout dans le fœtus, la figure d'une chausse d'hypocras extrêmement allongée, dont la base tient au fond de la vessie, & la pointe à l'ombilic. V. les Mémoires p. 287.

Mais comment est composée cette partie, & quel peut être l'usage auquel elle est destinée? C'est sur ces deux points que les Anatomistes se partagent; les uns ont regardé l'ouraque comme un vrai ligament, & les autres en ont fait un canal de communication entre la vessie & la membrane allantoïde: feu M. Hales ne pouvant découvrir de canal dans l'intérieur de l'ouraque, avoit imaginé qu'elle étoit composée d'un tissu spongieux, qui absorboit, pour ainsi dire, l'urine de la vessie, & l'alloit porter dans l'allantoïde; mais, indépendamment de ce que l'Anatomie ne fait rien remarquer de semblable dans cette partie, cette explication ne peut avoir aucun lieu dans le fœtus humain qui, comme on sait, n'a point d'allantoïde.

Cette diversité d'opinions a pour origine le peu de soin que les Observateurs ont eu de consulter la Nature; elle seule peut donner la solution de cette question, & c'est aussi la voie que M. Portal a cru devoir prendre, & qui lui a effectivement procuré des connoissances plus claires & plus certaines.

L'ouraque est, conformément à ce qu'en dit M. Senac, dans ses Essais de Physique, composée de quatre filets exactement réunis, depuis l'ombilic jusqu'à très-peu de distance de la vessie; là ils se séparent l'un de l'autre, & forment, par cet écartement,

une espèce de patte-d'oie, dont les filets se distribuent sur la vessie: deux de ces filets embrassent les côtés de ce viscère; un occupe la partie antérieure, & un autre la partie postérieure; ils s'unissent avec les fibres de la tunique musculieuse de la vessie, mais sans contracter avec elles une adhérence qui empêche absolument de les séparer, de les suivre & de réduire, pour ainsi dire, l'ouraque en ses propres élémens, pourvu cependant que le sujet soit très-jeune; car dans un fœtus qui a seulement trois mois, ils deviennent très-difficiles à séparer; & dans l'adulte cette séparation seroit impossible. Ces filets, dont nous venons de parler, sont revêtus, d'un bout à l'autre, par une prolongation du tissu cellulaire qui les enveloppe sans les serrer, & leur forme une enveloppe que M. Portal nomme *tunique vaginale*.

Quelques recherches qu'ait pu faire M. Portal, il n'a jamais pu apercevoir de cavité dans ces filets, ni que leur réunion en formât une: à mesure que le sujet avance en âge, les filets se réunissent plus exactement, & le volume de l'ouraque diminue, & quelquefois cette diminution va jusqu'à l'entier anéantissement de cette partie.

De tout ce que nous venons de dire, il suit que l'ouraque est véritablement un ligament, qu'il est destiné dans le fœtus à des usages particuliers qui cessent après la naissance de l'enfant: essayons de les déterminer.

La position de la vessie n'est nullement la même avant & après la naissance: avant que le fœtus soit né, elle est suspendue beaucoup au-dessus du bassin, qui n'a pas alors pris tout son accroissement, & il semble que l'Auteur de la Nature ait eu en vue de diminuer le volume du fœtus, & de rendre l'accouchement plus facile; or, pour assujettir ainsi la vessie hors & au-dessus du bassin, & cependant l'empêcher de balloter, il falloit qu'elle fût suspendue & fixée; & c'est vraisemblablement l'usage de l'ouraque qui remplit parfaitement ces vues; mais dès que l'enfant est né, l'agrandissement du bassin, le poids de la vessie qui s'emplit d'urine, & celui des intestins, sollicitent puissamment la vessie à descendre; ce qui ne se peut faire sans distendre l'ouraque, & sans en rapprocher les filamens qui s'unissent alors

au point de ne pouvoir plus se séparer; la tunique qui l'enveloppe s'y colle davantage & en fait une espèce de ligament qui même s'oblitére quelquefois entièrement chez les vieillards.

Mais comment, dans cette hypothèse, expliquer les écoulemens d'urine qui se font quelquefois par le nombril, & desquels on a plusieurs exemples? La structure de la vessie donne, selon M. Portal, la solution de cette difficulté.

Ce viscère est composé de deux parties, l'une membraneuse & continue, destinée à recevoir & à conserver l'urine, & l'autre qui recouvre celle-ci, composée de fibres musculaires destinées à comprimer, par leur action, la membrane interne qu'elles enveloppent, & à la forcer de chasser l'urine.

Cette partie musculaire n'est pas continue comme l'autre, les trousseaux de fibres forment plutôt une espèce de réseau qu'un corps uniforme, au moins y a-t-il des endroits qui en sont presque entièrement dénués; il doit donc arriver, & il n'arrive en effet que trop souvent, que si par quelque accident la vessie se trouve trop gonflée, la membrane interne se fasse jour par quelque une des mailles de la tunique musculaire, & forme une hernie de la membrane interne. On a vu quelquefois près de la moitié de la membrane interne passer au travers de la tunique musculaire, & former l'apparence d'une vessie double; or, si cette hernie se fait du côté de la base de la vessie, où effectivement les trousseaux de fibres musculaires sont les plus écartées les unes des autres, il peut arriver qu'elle se prolonge dans la gaine qui enveloppe les fibres de l'ouraque; & alors ou la membrane interne s'étendra jusqu'à l'ombilic, & y formera un conduit urinaire; ou si elle crève avant que d'y être parvenue, la gaine de l'ouraque y suppléera, & dans l'un & l'autre cas le malade rendra ses urines, en tout ou en partie, par le nombril; M. Portal a vu de ces hernies de l'une & de l'autre espèce.

Il n'est donc pas nécessaire que l'ouraque soit essentiellement un canal, pour qu'il puisse arriver des écoulemens d'urine par le nombril; & ce fait ne détruit en aucune manière le sentiment de ceux qui la regardent comme un vrai ligament. Combien de précautions à prendre, dans l'étude de l'Anatomie, pour n'être



pas séduit par les apparences qui semblent les plus fortes & les plus décisives ?

## *SUR L'ACTION DU POUMON.*

### *SUR L'AORTE*

### *PENDANT LA RESPIRATION.*

V. les Mém.  
p. 549.

ON n'auroit pas lieu d'être surpris de trouver de l'incertitude sur la position, la structure & l'usage de quelques organes petits & cachés du corps animal ; mais il est singulier qu'il puisse s'en trouver sur la structure de parties très-apparentes, & qui n'ont pu manquer de s'offrir aux regards des Anatomistes, dans toutes les dissections qu'ils ont faites.

De ce nombre sont certainement les bronches, ces rameaux de la trachée-artère, destinés à porter l'air de la respiration dans le poumon. M. Portal a été surpris des différences qui se trouvent dans les descriptions que les Anatomistes font de ces parties, leur structure & leur position dans le corps animal ; quelquefois même ils ne s'accordoient pas avec leurs propres figures, & il sembloit que le Peintre eût dessiné plus fidèlement que l'Anatomiste n'avoit décrit.

Pour savoir ce qu'il y avoit de bon sur ce point dans les différens ouvrages des Anatomistes, il résolut de ne s'en rapporter qu'à l'inspection des pièces mêmes, & de consulter, par de nombreuses dissections, le grand livre de la Nature, & non-seulement il y a trouvé le moyen de dissiper toutes les incertitudes, mais encore il a recueilli quelques faits importants, qui avoient échappé jusque-là aux Observateurs, ou du moins n'en avoient été vus que très-imparfaitement : voici, en abrégé, le résultat de ses observations.

\* *βρόγχος*  
*guttur.*

La trachée-artère, parvenue entre la seconde & la troisième vertèbre du dos, se divise en deux branches, que les Anatomistes nomment *bronches* \*, & qui diffèrent entr'elles par leur grosseur, leur longueur & leur direction ; la bronche droite est d'un quart plus grosse que la gauche, & celle-ci d'un cinquième

plus longue que la droite, & en même temps plus inclinée & plus postérieure.

La direction de ces canaux n'est pas la même dans les différens âges : la bronche gauche est dans le fœtus qui n'a pas respiré plus inclinée & plus en arrière que dans l'enfant venu au jour, & la bronche droite dans l'enfant venu à terme est un peu plus élevée qu'elle ne l'étoit avant la naissance de l'enfant.

Cette description est exactement conforme à ce que l'observation a offert à M. Portal, elle a fixé ses idées, & l'a mis à portée de reconnoître ce qu'il y avoit d'exact dans les descriptions & dans les planches des différens Anatomistes : poursuivons ce que ces observations lui ont fait remarquer sur la structure de ces canaux aériens.

Les premières divisions des bronches ont, comme la trachée-artère, des anneaux cartilagineux ; mais ils sont entiers & non pas interrompus comme ceux de la trachée-artère. Ces anneaux sont retenus en leur place par un ligament très-élastique d'un blanc un peu rougeâtre, que quelques Anatomistes, au nombre desquels on compte M. Haller, ont regardé comme musculaire ; ce ligament est composé de deux plans de fibres, & Bartholin croit que le plan intérieur est une prolongation de la membrane qui tapisse la bouche, & l'extérieur une production de la plèvre.

L'examen anatomique n'a rien offert à M. Portal qui pût appuyer ces sentimens, la simple macération suffit pour séparer ce ligament des cartilages, & il n'y a rien reconnu qui pût servir à justifier l'origine qu'on lui donne, ni à le faire reconnoître pour musculéux.

L'intérieur des bronches est tapissé d'une membrane qui forme plusieurs replis longitudinaux, parallèles entr'eux ; mais outre ces replis, il s'en trouve encore un autre dans le point où la trachée-artère fournit la bronche gauche : celui-ci est formé en partie par la membrane & en partie par le premier cartilage de la bronche qui est poussé dans l'intérieur du canal ; & cette espèce de saillie dépendant de l'inclinaison de la bronche, varie dans les différens âges de la vie ; elle fait en cet endroit l'effet des éperons d'un pont.

Jusque-là les recherches de M. Portal n'ont servi qu'à lever les doutes que les descriptions des Anatomistes avoient jetés sur cette partie; voici présentement quelque chose de plus intéressant & qui lui appartient en propre.

La bronche droite flotte librement dans la poitrine, rien ne s'oppose aux différens mouvemens que peut lui imprimer l'air ou l'abaissement des côtes; elle s'élève lorsque le lobe du poumon qui lui répond s'enfle, & s'abaisse aussi facilement lorsqu'il s'affaisse.

Mais il n'en est pas de même de la bronche gauche, l'aorte l'embrasse exactement; d'où il suit qu'elle ne peut s'élever sans gêner le cours du sang dans cette artère principale; cette connexion de la bronche & de l'artère-aorte a été connue de quelques Physiologistes, mais personne ne s'étoit avisé de penser que cette jonction mettoit ces deux parties dans le cas d'agir nécessairement l'une sur l'autre.

En effet, il est évident que l'aorte ne peut dans cette construction, augmenter son volume sans comprimer la bronche gauche & sans gêner le passage de l'air qui va dans le lobe gauche du poumon: aussi M. Portal a-t-il trouvé dans le cadavre d'un homme dont la respiration étoit très-gênée, qu'il y avoit un anévrysme à la crosse de l'aorte, que la bronche gauche étoit comprimée par l'artère, & que la capacité étoit extrêmement diminuée.

D'un autre côté, la bronche gauche dilatée ou relevée par l'air; peut, en pressant l'aorte, gêner prodigieusement le cours du sang; donner lieu à des palpitations violentes & occasionner un nombre infini de maladies qui étoient d'autant plus difficiles à guérir, qu'on n'en soupçonnoit pas même la cause.

Il est donc d'une extrême importance de bien établir ce nouveau principe & d'en examiner attentivement les suites: suivons M. Portal dans cette discussion, l'aorte dans le fœtus qui n'a pas respiré est très-inclinée de devant en arrière & un peu sur le côté de la bronche gauche qui elle-même est plus en arrière à cet âge, qu'elle ne l'est dans l'enfant qui a respiré, parce que le thymus qui remplit une partie de la poitrine, la porte encore en arrière.

Mais lorsque l'air pénètre, après la naissance, dans l'intérieur du  
poumon

poumon gauche, la bronche s'élève & élève en même temps l'aorte qu'elle porte en avant, & ce changement de situation va toujours en augmentant à mesure que le thymus, en s'oblitérant, laisse la poitrine plus libre. Une multitude d'animaux disséqués tant avant que d'avoir respiré, qu'après avoir reçu l'air dans leurs poumons, ont constamment offert à M. Portal cette différence.

Il a fait plus, après avoir levé le sternum à un chien vivant; il a soufflé avec un tuyau de verre par une ouverture faite à la trachée-artère, & il a vu que toutes les fois que le poumon gauche se dilatoit, la bronche & l'aorte s'élevoient, & qu'au contraire ces deux canaux s'abaissoient quand il exprimoit l'air des poumons; expérience qui démontre bien jusqu'à quel point les maladies du cœur & des vaisseaux sanguins peuvent agir sur les poumons, & combien les vices de la respiration peuvent au contraire se faire sentir dans tout le système vasculaire dont ils attaquent le principe. Mais voici quelque chose de plus singulier.

Dans le thorax d'un petit chat, mort depuis peu, M. Portal aperçut que le poumon droit étoit d'un rouge pâle, & le poumon gauche d'un rouge obscur, il présuma que le poumon droit avoit reçu l'air, & que le gauche ne l'avoit pas admis; & en effet ces poumons ayant été jetés dans l'eau, le droit surnagea, & le gauche alla à fond; cette ouverture méritoit d'être suivie, & elle le fut. Les poumons de trois petits chiens qui avoient respiré, surnagèrent, ceux de plusieurs chats qui n'étoient pas venus à terme & ceux de trois petits chiens, tirés du ventre de leur mère, allèrent à fond, & M. Portal ayant soufflé dans le poumon droit d'un petit chien qui n'avoit pas respiré, ce poumon surnagea tandis que le gauche s'enfonça, & M. Portal ne put parvenir à faire enfoncer le premier, quoiqu'il eût fait son possible pour en exprimer entièrement l'air.

D'autres animaux, soumis aux expériences, confirmèrent les observations précédentes de M. Portal; mais il crut en devoir faire sur l'homme même. Il se procura un fœtus humain qui n'étoit pas venu à terme & qui, par conséquent, n'avoit pas respiré, & il trouva qu'en soufflant dans la trachée-artère, l'air gonflait le poumon droit plutôt que le gauche. Cette observation

s'est trouvée confirmée par une autre de feu M. Petit, qui dans l'examen d'un fœtus monstrueux trouva le poumon droit pâle & gonflé, & le gauche d'un rouge brun; preuve évidente que l'air avoit pénétré dans le poumon droit, sans avoir pénétré dans le gauche.

Tous ces faits rassemblés, prouvent donc que le fœtus une fois né reçoit d'abord l'air dans le poumon droit & ensuite dans le gauche, & que s'il meurt peu de minutes après sa naissance, l'un des poumons surnage l'eau dans laquelle on le jette, & l'autre s'enfonce dans cette même eau.

La description des parties que nous venons de donner, fait voir évidemment quelle est la cause de cette différence; la bronche droite n'offre aucune résistance à l'air, tandis que la gauche en offre beaucoup par sa situation, son embouchure oblique, son moindre calibre, & par la pression qu'elle éprouve de la part de l'aorte & du canal artériel: on tire de même, de l'arrangement de ces parties, la raison pour laquelle le canal artériel s'oblitére après la naissance, la bronche gauche en s'élevant éloigne l'aorte de l'artère pulmonaire; ce qui ne se peut faire sans que le canal artériel soit distendu & comprimé; mais M. Portal termine son Mémoire par une remarque bien importante. Puisque des deux poumons d'un même enfant, l'un peut surnager, tandis que l'autre s'enfonce dans l'eau; ceux qui sont, par état, obligés de faire des rapports en justice, ne peuvent y apporter trop d'attention, puisqu'en ne portant leur jugement que d'après une seule épreuve, ils courroient risque de tomber dans des méprises d'autant plus fâcheuses qu'elles intéresseroient presque toujours la vie & l'honneur des citoyens.

---

## OBSERVATIONS ANATOMIQUES;

### I.

**L**E célèbre M. Haller, & à son exemple plusieurs autres Anatomistes se sont beaucoup occupés, dans ces derniers temps, à rechercher si toutes les parties du corps animal sont

également douées de sensibilité, & à discerner celles qui ont cette qualité de celles qui en sont privées; mais malgré tous leurs efforts, on n'a pu encore parvenir à aucune connoissance certaine sur ce point: bien loin de-là, il semble résulter des expériences, que des parties qui, dans de certaines circonstances, avoient paru insensibles, avoient donné dans d'autres des marques de la plus grande sensibilité. Voici deux nouveaux faits qui semblent appuyer ce paradoxe anatomique, & qui ont été communiqués à l'Académie par M. Houffet, Médecin des hôpitaux d'Auxerre, Membre de la Société des Sciences & Belles-Lettres de la même ville, Correspondant de celle de Montpellier, & bien connu par ses travaux sur cette matière.

La première observation a eu pour sujet la sœur même de M. Houffet; elle mourut au vingt-unième jour d'une fièvre continue, accompagnée d'un flux dysentérique, ou plutôt d'une hémorrhagie; à l'ouverture du corps, on trouva la vésicule du fiel distendue par un nombre infini de pierres biliaires qui en remplissoient tellement la capacité, qu'elles en rendoient la surface comme raboteuse; cependant cette dame n'avoit ressenti antérieurement aucune douleur qui se pût rapporter à la vésicule du fiel, malgré la présence & la multitude de ces pierres anguleuses qui devoient la blesser.

La seconde observation a pour objet une pierre grosse comme une noix muscade trouvée dans la vésicule du fiel du corps d'une demoiselle, qui n'avoit de même ressenti, antérieurement à la maladie dont elle étoit morte, aucune douleur qu'on pût regarder comme occasionnée par la présence de cette pierre.

## I I.

M. Houttuyn, s'avant Médecin à Amsterdam & Correspondant de l'Académie, lui a communiqué l'Observation suivante: Un homme âgé de cinquante-huit ans, Médecin lui-même, ayant naturellement la vue bonne, mais un peu usée par le fréquent usage du microscope, fut surpris un matin, en sortant de son lit, de s'apercevoir qu'il ne voyoit presque plus de l'œil gauche, quoiqu'il n'y sentît aucune douleur: la faiblesse de cet



#### 44 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

\* *Amavoge*  
*obscurus.*

œil continua d'augmenter pendant un an ; enfin il cessa de faire aucune fonction sans qu'on y remarquât rien d'extraordinaire. On regarda cet accident comme une goutte sereine , ou comme un de ces obscurcissmens de la vue , sans cause apparente , qu'on nomme *amaurose* \*. Environ un an après , l'œil parut affecté d'une espèce de cataracte qui formoit une tache blanche & ronde dans la prunelle ; cette tache changea de couleur , au bout de trois mois elle devint jaunâtre , puis d'un bleu verdâtre ; en un mot , elle prit tous les caractères du glaucoma , & resta dans cet état pendant deux ans & demi , sans que le malade souffrît aucune douleur ; mais au bout de ce temps , étant vers la fin du mois de Juin dans son jardin , le dos tourné au soleil , & s'occupant à ramasser des oignons de jacinthe , il fut surpris d'une inflammation à l'œil malade ; il en guérit assez promptement , mais quelques jours après , il sentit tout-à-coup son œil s'enfler jusqu'au point de lui paroître de la grosseur d'un œuf de poule ; & cette enflure subite fut accompagnée d'une vive douleur ; quelques gouttes de liqueur qu'il sentit couler par le nez , l'engagèrent à se moucher , & l'effort qu'il fit à cette occasion lui occasionna dans la tête un bruit épouvantable qu'il compara au tonnerre , & la douleur devint extrême : il lui sortit , au même instant , par le grand angle de l'œil , un filet de sang qui coula le long du visage ; alors la douleur diminua & cessa entièrement au bout d'une demi-minute ; mais l'hémorrhagie subsista pendant deux heures , & il perdit environ cinq à six onces de sang. Le malade se mit ensuite au lit & dormit pendant environ deux heures : il guérit de cet accident en six semaines , par le régime & les remèdes ordinaires , mais l'œil s'est tout-à-fait consumé , & le malade peut porter actuellement un œil artificiel.

Le singulier assemblage de six maladies de l'œil , savoir , la goutte sereine , la cataracte , le glaucoma , l'ophtalmie , l'hémorrhagie & la consommation de l'œil a paru assez singulier à l'Académie , pour qu'elle ait cru devoir donner place à cette observation dans son Histoire.

## III.

Un ancien Officier d'Infanterie, retiré du service & Chevalier de Saint - Louis, fut mis au château de Saumur, à cause de quelques légères absences, auxquelles on s'aperçut qu'il devenoit sujet. La douceur & la noblesse de son caractère, soutenues de beaucoup de lecture, & d'une heureuse mémoire, le firent bientôt désirer dans les meilleures compagnies; le Gouverneur même du Château le jugea si peu dangereusement affecté, qu'il obtint pour lui la liberté de la ville: après avoir joui quelque temps de cette liberté, il apprit que sa famille ne payoit pas exactement la pension; l'honnêteté de son caractère en fut blessée, & sans faire attention à son état, il partit pour en aller accélérer le paiement: à son arrivée dans sa patrie, il fut arrêté & ramené au château, & on lui ôta une liberté dont il avoit abusé: cette clôture plus sévère augmenta son mal, & bientôt on ne put plus communiquer avec lui qu'en se prêtant à ses idées: il se croyoit tour à tour, Prince, premier Ministre, Maréchal de France, faisoit des projets, des traités, des déclarations de guerre; toutes les femmes qu'il voyoit étoient des princesses, & les moindres domestiques des grands seigneurs.

Dans cet état de délire assez complet, après avoir déjeuné à son ordinaire, le 25 Décembre, il se mit dans l'esprit de ne vouloir plus absolument manger, & fut en effet depuis ce jour jusqu'au 9 Février, c'est-à-dire, quarante-six jours complets sans prendre aucune nourriture, seulement le cinquième jour il demanda des liqueurs, & on lui donna un demi-setier d'huile d'anis qu'il but en trois jours; il en redemanda, & on lui en donna un second; mais sur l'avis qu'on lui donna d'en user plus sobrement, il n'en mettoit que trois gouttes dans chaque verre d'eau qu'il buvoit, & cette bouteille lui dura jusqu'au trente-neuvième jour; il buvoit à peu près autant qu'on en pouvoit juger, une pinte & demie d'eau par jour: le trente-neuvième jour il cessa de boire, & ne prit absolument rien jusqu'au quarante-septième.

Il s'étoit toujours levé jusqu'au trente-huitième jour, mais la foiblesse inséparable d'un jeûne si long & si sévère, l'obligea pour

lors de se coucher ; on peut bien croire qu'il n'alla à la selle que les premiers jours ; les urines coulèrent en médiocre quantité tant qu'il prit de la boisson , mais elles se supprimèrent entièrement dès qu'il cessa de boire : nous devons encore ajouter ici que cet homme, naturellement propre & sans mauvaise odeur , en exhala une infecte & cadavéreuse au commencement de son jeûne ; que vers les huit derniers jours , il se priva entièrement du tabac dont il prenoit près d'une once par jour , & que sa vue paroissoit sur la fin très-affoiblie.

Dès qu'on se fut aperçu de ce ridicule projet , on essaya tous les moyens possibles de déterminer le malade à prendre quelque nourriture , mais ce fut toujours inutilement ; ni les soins du Gouverneur , ni les attentions des Officiers , ni les pathétiques exhortations des Ecclésiastiques vertueux qu'on lui envoya , ne purent faire aucune impression sur son esprit ; on essaya même , dans les derniers jours , de lui donner de l'eau panée ou de l'eau de poulet , au lieu d'eau pure ; mais ce breuvage lui occasionna un vomissement , en sorte qu'on le regardoit comme perdu , lorsque la Nature obtint de lui ce que la raison avoit jusqu'alors inutilement demandé.

Le quarante-septième jour , voyant entrer chez lui une jeune fille qui tenoit un gros morceau de pain , sur lequel elle avoit étendu du fromage , il demanda vivement qu'on lui donnât une copieuse soupe ; on s'empressa de lui en donner une , mais très-légère ; & malgré l'envie qu'il témoignoit d'avoir du pain & d'autres alimens solides , on le tint quelque temps au régime de quelques soupes & de quelques cuillerées de crème de ris , de deux heures en deux heures : enfin on le remit peu-à-peu à la viande & aux alimens ordinaires ; les évacuations se rétablirent , & il revint quoique lentement , à son état de santé.

Jusqu'ici cette observation n'offre qu'une longue privation des alimens dont on a déjà plusieurs exemples ; mais voici quelque chose de plus singulier : dans les premiers jours qu'il commença à manger , la tête étoit fort saine , il n'étoit plus Prince , Ministre ni Général , il vouloit qu'on le nommât par son nom , & on espéroit que l'acte de folie qu'il avoit fait l'auroit rappelé à la raison ; mais cette espérance ne fut pas de longue durée , à mesure que

les forces revinrent, les disparates réparurent; & on craignoit fort qu'il ne retombât dans son premier état, au départ du Courier: qui apporta cette relation à M. le Duc de la Vrillière, qui l'a communiquée à l'Académie.

## I V.

L'Académie a déjà rapporté dans son Histoire, plusieurs observations qui prouvent que les mules ne sont pas aussi généralement privées de la fécondité, qu'on se l'étoit persuadé; voici un nouveau fait qu'on peut joindre aux précédens. Dans une habitation située à la Petite-Anse de Saint-Domingue & appartenante à M. de Nort, Chevalier de Saint-Louis & ancien Major de la Légion Royale de Saint-Domingue, il se trouva une mule malade qu'on amena à M. de Nort, qui étoit alors accompagné de plusieurs personnes; l'animal avoit le ventre gros, & il lui sortoit une espèce de boyau par la vulve: M. de Nort envoya aussitôt chercher un Nègre, qui passoit pour le plus habile maréchal de ce canton; celui-ci ne soupçonnant pas même la véritable maladie de la mule, la jeta à terre pour lui faire prendre un breuvage: cette chute la détermina à mettre bas, & il la délivra à l'instant d'un petit muleton vivant bien conformé & couvert d'un poil long & très-noir; la mule & le muleton moururent environ dans l'espace de dix heures; l'un & l'autre ayant été blessés par la chute que le Nègre avoit mal-à-propos fait faire à la mère; & celle-ci, en particulier, par le tiraillement & le renversement de la matrice, causés par la manière brusque avec laquelle elle avoit été délivrée. La relation de ce fait singulier a été envoyée par M. de Nort, revêtue de tous les témoignages & de toutes les formalités qui pouvoient la rendre authentique.

Cette relation rappela à quelques Académiciens, qu'ils avoient entendu parler de quelques faits semblables, arrivés au Royaume de Naples, & ç'en fut assez pour déterminer l'Académie à s'en informer au Père Della Torre son Correspondant: celui-ci s'adressa à Don Carlo de Marco, Secrétaire d'État, & au Prince de Francavilla, qui, tous deux, ont des haras où ils

#### 48. HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

font des élèves de chevaux & de mulets; voici le précis de la réponse.

Par le nom de mule ou de mulot, on entend à Naples l'animal produit par une ânesse & un cheval; ces animaux font les meilleurs de ce genre. L'animal que nous nommons en France mulot, & qui est le produit d'un âne & d'une jument, se nomme à Naples, *gazzino*, & on en fait beaucoup moins de cas, ces animaux étant généralement pleins de défauts.

Les mulets mâles font toujours inféconds, & il n'y a pas d'exemple à Naples qu'ils aient jamais produit; à l'égard des mules femelles, elles ont quelquefois produit un mulot, étant couvertes par un cheval: ces exemples font rares; cependant le P. la Torre en a vu un arrivé du règne de Don Carlos, à présent Roi d'Espagne, lorsqu'il étoit Roi de Naples, & le Prince de Francavilla & Don Carlo de Marco, ont assuré avoir été témoins de quelques faits semblables dans leurs haras.

Ce que nous venons de dire, d'après le P. de la Torre, ne diminue au reste en rien la singularité de l'observation de M. de Nort; le P. la Torre ne parle que de l'animal né du commerce d'une ânesse & d'un cheval, & la mule de M. de Nort étoit née de celui d'un âne & d'une jument; mais il paroît résulter de tout ce que l'Académie a vu sur cette matière, que les mâles de l'une & de l'autre espèce font constamment inféconds, mais que les femelles peuvent, dans quelques circonstances rares & jusqu'à présent inconnues, devenir fécondes.

L'ÉVÈNEMENT qui a donné lieu à l'article suivant, a eu son entier accomplissement dès l'année 1767, & nous nous hâtons de réparer cette espèce d'omission.

Dès l'année 1757, M. Razoux, Docteur en Médecine de la Faculté de Montpellier, Médecin de l'Hôtel-Dieu de Nîmes & Correspondant de l'Académie, lui communiqua l'essai d'une espèce de Journal des différentes températures de l'air à Nîmes, & des maladies qui régnoient alors dans le même canton; il est aisé de voir quel jour ces observations rapprochées peuvent jeter dans

dans la pratique de la Médecine, sur une infinité de phénomènes, qui ne peuvent être expliqués que par ce moyen. Ces observations étoient réduites, pour ainsi dire, au moindre terme, par l'adresse avec laquelle M. Razoux avoit su les rassembler dans des espèces de Tables qu'il nommoit *Nosologiques* \*. Ce même travail fut continué par M. Razoux les années suivantes, & l'Académie jugea qu'il étoit assez utile pour mériter qu'elle en publiât un Essai de quelques mois dans le volume des Savans étrangers; le temps nécessaire à l'impression de ce volume a permis à M. Razoux d'en former un corps d'ouvrage à part, qu'il a fait imprimer, & qu'il a dédié à l'Académie en 1767.

\* *Nôses, morbus.*

M. Razoux commence son Ouvrage par l'exposition du but qu'il s'étoit proposé, dont il présente les avantages dans une Préface qui sert comme d'introduction; il y détaille, avec la plus grande exactitude, la méthode qu'il emploie pour construire ses Tables, & rapporte des passages nombreux, par lesquels il prouve que les plus sçavans Médecins qui l'avoient précédé desiroient un pareil Ouvrage, & des lettres qui font voir que ceux de ses contemporains qui ont eu connoissance de son dessein, n'ont cessé de l'exhorter à se livrer à ce travail.

Cette Préface est suivie d'un Discours préliminaire, dans lequel M. Razoux commence à entrer en matière. Comme un des principaux objets qu'il s'est proposé dans cet Ouvrage, est de présenter le tableau des variétés que les différentes températures de l'air ont pu introduire à Nîmes dans les maladies; il commence par une description exacte de la situation de la ville de Nîmes & de son territoire, situation qui doit nécessairement influer sur les vents qu'on y éprouve, sur le plus ou moins d'humidité, & sur le plus ou moins de pureté de l'air; la nourriture dans les différens états de la vie, la manière de vivre, les productions du terrain, les animaux; en un mot, tout ce qui peut influer sur l'état de la santé des habitans y est sçavamment discuté; il n'épargne pas même les superfluités agréables, lorsqu'elles peuvent porter atteinte à cet important objet; mais en récompense il recommande l'usage des bains, & desiré beaucoup d'en

Hist. 1769.

G



voir établir de publics ; il appuie même cet article de plusieurs observations qui en font voir l'avantage.

Comme il y a quelques remèdes usités dans l'Hôtel-Dieu de Nîmes, qui pourroient n'être pas si bien connus ailleurs, M. Razoux n'oublie point d'en donner la composition ; il ajoute de même un extrait du Livre de M. de Sauvages, intitulé, *Nozologia Methodica sistens Morborum genera & classes, &c.* pour mieux mettre son lecteur en état de distinguer les espèces de maladies desquelles il va être dans le cas de parler.

Ce n'est qu'après tous ces préliminaires, qu'il a jugé nécessaires, que M. Razoux vient enfin à ses Tables, qu'il commence par le mois de Juin 1757 ; il donne pour chaque jour du mois la hauteur du mercure dans le baromètre, la hauteur de la liqueur dans le thermomètre matin & soir ; les vents qui ont soufflé & l'état du ciel pendant chaque jour : ces observations occupent la première page de chaque mois, au bas de laquelle il en fait une courte récapitulation.

Les pages suivantes contiennent le nombre des malades de chaque espèce de maladie, qui sont entrés pendant le mois, tant dans la salle des hommes que dans celle des femmes ; l'espèce de leurs maladies ; le nombre de ceux qui ont été guéris, celui des morts, celui des convalescens, & les observations qu'il a faites sur les différens traitemens que les maladies ont exigés, leurs symptômes, leurs crises & la réussite bonne ou mauvaise que ses soins ont eue.

La dernière page de chaque mois contient une espèce de récapitulation du nombre des malades, des guéris, des morts & de ceux qui sont restés à l'Hôtel-Dieu, rangés suivant l'ordre de leurs maladies.

Ces Tables sont continuées de la même manière depuis le mois de Juin 1757 jusqu'en Décembre 1761.

L'Ouvrage de M. Razoux est terminé par douze Lettres ; Observations & Mémoires sur divers sujets de Médecine.

Il s'agit dans le premier article, d'une hydrophobie singulière dont un homme fut attaqué sans avoir été précédemment mordu

ni piqué par aucun animal, & seulement pour avoir respiré de trop près l'air qui sortoit de la gueule d'un chien enragé.

Dans le second, il s'agit de vers sortis des pustules de la petite vérole, mais seulement de celles du visage, & que M. Razoux reconnut être nés des œufs qu'y avoient déposés des mouches, du genre de celles qu'on nomme ici *mouches blanches*.

D'autres vers font le sujet du troisième article, ils étoient dans les sinus frontaux & causoient au malade des maux de tête affreux. M. Razoux trouva qu'ils étoient de la nature de ceux qui se trouvent quelquefois dans les sinus frontaux des moutons, & qui leur occasionnent une espèce de vertige qu'on nomme *turrelu*.

Les quatrième & cinquième articles ont pour objet les bons effets de la plante appelée *solanum scandens* seu *dulcamara*, prise intérieurement pour la guérison du scorbut; nous n'en dirons rien ici, en ayant amplement parlé en 1761.\* d'après les observations mêmes de M. Razoux; nous ajouterons seulement que la malade qui a fait le sujet de cette observation, jouissoit en 1767 d'une parfaite santé, qu'elle s'étoit mariée & étoit accouchée d'un enfant bien constitué.

\* Voyez Hist.  
année 1761,  
p. 54.

L'objet du sixième article est un vomissement habituel causé par une excroissance ou *fungus* qui fermoit absolument l'orifice intérieur de l'estomac & qui fit à la fin périr le malade.

Dans le septième, M. Razoux rend compte des rhumes épidémiques observés aux environs de Nîmes, des divers symptômes qu'il y a observés & des différens remèdes qu'il a employés pour les guérir.

Le huitième roule tout entier sur les observations que M. Razoux a faites sur les poulx critiques, c'est-à-dire qui annoncent de ces évacuations qui terminent ou, comme disent les Médecins, jugent une maladie; ce morceau, soutenu par-tout d'observations curieuses, est peut-être le morceau le plus intéressant du Livre de M. Razoux.

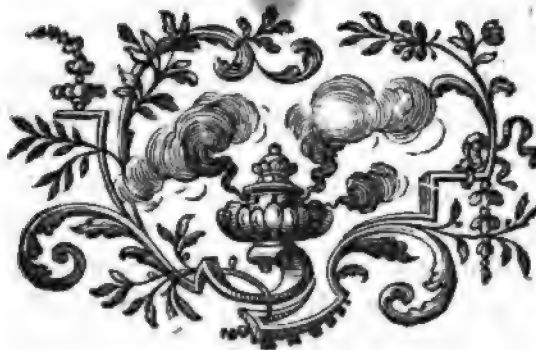
Les neuvième, dixième & onzième articles contiennent l'histoire de quelques inoculations & quelques discussions polémiques à ce sujet.

Quant au douzième, il n'est que l'indication d'un Mémoire

52 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

présenté par M. Razoux à la Société Médico-Physique de Bâle;  
& inséré dans le cinquième volume des *Acta Helvetica*, & qui a  
pour objet les maladies exanthémateuses ou caractérisées par une  
éruption à la peau.

Cet Ouvrage contient un nombre prodigieux d'Observations  
curieuses & qui peuvent devenir d'une extrême utilité dans la  
pratique de la Médecine ; on y reconnoît par-tout l'Observateur  
exact, le Médecin prudent & l'ami de l'humanité.





## CHIMIE.

## SUR LA NATURE DE LA BILE.

Nous avons rendu compte en 1767 \* du travail de M. Cadet sur cette matière: il en résulteroit que la bile étoit un véritable savon, composé d'une huile animale, de la base alcaline du sel marin, du sel marin lui-même, d'un autre sel de la nature du sucre de lait, d'une terre calcaire, participant légèrement du fer, & enfin d'une petite quantité d'une substance animale gélatineuse.

V. les Mém.  
p. 66.

\* Voy. Hist.  
année 1767,  
p. 68.

Toutes ces parties intégrantes de la bile avoient été démontrées par les observations de M. Cadet, d'une manière qui lui paroissoit incontestable; & d'ailleurs la propriété savonneuse de la bile est si bien reconnue, qu'on l'emploie à dégraisser des étoffes, sur lesquelles le savon même a souvent peine à mordre.

Malgré toutes ces preuves, M. Cadet a été extrêmement surpris de trouver, dans une thèse de M. Roederer, soutenue à Strasbourg, que la bile contient un principe acide, & qu'elle coagule le lait; deux propriétés qui détruiroient absolument le sentiment de M. Cadet, puisqu'alors la bile ne seroit plus un savon, ou qu'au moins ce seroit un savon extraordinaire, dont la partie saline, au lieu d'être un alkali, seroit un acide.

Quelqu'assuré que fût M. Cadet de l'exactitude & de la précision de ses recherches, cependant l'autorité de M. Roederer l'ébranloit; & dans cette incertitude, il a cru devoir consulter l'oracle des vrais Physiciens, l'expérience.

Pour cela il a pris deux onces de bile, tirée d'un bœuf qu'on venoit de tuer, & par conséquent exempte de toute altération, & les a mêlées avec une chopine de lait de vache, tiré depuis quatorze heures; il a bien remué ce mélange, & l'a laissé reposer

plusieurs heures, sans y rien remarquer qui tendît à la coagulation du lait.

Il a mis sur le feu une autre chopine de lait, & lorsqu'il a été bouillant, il y a mêlé deux onces de bile, & a fait faire au mélange deux ou trois bouillons; il ne s'est fait aucune coagulation, seulement la partie grasse & visqueuse de la bile a rendu le lait plus crèmeux. Ces deux mélanges furent mis rafraîchir dans de l'eau, à la température de dix degrés; le premier y est resté près de quatorze heures, sans qu'on y vît aucune séparation; à l'égard du second, il s'en éleva au bout de trois heures une crème lisse & sans grumeaux, que la simple agitation réunit au lait, précisément comme il arrive au lait bien pur qui est en repos.

Il étoit déjà bien prouvé, par ces expériences, que la bile récente ne caille point le lait; mais voici quelque chose de bien plus fort, non-seulement elle ne le caille pas, elle l'empêche de se cailler, & rétablit celui qui l'est.

Pour s'en assurer, M. Cadet a fait cailler du lait avec le vinaigre distillé, & il y a mêlé de la bile; après quelques bouillons, la bile a régénéré une partie du lait; preuve certaine de l'alkali qu'il a démontré dans la bile, & d'autant plus certaine que l'alkali semblable à celui de la soude, que M. Cadet a tiré de la bile, l'huile de tartre par défaillance, & même l'alkali volatil, ont produit le même effet; surquoi M. Cadet observe que ce moyen pourroit être employé, avec succès, pour empêcher le lait de tourner, pendant les chaleurs & les orages.

Tout ceci semble prouver, avec la plus grande évidence, que, comme M. Cadet l'avoit avancé dans son premier Mémoire, la bile est une espèce de savon qui ne contient aucun acide développé; nous disons développé, car l'acide entre nécessairement dans les huiles & les graisses comme un de leurs principes constituans, & à cet égard la bile contient de l'acide; mais ce n'est pas de celui-ci, que l'état dans lequel il est privé de toute action rend oisif, qu'a voulu parler M. Roederer, c'est d'un autre acide libre & capable d'agir sur le lait, ce qui changeroit considérablement la nature de la bile considérée comme savon.

M. Cadet a cru ne pouvoir mieux s'éclaircir sur ce point,

qu'en traitant le lait avec le savon, comme il l'avoit traité avec la bile.

Dans cette vue, il a fait dissoudre quatre gros de bon savon blanc dans quatre onces d'eau, & a mêlé cette dissolution avec une chopine de lait; cette liqueur n'y a occasionné aucune décomposition; un pareil mélange auquel il a fait faire trois ou quatre bouillons, lui a offert une décomposition sensible: une partie du lait s'est caillée, mais le reste s'est bien soutenu; & l'ayant mis reposer, il s'en est élevé une crème bien lisse & sans grumeaux.

Cette espèce de décomposition piqua la curiosité de M. Cadet, il en rechercha la cause & crut l'avoir trouvée dans une portion d'huile rance que le savon gardé pouvoit contenir & dont l'acide se seroit échappé; il étoit aisé de s'en éclaircir, il ne falloit qu'employer du savon récemment fait, il ne devoit opérer dans le lait aucune coagulation; aussi n'en opéra-t-il aucune, & il resta bien prouvé que le savon qui ne contenoit aucun acide développé, produisoit sur le lait le même effet que la bile; & que pour peu qu'il en contint, il cailloit le lait au moins en partie. La bile qui agit sur le lait, comme le savon qui ne contient point d'acide, n'en contient donc pas elle-même.

On n'ignore pas que les matières animales ne contiennent que peu ou point d'acide développé; la bile qu'on fait d'ailleurs contenir beaucoup de principe alkalin, en doit par-là même contenir moins qu'une autre, & il est bien facile de s'en assurer; on sait que l'acide rougit le papier bleu, & que l'alkali le verdit, M. Cadet prit donc de la bile de bœuf récente, l'étendit dans quatre fois autant d'eau, & il vit, comme il s'y étoit attendu, que cette liqueur, loin de rougir le papier bleu, lui donna une couleur verte; & pour s'assurer que la plus petite portion d'acide libre lui auroit donné la propriété de rougir le papier bleu, M. Cadet mêla avec huit onces de la dissolution de bile dans l'eau, une seule goutte d'huile de vitriol, & cette petite quantité d'acide suffit pour lui donner la propriété de rougir le papier bleu,

Il y a plus, les acides agissent sur la bile comme sur le savon, & la coagulent en grumeaux en séparant l'huile de l'alkali.

M. Cadet avoit d'abord soupçonné que l'acide que M. Roederer

avoit observé dans la bile, pouvoit s'être dégagé de l'huile animale par la fermentation acide qui précède ordinairement la putride; mais si ce passage a lieu dans la bile, il doit être bien court & bien difficile à saisir; car M. Cadet ayant eu la patience d'examiner de quart-d'heure en quart-d'heure l'effet de la bile sur le papier bleu, jusqu'à ce qu'elle fût parvenue à la fermentation putride, n'a pu trouver aucun instant où elle l'ait rougi, & où par conséquent elle ait pu être soupçonnée de la plus petite acidité.

Il y a bien de l'apparence que dans l'expérience de M. Roederer; il est arrivé, ou que le lait dont il s'est servi étoit déjà disposé à l'aigre, ou que la bile elle-même étoit altérée: on fait, par exemple, que la bile verte ne doit cette couleur qu'à la présence d'un acide étranger; il ne seroit donc pas difficile à une bile de cette espèce de cailler le lait. Mais un cas particulier de cette espèce ne peut tirer à conséquence & ne peut porter aucune atteinte à l'opinion avancée par M. Cadet, que la bile est un véritable savon animal exempt de tout acide développé; opinion que les expériences qu'il a rapportées dans son premier Mémoire & celles qu'il rapporte dans celui-ci, semblent prouver de la manière la plus incontestable.

## SUR LA

## NÉCESSITÉ DE RETIRER DES COUPELLES,

## LA PARTIE D'ARGENT FIN

## QU'ELLES RETIENNENT TOUJOURS.

V. les Mém. **N**ous avons déjà rendu compte en 1762<sup>a</sup> & en 1763<sup>b</sup> des travaux que M. Tillet avoit entrepris sur cette matière, de laquelle nous allons reprendre la suite; les expériences précédentes avoient évidemment démontré que les coupelles retenoient toujours une partie sensible d'argent fin dans l'opération de l'essai, que c'étoit cette partie retenue qui avoit fait regarder comme impossible d'avoir de l'argent absolument pur & indestructible; & enfin qu'en faisant rendre à la coupelle ce qu'elle avoit absorbé, l'argent

p. 153.  
Voy. Hist.  
année 1762,  
p. 56.  
Voy. Hist.  
année 1763,  
p. 39.



l'argent pouvoit être porté à un tel degré de pureté, qu'il ne perdoit plus rien à être essayé, même plusieurs fois. L'importance de la matière a déterminé M. Tillet à reprendre la suite de ce travail & à rapprocher, pour ainsi dire, les idées qu'il avoit données dans les précédens Mémoires.

Essayer une certaine portion d'argent ; c'est déterminer la quantité d'argent pur & celle de cuivre ou d'autres métaux qui y sont contenus.

Pour cela on met une petite partie de l'argent qu'on veut essayer, mêlé avec une certaine quantité de plomb, dans une espèce de creuset poreux fait avec des cendres d'os bien lessivées ; on expose ensuite ce creuset, qu'on nomme *coupelle*, dans une moufle placée dans un fourneau, où elle est environnée de tous côtés de charbons ardens ; bientôt l'ardeur du feu fait couler le plomb qui aide l'argent à se fondre. Le plomb qui se vitrifie aisément, facilite la vitrification des autres métaux & les entraîne avec lui sous la forme de litharge à travers la coupelle dans laquelle il ne reste que l'argent fin ; on pèse alors cet argent, & ce qu'il a perdu de son poids est regardé comme la partie de métaux étrangers qu'il tenoit & qui s'en sont allés avec le plomb, & on juge par-là du titre auquel doit être fixée la portion d'argent qu'on vouloit essayer.

On voit par ce court exposé, que, comme on ne soumet à l'essai qu'une très-petite partie de la matière, on conclut toujours du petit au grand, & que les moindres erreurs sont extrêmement à craindre.

Aussi M. Tillet compte-t-il jusqu'à onze défauts dans lesquels peuvent tomber les Essayeurs ; le peu de sensibilité & de précision dans les balances d'essai, le peu de justesse des poids, qu'on nomme *de semelle*, & qui ne sauroient être trop exacts, la mauvaise fusion des matières à essayer dans lesquelles l'alliage est souvent très-inégalement distribué, les matières étrangères que contient souvent le plomb, l'argent dont il n'est presque jamais dépouillé, l'inégalité avec laquelle cet argent peut être mêlé dans la masse, peuvent faire que différens essais où il sera employé, donnent des titres différens ; si on emploie des doses de plomb plus ou moins fortes que celles qui sont prescrites, il en naîtra encore des

variations dans le titre ; pour peu qu'on manque d'attention à la conduite du feu , les boutons , quoiqu'avec toute l'apparence possible d'une opération parfaite , pourront encore retenir de l'alliage , ou au contraire avoir rendu du fin , soit par des petits globules d'argent qui s'en séparent & restent adhérens aux coupelles , soit par des pétilemens qui écartent ces globules ; & ce cas est le plus à craindre , parce que non-seulement il appauvrit l'essai , mais encore parce qu'il enrichit à ses dépens les autres qui se trouvent dans la moufle qui reçoivent ces globules étrangers , & en sont réellement augmentés.

En examinant ce que nous venons de dire , il est aisé de voir que la plus grande partie de ces défauts peut s'éviter avec du soin & de l'attention , & c'est aussi ce que M. Tillet recommande aux Essayeurs & qu'il a pratiqué lui-même ; l'exactitude des balances , l'examen de la masse d'argent qui a servi à ses expériences , celui du plomb qu'il employoit , la fabrique des coupelles , la conduite du feu , ont fait l'objet de ses soins & ont assuré le succès de ses expériences ; nous allons essayer de présenter une idée de son travail & des résultats qui en ont été le fruit.

Il ne sera donc point ici question de toutes ces erreurs qu'on peut éviter avec de l'attention , il s'agit ici d'une autre cause d'erreur qui ne tient à aucune de celles que nous venons d'indiquer , si ce n'est peut-être à la conduite du feu pendant la durée de l'opération.

L'opération par laquelle on essaye l'argent , tend essentiellement à constater combien il y a d'argent fin dans le morceau qu'on essaye , & combien d'alliage ou de métal étranger y est mêlé.

Comme cet essai ne se fait que sur une très-petite quantité d'argent , il est nécessaire qu'il soit fait avec toute la précision possible , puisque la proportion se trouve entre l'argent , & l'alliage de cette petite quantité sert à fixer le titre de la masse , souvent considérable , dont elle a été tirée.

Il se trouvoit cependant un grand nombre de défauts dans l'opération usitée par les Essayeurs , & malheureusement ils alloient presque tous à diminuer la quantité de fin , & par conséquent au détriment du propriétaire.

L'importance de cette matière a déterminé M. Tillet à tourner ses vues vers cet objet si intéressant ; & pour ne point s'égarer ; voici les précautions qu'il a prises.

Pour s'assurer que l'argent & le cuivre étoient également mêlés dans les portions qu'il alloit soumettre à l'essai , il a tiré la portion d'argent qu'il y destinoit d'une masse de 1800 marcs , chargée d'environ un douzième de cuivre , & qui avoit été fondue & bien brassée dans un creuset de fer ; il fit laminer cette portion , & ce fut de ces lames qu'il tira la matière de ses essais.

Il s'étoit de même assuré d'une portion de plomb dépouillé ; autant qu'il étoit possible, de tout argent ; chose absolument nécessaire dans la recherche qu'il alloit entreprendre.

Les fourneaux d'essai sont ordinairement construits de manière à ne donner qu'une chaleur assez modérée ; elle suffit à l'opération telle qu'on la pratique , mais elle auroit été insuffisante pour les épreuves que M. Tillet méditoit ; il falloit donc les rendre capables de donner un degré de chaleur plus considérable , & voici le moyen qu'il emploie pour y parvenir.

Il fait le cendrier de son fourneau de 14 pouces de haut ; au lieu de trois pouces qu'on lui donne ordinairement ; & pour y introduire un courant d'air plus vif , il y adapte à 4 pouces du fond un tuyau de tôle qui , passant au-dehors à travers le mur de la cheminée , y appelle l'air extérieur ; deux barreaux de fer traversent le cendrier à la hauteur de 9 pouces , & y forment une grille qui reçoit les charbons embrasés qui tombent du fourneau , & les expose à tout le courant d'air du tuyau ; mais comme ces charbons à demi-consumés n'échaufferoient pas assez le plancher de la moufle , M. Tillet a ménagé , au-dessous de ce plancher , une ouverture dans le corps du fourneau , par laquelle on y peut introduire du charbon noir & faire éprouver à la moufle l'activité du charbon qui s'allume ; une porte de tôle garnie en-dedans de terre à creuset , ferme cette ouverture : enfin , pour occasionner un plus grand tirant d'air , il couvre l'extrémité supérieure du fourneau d'une espèce de chapiteau conique de fer , au-devant duquel est une ouverture fermée d'une porte qu'on n'ouvre que pour jeter du charbon au-dessus de la moufle , & cette espèce de dôme est

encore prolongé par un tuyau de tôle de 3 pieds ou environ de longueur & de six pouces d'ouverture ; pour peu qu'on soit au fait de la manière dont l'air agit dans les fourneaux , il est aisé de sentir combien les additions que fait M. Tillet au fourneau d'essai , doivent augmenter la force & l'activité du feu.

M. Tillet employa d'abord le fourneau d'essai dans l'état ordinaire ; il n'avoit alors pour but que de voir si , après avoir reconnu un titre quelconque dans un argent dont il connoissoit le degré de pureté , il le retrouveroit toujours le même en l'essayant de nouveau ; mais il eut beau faire , il trouva toujours des variations dans le titre ; il n'ignoroit pas que les coupelles retenoient un peu d'argent , mais il n'étoit pas alors question de savoir ce qu'il se perdoit de fin , mais de rendre cette perte égale dans tous les essais , puisqu'alors on pourroit y suppléer par un calcul facile.

M. Tillet s'étoit aperçu dans le cours de ses opérations , que ; sur la fin de l'opération , l'air qui favorise l'imbibition de la litharge dans la coupelle , y diminue aussi la chaleur à tel point qu'il n'en reste que ce qui est absolument nécessaire pour tenir la matière en fusion ; & cette remarque lui fit soupçonner que le bouton qui demeurait après l'opération , pourroit bien avoir retenu quelque portion de cuivre , & alors il n'étoit plus étonnant que cette portion de cuivre , vraisemblablement variable , introduisît quelque variation dans le titre.

Pour éviter cet inconvénient , M. Tillet employa donc le fourneau tel que nous venons de le décrire ; alors le feu devenu plus fort , ne laissa plus refroidir la matière ; il employa de plus fortes doses de plomb , il fit subir aux boutons un second essai , il retira des coupelles l'argent qu'elles avoient retenu ; & ayant rejoint à chaque bouton la particule d'argent retirée de la coupelle , les résultats furent par-tout les mêmes & donnèrent le même titre de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$ .

Devenu par-là certain du titre de son argent , il recommença ses expériences : dans la première faite avec la dose de plomb ordinaire de six fois le poids de l'argent , le titre donné par l'opération fut 10 deniers 21 grains ; la coupelle auroit donc dû retenir 1 grain  $\frac{1}{2}$  ; cependant elle en rendit 2 grains  $\frac{1}{2}$  , d'où il suit

évidemment que le bouton de fin tenoit encore 1 grain  $\frac{1}{4}$  d'alliage : dans la seconde, le bouton d'essai retenoit encore plus d'alliage : dans la troisième enfin, le bouton contenoit 2 grains  $\frac{1}{4}$  d'alliage.

Le bouton de la seconde expérience passé une seconde fois à la coupelle avec trois parties de plomb, perdit 4 grains  $\frac{1}{8}$  de son poids, ce qui l'auroit mis au titre de 10 deniers 17 grains  $\frac{1}{8}$ ; mais en réunissant à ce bouton 2 grains qu'avoit retenu la première coupelle, & 2 grains  $\frac{1}{8}$  absorbés par la seconde; le vrai titre se trouvera de 10 den. 22 grains  $\frac{2}{8}$  ou  $\frac{1}{4}$ , qui revient précisément au titre intrinsèque de la matière de l'essai.

Quoique M. Tillet fut bien sûr du titre de la matière de ses essais, il résolut de s'en assurer encore d'une autre manière, en composant une portion d'argent dont le titre ne peut pas être équivoque.

Il avoit eu besoin en 1763, pour quelques expériences, d'une portion d'argent absolument pur \*, & il avoit trouvé moyen de l'obtenir; il avoit encore une partie de cet argent précisément à 12 deniers; cependant, pour être encore plus sûr de sa pureté, il l'essaya de nouveau avec une forte dose de plomb, & fut par-là convaincu que cet argent ne contenoit aucun alliage; 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$  de cet argent, furent mis avec 1 grain  $\frac{1}{4}$  de cuivre de rosette, & composèrent par conséquent un bouton allié qui contenoit 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$  de fin.

\* *Voy. Hist.*  
1763. p. 47.

Cette portion mise à la coupelle avec la dose ordinaire de six parties de plomb, vint au titre de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{2}$ , il y avoit donc un quart de grain de plus que dans l'argent pur, sans compter celui qu'avoit absorbé la coupelle, & en y joignant ce dernier, il se trouva 11 deniers 0 grain &  $\frac{7}{8}$ ; d'où il suit que le bouton pesoit 2 grains  $\frac{1}{8}$  plus que la quantité d'argent pur qui avoit été employée, & qui ne pouvoit venir que d'un reste d'alliage ou de plomb que le bouton avoit retenu, aussi cette quantité disparut-elle; en passant une seconde fois le bouton à la coupelle avec trois parties de plomb, en rejoignant au second bouton, provenu de cette opération, ce que la coupelle avoit retenu; M. Tillet trouva son argent précisément au même titre qu'il l'avoit mis; il est donc prouvé que les petites différences qui se

trouvent entre ces essais, viennent très-vraisemblablement beaucoup plus de la partie d'alliage que retient le bouton, que de l'inégalité dans le mélange de l'alliage de la matière qui a servi aux essais, & qu'on pouvoit faire disparaître ces différences en enlevant aux boutons, par une seconde opération, la petite partie d'alliage qu'ils avoient retenue.

Presque tout ce que nous venons d'exposer avoit été fait au feu ordinaire de coupelle. M. Tillet voulut voir si en faisant l'opération à un feu beaucoup plus vif & qui pût faire passer les essais en beaucoup moins de temps, il obtiendrait un autre résultat; il employa pour ces expériences le fourneau tel que nous l'avons décrit, mais il y remarqua les mêmes circonstances, & la perte sur les boutons d'essai ne fut pas plus marquée dans une façon d'opérer que dans l'autre; d'où il conclut que l'exactitude rigoureuse des essais ne tient point à la conduite du feu, que les boutons d'essais éprouveront toujours une perte de fin plus ou moins considérable tant qu'on ne retirera point de la coupelle le fin qu'elle a absorbé pour le rejoindre au bouton.

La dose du plomb qu'on emploie dans les affinages, méritoit bien d'être examinée, & M. Tillet en a fait un des objets de ses recherches; il avoit déjà examiné cette matière, & il n'ignoroit pas que plus on employoit de plomb au-delà d'un certain point, plus il y avoit de perte sur le fin; & cette considération, jointe à la nécessité de ne se pas trop écarter de la dose de plomb qu'on emploie dans les affinages étrangers, l'avoit déterminé à proposer au Conseil de fixer la quantité de plomb à six fois le poids de l'argent qu'on essaye.

Quand nous avons dit que l'augmentation du plomb augmentoit la perte de l'argent fin, nous n'avons pas prétendu dire que cette perte fût proportionnelle à la quantité de plomb que l'on ajoute; bien loin de-là, passé un certain terme, cette augmentation n'a presque plus d'effet.

M. Tillet a voulu chercher la raison de cette différence si marquée, & voici ce qu'il a observé: pendant tout le temps que l'argent allié nage dans une grande quantité de litharge, l'affinage ne se fait qu'imparfaitement, la circulation de la matière

est lente, & la coupelle n'absorbe que peu d'alliage, & par conséquent peu de fin, qui ne s'y introduit qu'à la faveur de l'introduction de la litharge; d'où il suit que pendant tout ce temps il ne se fait presque aucune imbibition dans la coupelle, ni aucune perte de fin, & que l'un & l'autre n'ont lieu que lorsque la matière circule vivement dans une quantité modérée de litharge.

D'après ces remarques, il fit deux nouveaux essais en employant six parties de plomb à l'ordinaire, mais dont il ne mit d'abord que quatre dans la coupelle; & lorsqu'elles furent presque imbibées, & que l'argent fut prêt à se fixer en bouton, il y remit les deux autres, & il obtint un bouton qui ne laissa aucun doute sur la pureté.

Dans le second essai, M. Tillet mit d'abord cinq parties de plomb dans la coupelle, & la sixième lorsqu'elles se furent imbibées; le produit fut absolument égal à celui du premier essai.

Pour peu qu'on y fasse réflexion, la cause de cet effet est aisée à apercevoir: en effet, l'argent allié se trouve dans cette opération réduit deux fois à n'être mêlé qu'avec une ou deux parties de litharge; il circule donc avec plus de facilité & s'épure davantage: il est vrai qu'il s'y fait une plus grande perte de fin, mais cette perte n'est pas réelle puisqu'on peut retirer de la coupelle la partie de fin qu'elle a absorbé.

On sait depuis long-temps qu'on peut employer dans les affinages le bismuth au lieu du plomb, soit qu'on l'emploie pur, soit qu'on le mêle avec le plomb. M. Tillet a cru qu'il étoit de son objet d'examiner s'il y avoit quelque avantage à substituer en tout ou en partie ce demi-métal au plomb; il a trouvé qu'à la vérité il purifioit un peu mieux l'argent, mais qu'il en entraînoit aussi un peu plus dans la coupelle; inconvénient qui n'en est un, que tant qu'on se tiendra à juger du titre de la matière par le seul bouton, sans faire rendre à la coupelle ce qu'elle a retenu de fin.

Puisque les coupelles retiennent toujours une partie de fin, il étoit naturel de chercher les moyens de faire en sorte qu'elles en retinssent le moins possible: dans cette vue, M. Tillet imagina de former des coupelles neuves avec des débris de vieilles



coupelles, comptant que cette matière, déjà imbibée de litharge, absorberoit moins de fin que l'autre; mais l'expérience lui fit voir qu'elles n'en absorboient pas moins, & il n'en tira d'autre utilité que d'apprendre que ces débris d'anciennes coupelles pouvoient servir à en construire de nouvelles lorsqu'on manque de matière propre à les construire; mais en ce cas on devroit observer, lorsqu'on voudra revivifier la litharge qu'elles avoient absorbées, qu'elles donneroient toujours une certaine quantité de plomb & de fin étrangère au dernier essai, & ne feroient qu'induire en erreur.

De toutes les observations de M. Tillet, que nous venons de rapporter, il résulte :

1.<sup>o</sup> Que dans la manière d'essayer, usitée en Europe, l'argent même le plus pur éprouve constamment une perte plus ou moins considérable par la quantité de fin qu'absorbent les coupelles.

2.<sup>o</sup> Qu'en ressuscitant la litharge imbibée par les coupelles & passant ce plomb à l'essai, il rend la partie de fin qu'il avoit entraînée avec lui, & qu'on obtient par ce moyen la totalité de l'argent fin contenu dans la matière qu'on essaye.

3.<sup>o</sup> Qu'un Essayeur, même en prenant toutes les précautions prescrites pour l'exactitude des essais, ne peut se flatter de trouver toujours la même matière au même titre.

4.<sup>o</sup> Que l'égalité du titre, abstraction faite de la perte causée par l'imbibition du fin dans la coupelle, ne dépend ni de la chaleur excessive, ni de la chaleur modérée du fourneau, ni de la promptitude ou de la lenteur de l'opération; ou que du moins le degré de feu qui pourroit la produire, dépend de tant de causes, qu'il est presque impossible de le déterminer; & que si, par une longue habitude, un Essayeur avoit pu parvenir à le saisir, cette connoissance ne seroit que pour lui, & que les instructions les plus précises ne pourroient le transmettre à d'autres.

Il en résulte encore que le seul moyen d'avoir le titre réel des matières qu'on essaye, seroit de faire restituer aux coupelles l'argent qu'elles ont absorbé: il est vrai que ce seroit faire deux opérations au lieu d'une; mais le degré d'exactitude qu'on obtiendrait par-là, & qu'on ne peut obtenir que par ce moyen, dédommageroit bien de ce travail.

M.

M. Tillet a cependant cherché à l'abrégé, & voici les tentatives qu'il a faites sur cet objet.

Il avoit remarqué qu'il se trouve d'autant moins de variation dans le titre des essais, qu'on vise plus à épurer le bouton, qu'à le garantir de la perte que lui fait éprouver la coupelle.

Il avoit encore observé que huit parties de plomb étoient suffisantes pour affiner complètement le bouton, pourvu qu'on les employât à deux fois; savoir, six parties la première fois, & les deux autres lorsque celles-ci sont imbibées dans la coupelle; que même six parties pouvoient suffire en faisant l'opération en trois fois; savoir, trois à la première, deux à la seconde, & une à la troisième.

Quelle que soit la dose qu'on adopte, le bouton s'épure également, & la perte est de 4 grains absorbés par la coupelle: or, il n'est pas difficile de trouver le moyen de charger le plomb d'assez d'argent fin pour qu'il restitue au bouton ces quatre grains absorbés par la coupelle; on pourroit même sans cela tenir compte de ces quatre grains, mais il faudroit pour cela que le plomb ne contînt aucune partie d'argent, & c'est ce qu'il n'est pas aisé de se procurer; c'est pourquoi M. Tillet croit qu'on doit s'en tenir à enrichir le plomb dans la proportion nécessaire, pour qu'il compense le déchet du bouton.

Avec tout cela pourtant, il ne juge pas cette opération absolument sûre, quoiqu'elle le soit beaucoup plus que l'opération ordinaire; & ce n'est, selon lui, qu'en faisant restituer à la coupelle ce qu'elle a retenu, qu'on peut juger invariablement du titre de l'argent.

Mais à quoi peut servir cette exactitude, & cette petite partie d'argent, qu'absorbe la coupelle, mérite-t-elle qu'on emploie tant d'art & tant de peine pour s'en assurer? Oui sans doute; car la portion d'argent qu'on essaye, doit régler, par son essai, la valeur de masses énormes auxquelles elle est relative; elle répond à 1 & environ un septième pour cent de tout l'argent monnoyé qui circule dans le commerce, & à 1 & environ un douzième de tout celui qu'on emploie en vaisselle: on peut juger de l'énorme non-valeur que cette petite partie d'argent, absorbée par les coupelles, introduit

dans le commerce, mais cette non-valeur ne peut disparaître que par un concours général de toutes les Puissances; celle qui pointerait seule plus haut que les autres, auroit trop à perdre dans son commerce, & il y a bien de l'apparence que ce concours si utile n'arrivera jamais, & que la vérité physique paraîtra inutilement; elle sera cependant de quelque usage, s'il vient jamais à s'élever quelque système spécieux sur cet objet; ces expériences seront autant de points immuables & lumineux, à la faveur desquelles il sera facile d'en juger sainement; mais n'eussent-elles que la curiosité pour objet, les Physiciens auront toujours à M. Tillet l'obligation d'avoir le premier éclairci une matière si curieuse & si intéressante.

## OBSERVATION CHIMIQUE.

**M.** CADET a fait part à l'Académie d'un phénomène digne de l'attention des Chimistes; il avoit mêlé une dissolution de mercure, par l'acide nitreux, avec une proportion déterminée d'esprit-de-vin rectifiée; il distilla ce mélange, & le résidu de la distillation traité avec l'alkali qui sert de base au sel marin, ou avec l'alkali fixe du tartre, lui a constamment donné de l'alkali volatil en liqueur, du sel volatil concret & un peu d'huile qui avoit une odeur de bitume: d'où pouvoient venir ce sel volatil & ce bitume dans un composé de matières qui paroissent si peu capables d'en contenir?

V. les Mém.  
p. 589.

**N**ous renvoyons entièrement aux Mémoires: La description d'un grand Fourneau à affiner le cuivre, construit au mois d'Août 1755, dans la fonderie des mines de Chessy en Lyonnois, dans lequel se raffine tout le Cuivre provenant desdites mines & de celles de Sainbel: Par M. Jars.

CETTE année M. Guindant, Médecin de la Faculté de Montpellier & de l'Hôtel-Dieu d'Orléans, & de la Société royale d'Agriculture de la même ville, présenta à l'Académie un Mémoire intitulé : *Examen chimique & pratique des Eaux de la Loire, du Loiret & des puits d'Orléans*, fait par lui & par M. Prozet, habile Apothicaire d'Orléans, que M. Pajot de Cypierre, Intendant de cette généralité, avoit engagé à concourir à cet examen.

Le travail de M. Guindant a donc trois objets séparés; l'examen des eaux de la Loire, celui des eaux du Loiret, & celui des eaux des puits d'Orléans: nous allons essayer d'en présenter le résultat.

M. Guindant commence son examen de l'eau de la Loire, par une courte description de cette rivière, qui a environ cent quatre-vingts lieues de cours, depuis ses sources, qui sont dans le Vivarais au pied du mont Gerbier-de-Joux, jusqu'à son embouchure dans l'Océan, à douze lieues de Nantes; cette rivière a deux espèces de poissons, les poissons de résidence, qui sont la carpe, le barbeau, le brochet, la plie, l'anguille, la perche, la brème & le goujon; & les poissons de passage, qui sont le saumon, l'alose & la lamproye: elle a peu de plantes qui croissent sur ses bords, & par conséquent rien à craindre de leur part pour la salubrité.

La pureté des eaux ne peut être altérée que par les matières qui y sont dissoutes; toutes celles qui n'y sont que mêlées s'en séparent aisément par la filtration ou même par le seul repos qui les obligent à se précipiter, mais celles qui y sont dissoutes s'y trouvent intimement unies, & l'art seul peut les en séparer; elles augmentent la pesanteur spécifique de l'eau, & y produisent différens changemens, suivant les différentes matières qu'on y mêle. C'est d'après ces principes que M. Guindant a examiné les eaux de la Loire.

Cette eau a été scrupuleusement pesée & comparée aux eaux reconnues les plus salubres, & M. Guindant l'a trouvée plus légère; mêlée avec le sirop de violettes, elle n'a point altéré la

couleur; d'où il suit qu'elle ne contient aucun acide ni aucun alkali libre; la dissolution de mercure par l'acide nitreux, ni l'alkali du tartre n'en ont point troublé la transparence, & n'y ont occasionné aucun précipité; ce qui seroit arrivé si elle avoit contenu quelque matière séléniteuse en quantité sensible.

M. Guindant en a fait évaporer 25 pintes, qui ont été réduites à quatre onces, d'une liqueur trouble qui a laissé sur le filtre 8 grains de terre calcaire jaunâtre: la liqueur filtrée étoit très-claire; & évaporée jusqu'à siccité, elle a laissé dans la capsule de verre 24 grains d'une matière saline, sur laquelle on a versé 2 onces d'eau distillée qui est devenue louche; traitée avec la dissolution de mercure par l'acide nitreux, elle a donné un précipité blanc; & y ayant versé de l'acide vitriolique, il s'en est élevé des vapeurs blanches qui avoient une odeur de safran, d'où il résulroit que l'acide marin étoit le principe constituant de cette matière saline qu'avoit donnée l'eau de la Loire. M. Guindant soupçonnant que ce sel pourroit bien être à base terreuse, il mêla dans la dissolution de l'huile de tartre, il s'en sépara en effet une terre calcaire, & le reste mis à évaporer donna des cristaux cubiques, preuve non équivoque de la présence du sel marin.

Il résulte de cet examen, que l'eau de la Loire ne contient qu'environ un grain de sel marin & environ un tiers de grain d'une terre calcaire jaunâtre libre, mais qui n'est que mêlée à l'eau, sans entrer dans la composition d'aucune matière saline qui puisse l'y unir.

Cette eau est d'ailleurs, selon M. Guindant, très-légère & très-claire, sans goût & sans odeur; elle dissout très-bien le savon, & blanchit parfaitement le linge; on en fait de très-bonne bière & de très-bon pain; elle n'est pas moins propre à faire d'excellent mortier; en un mot, il ne lui manque aucune des qualités qui peuvent rendre une eau salubre & excellente.

Au sud & à très-peu de distance d'Orléans, coule une rivière nommée *le Loiret*, qui prend sa source à une lieue environ au-dessus de cette ville, & va se jeter dans la Loire à deux lieues au-dessous: cette rivière nourrit une très-grande quantité de poissons & de plantes, & elle ne gèle jamais, propriété commune à

presque toutes les eaux souterraines; les eaux sont à peu près dormantes & n'ont qu'un mouvement insensible ou du moins très-lent; elles sont transparentes & verdâtres; elles n'altèrent point la couleur du sirop de violettes; mêlées avec la dissolution du mercure par l'esprit de nitre, elles deviennent laiteuses, & déposent un précipité jaune qui y décèle l'acide vitriolique; en un mot, il résulte de l'examen qu'en ont fait M.<sup>rs</sup> Guindant & Prozet, que vingt-cinq pintes de l'eau du Loiret, contiennent 12 grains de sel marin, 3 gros d'une liqueur incristallisable qui, étant desséchée, a donné 48 grains de substance saline mucilagineuse & 74 grains de dépôt terreux, dont 18 étoient de la sélénite, & les 56 autres de la terre martiale calcaire.

Ces observations, jointes à la pesanteur de cette eau, à son mauvais goût, à son peu de mouvement, au lit bourbeux où elle coule & à la quantité de plantes & de poissons qu'elle contient, ont paru, avec raison, suffisantes pour condamner absolument l'usage de cette eau.

La troisième partie de l'Ouvrage de M.<sup>rs</sup> Guindant & Prozet a pour objet l'examen de l'eau des puits d'Orléans: on se plaignoit depuis long-temps de la mauvaise qualité de ces eaux; & en effet, comme l'observe avec raison M. Guindant, une rivière qui coule sur un beau sable ou sur une terre vitrifiable, peut fournir des eaux très-pures & très-salubres, tandis que les puits ne peuvent fournir que des eaux qui séjournent sur de la marne ou de la glaise, & qui se chargent de ces substances étrangères, celles d'Orléans nommément étant dans ce cas, puisqu'elles ne viennent que de la Beauce.

Il auroit été trop long d'examiner l'un après l'autre tous les puits d'Orléans, M.<sup>rs</sup> Prozet & Guindant prirent le parti de diviser la ville en quatre quartiers; savoir, celui de l'Hôpital général, celui de l'Hôtel-dieu, celui de l'hôpital Saint-Louis & celui de la Prison.

Les eaux des puits de chacun de ces quartiers furent soumises aux mêmes épreuves que celles de la Loire, & voici quel en fut le résultat.

Les eaux des puits de l'Hôpital, donnèrent par pinte 4 grains  $\frac{1}{2}$

70 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

de terre calcaire, presque 3 grains  $\frac{1}{3}$  de sélénite, un tiers de grain de sel de Glauber, & environ 3 grains d'eau-mère.

Les eaux des puits du quartier de l'Hôtel-dieu, ont fourni par pinte, environ 4 grains  $\frac{1}{3}$  de terre calcaire, 2 grains de sélénite,  $\frac{1}{4}$  de grain de sel de Glauber & 3 grains d'eau-mère.

L'eau des puits de l'hôpital Saint-Louis, contenoit par pinte; environ 3 grains de terre calcaire, demi-grain de sélénite, & un peu plus de 8 grains  $\frac{1}{2}$  d'eau-mère.

Les eaux du puits de la Prison ont donné, par pinte, plus d'un grain  $\frac{1}{2}$  de terre calcaire, plus d'un demi-grain de sélénite, & près de 6 grains d'eau-mère.

A ces produits de l'analyse chimique; M. Guindant ajoute les observations suivantes.

Toutes ces eaux sont beaucoup plus pesantes que celle de la Loire: elles ont une saveur dure & âcre; le savon ne s'y dissout qu'imparfaitement, le linge s'y blanchit mal, & les légumes n'y cuisent qu'avec beaucoup de temps.

De toutes ces observations, M. Guindant croit pouvoir légitimement conclure, que la plupart des maladies auxquelles les habitans d'Orléans sont sujets, ne peuvent être attribuées qu'à l'usage qu'ils font de ces eaux de puits; ne pouvant être attribuées ni à l'air dont la pureté & la salubrité sont reconnues, ni aux alimens dont ils usent, qu'on peut mettre au nombre des meilleurs.

Les expériences chimiques de M.<sup>rs</sup> Guindant & Prozet ont paru parfaitement bien faites & très-exactes; & ce Mémoire a été trouvé plein de vues très-utiles, dirigées par une bonne physique: l'Académie a cru devoir des éloges à leur zèle, & elle croit qu'il seroit à désirer que les Citoyens d'Orléans eussent une entière connoissance de ce travail, qu'ils en sentissent tout le prix, & qu'ils se déterminassent en conséquence à abandonner l'usage de l'eau de leurs puits qui nuit à leur santé, & à adopter celui des eaux de la Loire, dont les observations de M.<sup>rs</sup> Guindant & Prozet prouvent la bonté & la salubrité.





## BOTANIQUE.

SUR LE CHANGEMENT  
DES ESPECES DANS LES PLANTES.

UNE Observation de feu M. Marchant, rapportée dans V. les Mém. l'Histoire de l'Académie de 1719 \* a donné lieu à la p. 31. question qui fait l'objet de ce Mémoire, dans lequel M. Adanson \* Voy. Hist. 1719, p. 57. recherche si les espèces sont constantes, ou si par la communication de poussières séminales étrangères à une plante, il peut se former de nouvelles espèces qui se reproduisent constamment sous la même forme.

La plante qui avoit fait le sujet de l'observation de M. Marchant étoit une espèce de mercuriale qui vint d'elle-même dans son jardin au mois de Juillet 1715, & qui avoit les feuilles comme des filets; il la trouva assez différente de la mercuriale ordinaire pour lui donner un nom nouveau, & la nomma *Mercurialis foliis capillaceis*. Au mois d'Avril suivant, cette plante reparut dans le même endroit, avec une autre espèce de mercuriale à feuilles, profondément dentelées, qu'il nomma *Mercurialis foliis in varias & inæquales lacinias quasi dilaceratis*.

De cette observation de M. Marchant, il sembloit qu'on pouvoit inférer qu'il se pouvoit produire de nouvelles espèces, & que les Anciens n'avoient pas eu tort de n'en décrire qu'un si petit nombre; les autres, que nous observons aujourd'hui en si grande quantité, ayant été produites depuis eux, & n'existant pas de leur temps.

Ces plantes de M. Marchant ne durèrent que quelques années; & il n'en fut plus question jusqu'en 1744 que M. Linnæus, qui avoit jusque-là regardé les espèces comme constantes, commença à douter de cette constance, & même à croire qu'il s'en pouvoit produire de nouvelles; & voici ce qui donna lieu à ce changement.



En 1742, M. Zioberg herborisant dans une île située en mer à environ sept milles d'Upsal, trouva dans un terrain graveleux tout couvert de linair, une plante assez semblable à la linair commune, mais qui en différoit assez considérablement dans ses fleurs, pour constituer, selon M. Linnaeus, une nouvelle espèce qu'il imagina provenir de la fécondation d'une linair ordinaire par une autre plante qu'on croit être la jusquiame ou le tabac, M. Linné lui a donné le nom de *peloria*, & il présume qu'elle sera constante.

M. Linné cite une autre métamorphose du même genre; qui arrive tous les ans dans le jardin d'Upsal, où les graines du chardon ordinaire à tête velue, lui ont donné le chardon à têtes velues & rassemblées des Pyrénées; il ignore si cette variation provient des semences même de la plante ou de la fécondation de ces mêmes semences, faite par les poussières d'une autre plante.

Il rapporte encore une transformation de cette espèce; la grande & la petite verveine d'Amérique ont produit une nouvelle espèce de verveine semblable, pour les feuilles, à la verveine d'Europe; & pour toutes les autres parties à la grande verveine d'Amérique. M. Gmelin parle encore d'une plante de la linair à feuilles rondes, qu'on nomme pour cette raison *nummulaire*, qui avoit porté une fleur toute semblable à la *peloria* de M. Linnaeus: il ajoute même encore que le pied d'allouette de Sibérie, nommé *Delphinium*, dont il n'avoit trouvé dans ce pays que deux espèces avoit produit dans son jardin de Pétersbourg jusqu'à six espèces de cette plante; qui différoient, par la grandeur de leurs fleurs, par la couleur, le port & la découpe plus ou moins profonde de leurs feuilles, & qu'il croyoit provenir du mélange des deux premières espèces primitives qu'il y avoit apportées. M. Von-Linné lui-même a prétendu, en parlant des plantes de cette espèce, que la pimprenelle-aigremoine qui s'est reproduite de graine à Upsal pendant plusieurs années, est venue de la pimprenelle commune fécondée par les poussières de l'aigremoine, & qu'un grand nombre de plantes qu'il cite ont une pareille origine; & il conclut, de toutes ces observations; que tous les genres de plantes ne sont autre chose que des plantes nées d'une même mère & de pères différens, & que c'est un  
nouveau

nouveau champ ouvert aux Botanistes pour tenter de multiplier les espèces par de pareils mélanges.

M. Adanson avoit d'abord adopté le même sentiment, d'après les observations de M. Linnæus; mais ayant eu occasion d'élever non-seulement la pelore vivace de la linare commune, envoyée par M. Linnæus, mais encore une pelore annuelle formée en 1762 au Jardin du Roi, de la linare d'Espagne à feuilles menues, la mercuriale de M. Marchant, & plusieurs autres plantes, il a cru devoir embrasser un sentiment contraire; & pour autoriser ce changement, il reprend dans son Mémoire tous les faits qui ont servi de fondement à l'opinion de M. Linnæus, desquels il fait voir qu'on ne peut rien conclure en faveur de cette hypothèse: essayons de rendre compte de ses motifs.

La mercuriale de M. Marchant étoit disparue en 1716; elle reparut pour la première fois en 1766, sous les chassis du Jardin du Roi; & M. de Jussieu la confia à M. Adanson, pour suivre les expériences qu'il méditoit sur ce sujet.

On étoit pour lors au 11 Juin, & la plante étoit en pleine fleur; M. Adanson la reconnut pour un individu mâle, ses feuilles ressembloient à celles d'un réléda rongées des insectes, sans cependant en avoir éprouvé aucune atteinte; mais les antères ou sommités des étamines, étoient trois fois plus petites qu'à l'ordinaire; sphériques, &, autant qu'il fut possible d'en juger, absolument vides de poussière féminale.

Il étoit aisé de voir si cette plante étoit capable de se reproduire, ou si ce n'étoit qu'une variété monstrueuse: M. Adanson n'y manqua pas; pour cela il plaça, sur une des couches de la melonnière, dix pieds de mercuriale femelle, au-dessous de la mercuriale mâle en question; &, trois ou quatre fois par jour, il secouoit cette dernière sur elles, pour que la poussière féminale, si elle en contenoit, pût les féconder; & afin d'ôter toute ambiguïté, il avoit détruit tous les pieds de mercuriale qui avoient paru dans son jardin. Les graines des mercuriales femelles étant venues en maturité dès le 25 de Juillet, il en sema une partie dont aucune ne leva, & le pied de mercuriale extraordinaire crut

*Hist. 1769.*

K

jusqu'à 12 pouces de hauteur, & dura jusqu'aux premières gelées qui le firent périr.

Au printemps de l'année suivante, M. Adanson sema ce qui lui restoit de ses graines; il en leva environ un dixième, qui ne produisit que des mercuriales communes.

Nous avons dit que les feuilles de la mercuriale extraordinaire; ressembloient à celles du réséda: d'après l'idée de M. Linnæus; il essaya de féconder des mercuriales femelles avec les poussières du réséda & par celles du chanvre mâle; mais toutes les graines provenues de ces mélanges, n'ont encore donné que des mercuriales ordinaires.

Toutes ces expériences ont fait voir à M. Adanson, que la fécondation n'a pas lieu par le secours des poussières étrangères quand les plantes sont de familles différentes; & que le peu de graines de ses mercuriales qui ont germé, malgré la scrupuleuse attention qu'il avoit apportée à détruire tous les mâles de cette espèce qui avoient paru dans son jardin, avoient été fécondées par quelques poussières de mercuriale mâle que le vent avoit apportées du dehors, & que cette mercuriale à feuilles déchiquetées; de même que celles de M. Marchant, ne sont que des individus monstrueux ou des mulets viciés dans leurs tiges, dans leurs fleurs & dans les parties de la génération, & non pas de nouvelles espèces.

La pelore que M. Linnæus cite, comme se reproduisant de graines, ne prouve pas davantage en faveur de la production de nouvelles espèces: la linaires vivace ordinaire qu'il a envoyée & la linaires annuelle d'Espagne, ont donné tantôt quelques fleurs pelores, mêlées avec des fleurs naturelles sur le même pied, tantôt tous les pieds sont à fleurs naturelles, tantôt ils sont à fleurs pelores, mais toujours les fleurs pelores ont été stériles: les seules fleurs naturelles ont produit des graines fécondes; ces plantes extraordinaires doivent donc être regardées comme des demi-mulets dans lesquels les organes de la génération sont constamment viciés.

Ces faits sont cependant les seuls authentiques que produise M. Linnæus pour appuyer son opinion; les autres que lui &

M. Gmelin cite sur les plantes qu'ils nomment *hybrides* ou *bâtardes*, n'ont pas été observés avec autant d'attention & ne paroissent être que des espèces de conjectures, fondées sur les deux premiers faits de la mercuriale & de la pelore; & comment pourroit-on se fier à des conjectures, tandis que deux faits bien plus positifs & bien mieux circonstanciés, desquels M. Linnæus n'avoit eu probablement aucune connoissance, ne prouvent cependant rien en faveur de son opinion?

Le premier de ces faits regarde le fraisier commun; la graine de ce fraisier a donné en 1763, un fraisier dont les feuilles sont simples; c'est-à-dire, qu'au lieu de trois feuilles, ou pour mieux dire de trois lobes sur chaque tige, il n'en paroît qu'un, & les graines de celui-ci ont produit des pieds à une feuille, d'autres à trois, & d'autres enfin qui ont des unes & des autres mêlées ensemble; ce fraisier se multiplie plus constamment par ses fouets ou bourgeons qui représentent assez ordinairement les individus dont ils sont sortis: on a cru pouvoir partir de-là pour donner à ce fraisier le nom de nouvelle race: on a même été plus loin, en supposant que les diverses espèces de fraisiers connus sont des races venues toutes d'une même espèce primitive par des mélanges de fécondation. Cependant M. Adanson pense que ce fraisier à une feuille n'est pas une race ou espèce particulière, puisqu'il n'est pas constant dans la multiplication par graines; & en second lieu, parce qu'en examinant de près ces feuilles uniques, on y retrouve des vestiges des deux feuilles qui manquent, & une bifurcation dans la principale nervure qui indique que les trois feuilles se sont réunies en une; d'où il suit que ce fraisier n'est pas même une variété, mais seulement une monstruosité par défaut, tandis que la fleur a plus de parties qu'elle n'en devoit avoir, & est monstrueuse par excès; on peut, selon lui, comparer ce fraisier aux animaux monstrueux qui ont quelques parties doubles, & d'autres au contraire réunies en une seule.

Pour faire voir avec quelle circonspection on doit porter son jugement en pareille matière, M. Adanson rappelle l'orge quarré, provenu du sucron qu'il a observé en 1762; cet orge qui, comme on sait, a deux rangs de grain à chaque épi, a produit

## 76 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

quelques épis à quatre rangs ; ces grains recueillis avec soin ont donné pendant six ans quelques épis quarrés , & au bout de ce temps ont perdu tout-à-coup cette propriété , pour rentrer dans leur état naturel : nous avons rendu compte de cette observation

<sup>a</sup> Voy. Hist. en 1764<sup>a</sup> & en 1765<sup>b</sup>.

<sup>a</sup> 1764, p. 77.

<sup>b</sup> Voy. Hist. 1765, p. 50.

La plante qui mériterait mieux qu'aucune autre le nom d'espèce, seroit sans doute l'espèce de blé qu'on nomme *blé de miracle* ; cependant ce n'est qu'une monstruosité par excès ; M. Adanson s'est assuré, par des expériences suivies, qu'en le semant dans une terre trop maigre ou trop sèche, il dégénère peu à peu, & rentre dans l'espèce originaire dont il est sorti, qui est celle qu'on nomme *grossët*, & qu'on cultive dans les provinces méridionales du royaume.

M. Adanson se croit donc autorisé à rejeter absolument la production de nouvelles espèces ; il demeure d'accord que par le secours de fécondations étrangères, qui cependant ne peuvent avoir lieu qu'entre des individus de la même espèce, ou entre des espèces peu différentes, on peut obtenir des variations & des monstruosités singulières, mais qui ne seront pas des changemens d'espèce ; ces changemens ne se peuvent guère opérer que dans les plantes, il est très-difficile d'en opérer de pareils sur les arbres ; la longueur du temps nécessaire pour voir l'effet des fécondations étrangères ; & l'assiduité qu'exigent des observations de cette espèce ont empêché jusqu'ici qu'on ait pu s'en assurer.

On ne doit pas au reste s'étonner que l'art & même le hasard aient produit de pareils phénomènes : la culture, le terrain & sur-tout le climat, opèrent journellement des changemens encore plus surprenans & qui feroient même méconnoître ces plantes par des Botanistes peu exercés : le tabac, le ricin ou *palma christi*, qui sont ici au rang des plantes annuelles, forment en Afrique des arbrisseaux vivaces. M. Adanson même est parvenu à faire passer deux hivers à des plantes de tabac ; mais ces changemens, quelques grands qu'ils soient, ne sont pas pour cela des changemens d'espèces.

Il suit de tout ce que nous venons de dire, que tous les exemples allégués pour preuve du changement dans les espèces

ou la production de nouvelles races, ne sont que des variations ou des monstruosités; que l'examen de ces changemens exige l'attention la plus scrupuleuse; & qu'enfin il paroît que la transmutation des espèces n'a pas plus lieu dans les plantes que dans les animaux. Les écarts même de la Nature ne lui sont permis que dans certaines bornes au-delà desquelles tout rentre dans l'ordre établi par la sagesse du Créateur; c'est par cette judicieuse réflexion que M. Adanson termine son Mémoire.

## OBSERVATIONS DE BOTANIQUE;

## I.

ON n'est que trop instruit de la maladie nommée *ergot*, qui affecte quelquefois le seigle, & des suites funestes de l'usage de ces grains viciés; l'Académie en a rendu compte en plus d'un endroit de son Histoire \*, mais on étoit communément persuadé que cette espèce de maladie n'attaquoit que le seigle. Le Père Cotte, de l'Oratoire, Correspondant de l'Académie, a trouvé cette année 1769, aux environs de Montmorency, dix épis de froment dont presque tous les grains étoient ergotés; les moissonneurs l'ont assuré qu'ils en avoient remarqué beaucoup d'autres. M. Royer, savant Botaniste & ami du Père Cotte, lui a dit plusieurs fois que dans les différens cantons où l'avoient conduit ses herborisations, il avoit trouvé beaucoup de fromens ergotés; & l'Historien de l'Académie peut certifier qu'il en a recueilli lui-même, en 1749, une assez grande quantité dans un champ de blé barbu près de Bayeux.

\* Voy. Hist.

1710, p. 61;

&amp; Mém. 1748,

p. 528,

## II.

Le Bambou, le plus grand des roseaux connus; croît naturellement dans l'Inde & dans l'Afrique; on croit qu'il a été transporté dans les îles du vent de l'Amérique, par l'escadre de M. de Bompard en 1759, & il y a prodigieusement multiplié; le terrain le plus propre au bambou, comme à tous les autres roseaux, est un sol léger & frais, comme les bords des rivières; il se multiplie

de boutures, chaque noeud portant le germe de la racine & des jets. Cette plante exige les plus fortes chaleurs ; mais pendant leur durée, la végétation est étonnante ; chaque brin, gros comme le bras ou la jambe, s'élevant, dans l'espace de quelques mois, jusqu'à 40 ou 50 pieds de hauteur, suivant la qualité du terrain. Lorsque les fouches sont suffisamment espacées, elles peuvent produire jusqu'à cent jets & plus ; ces fouches ne portent des brins de cette force que lorsqu'elles sont bien formées, c'est-à-dire de deux ou trois ans, & il n'en sort jamais du même endroit où on en a coupé, mais à côté : le bambou ayant en sortant toute la grosseur dont il est susceptible, & s'élevant si rapidement à sa hauteur, le reste de la végétation est employé à remplir l'intérieur des tiges & à pousser les feuilles qui ne paroissent qu'alors, & dont les animaux sont très-friands : le développement de ces feuilles se fait successivement en descendant, & elles partent de chaque noeud dont il sort diverses branches lorsque le bambou est mûr, c'est-à-dire depuis trois jusqu'à six ans, suivant la grosseur. On reconnoît la maturité à la couleur de jaune-orangé que prennent les feuilles & le corps du roseau, pour lors il est très-dur ; son écorce serrée & très-polie le défend des impressions de l'eau & du Soleil, & il est alors très-solide, l'intérieur en étant presque entièrement rempli.

Ce roseau est d'un usage infini dans les Colonies ; on en fait des pieux pour entourer les champs, & il arrive souvent que ces espèces de haies deviennent vivantes, les pieux prenant quelquefois racines ; on en fait des chevrons, des sablières & des faitages pour les cases à Nègres ; en le refendant, il donne de la latte, du cercle & du clissage pour ces cases : en un mot, on peut dire que cette production est une des plus utiles qui ait été transportée aux îles. Tout ce détail est tiré d'une lettre de M. Dubuiffon, habitant de Saint-Domingue, à M. de Bory, qui l'a communiquée à l'Académie.

CETTE année, M. Sieuve, de Marseille, présenta à l'Académie un Ouvrage *sur les moyens de garantir les Olives de la piqure des Insectes, & sur une nouvelle méthode d'en extraire une huile plus abondante & plus fine, par le moyen d'un moulin de son invention, avec la manière de la garantir de toute rancissure.*

L'Ouvrage de M. Sieuve est divisé en trois parties ; dans la première, il indique les différentes espèces d'olives, les accidens auxquels elles peuvent être sujettes, & les moyens de les prévenir.

On cultive en Provence, six espèces différentes d'olives ; M. Sieuve examine les avantages & les défavantages de ces différentes espèces, soit par rapport à la quantité d'huile, soit eu égard à la qualité plus ou moins parfaite, c'est à raison du peu d'huile que fournissent les olives d'une certaine espèce qu'on réserve les plus belles de cette espèce pour les saler, & ce sont ces olives qu'on nous apporte en baril, & qu'on nomme *picholines*, nom qui leur vient de celui de Picholini, qui a inventé la manière de les apprêter, & non, comme bien des gens le prétendent, de ce qu'elles sont plus petites que quelques autres espèces d'olives, ce qui soit dit en passant.

La sécheresse ou les pluies excessives nuisent beaucoup aux olives, mais l'ennemi le plus redoutable qu'elles aient est un petit ver qui s'insinue au dedans du fruit, & en mange si bien la substance, que souvent il laisse le noyau à sec ; la perte que cause cet insecte est immense, M. Sieuve prouve dans son Ouvrage qu'elle est souvent de la moitié de l'huile qu'on auroit recueillie.

On peut bien juger qu'il n'a pas négligé d'examiner un ennemi si terrible ; il a découvert qu'il venoit d'une mouche assez petite, d'une couleur à peu près semblable à celle d'une jeune abeille : cette mouche pond ses œufs dans les gerçures du tronc des oliviers ; ils éclosent peu de mois après, commencent à grimper aux branches de l'arbre dont ils rongent d'abord les feuilles, & s'établissent enfin dans le fruit qu'ils détruisent, & dans lequel ils subissent leur métamorphose. Nous ne pouvons entrer ici dans le curieux détail de toutes les opérations de cet animal, qu'a suivi



M. Sieuve sur des vers de cette espèce qu'il avoit fait éclore dans son cabinet : cet article doit être lû dans son Ouvrage.

Ce ver a cependant des ennemis parmi les insectes, les fourmis en sont fort friandes & en détruisent beaucoup; mais elles en laisseroient encore beaucoup trop pour les propriétaires des oliviers, si M. Sieuve n'avoit trouvé un moyen de garantir les olives de leurs atteintes. Nous avons dit que les mouches desquelles naissent ces vers, déposent leurs œufs dans les gerçures du tronc de l'olivier, & que de-là ils s'élevoient, en rampant, jusqu'aux branches; aux feuilles & aux fruits où ils faisoient leurs ravages : on peut donc anéantir ce ravage, en empêchant ce ver de pouvoir parvenir aux branches, & c'est ce qu'opère M. Sieuve, au moyen d'une espèce de goudron de sa composition, avec lequel il fait au haut du tronc un collier de la largeur de six doigts, ce collier devient pour les vers un obstacle insurmontable; & l'expérience lui a fait voir qu'en effet aucun des arbres qui avoient eu ce préservatif, n'avoit eu d'olives attaquées par les vers; tandis que ceux du même plant, qui n'avoient pas eu ce secours, avoient une grande partie de leurs fruits détruits ou altérés par ces insectes.

La seconde partie de l'ouvrage de M. Sieuve, a pour objet de déterminer le temps auquel on doit cueillir les olives, les précautions nécessaires pour en extraire l'huile & la manière de la conserver,

Les olives sont, selon M. Sieuve, en état de fournir la meilleure huile lorsqu'elles ont acquis une couleur rouge noirâtre, & conservent encore une certaine consistance; c'est dans ce temps qu'elles doivent être cueillies, si on en excepte cependant celles du plant sauvage qu'on peut sans risque cueillir un peu avant leur maturité.

Mais ce qu'il recommande le plus expressément, est de n'employer que la chair de l'olive à faire de l'huile : celle-ci est parfaite; & des expériences suivies, lui ont appris qu'elle se conserve plusieurs années, au lieu que celle qu'on tire du bois ou de l'amande du noyau, ou même de l'olive entière broyée à la manière ordinaire, est toujours inférieure & sujette à se rancir.

Ce ne seroit rien que d'obtenir d'excellente huile, si l'on n'avoit

n'avoit encore l'art de la conserver. M. Sieuve prouve, par plusieurs expériences délicates, que l'huile peut s'évaporer, & que cette évaporation peut la détériorer : il juge donc à propos de l'enfermer dans des vases très-exactement bouchés ; les meilleurs bouchons de liège ne suffisent pas, il faut qu'ils soient recouverts de cire ; & pour la mettre entièrement à l'abri de toute altération ; il y enferme un morceau d'éponge préparée : l'Académie n'a pu prononcer sur ce préservatif dont l'Auteur s'est réservé le secret.

Nous avons dit que M. Sieuve prescrivait de n'employer que la chair des olives pour faire l'huile : ce triage seroit long, difficile & dispendieux, avec les moulins ordinaires ; mais il devient extrêmement facile avec un moulin tout nouveau qu'il a inventé, & dont la description forme la troisième & dernière partie de son Ouvrage.

Ce moulin, duquel nous ne pouvons donner ici que la plus légère idée & qui est très-bien décrit dans l'Ouvrage de M. Sieuve, ne ressemble, en aucune façon, à tous ceux dont on a communément connoissance ; il consiste en une grande caisse oblongue, traversée vers le milieu de sa hauteur par une table toute coupée de cannelures transversales, au fond desquelles sont percés des trous en grand nombre pour permettre à l'huile de s'écouler dans le fond de la caisse : au-dessus de cette table, est suspendu à quatre cordons un morceau de bois pesant, ayant des cannelures toutes pareilles ; ce morceau de bois peut s'approcher, ou s'éloigner à volonté, de la table cannelée ; & comme il est plus court que la caisse, on le peut faire aller & venir suivant sa longueur, au moyen d'une poignée qui y est attachée ; & à l'autre bout, il y a une pièce qui, à chaque mouvement, permet aux olives de tomber, de la trémie où on les met, entre les cannelures de la table & de la pièce mobile, qu'il nomme *détritoir* ; c'est-là qu'elles sont écrasées, sans que les noyaux puissent l'être, parce qu'on a soin d'écarter suffisamment les deux pièces ; l'huile passe par les trous qui sont au fond des cannelures de la table, & tombe au fond de la caisse, qui est terminée par un entonnoir de bois, garni d'une chausse, à travers laquelle l'huile coule nette dans le baquet destiné à la recevoir ; le marc & les noyaux

restés sur la table cannelée, en sont tirés avec une espèce de râble & traités à l'ordinaire, pour en tirer une huile moins parfaite que la première, qui, comme on voit, n'est tirée que de la seule chair des olives.

Telle est, mais dans un très-grand abrégé, la construction du moulin de M. Sieuve, au moyen duquel il parvient à exécuter parfaitement ce qu'il propose; c'est par cette description qu'il termine son Ouvrage, dont l'objet est trop intéressant pour ne pas mériter toute l'attention du Public: l'examen qu'en a fait l'Académie, l'a convaincue que les expériences de l'Auteur étoient choisies avec intelligence & très-multipliées, que les choses y paroissent vues avec attention, sans précipitation, & toujours assurées par de longues épreuves; que tout y annonçoit un Observateur zélé qui a dirigé constamment les vues sur un objet utile, & qu'on a tout lieu de présumer que cet Ouvrage sera favorablement reçu du Public.





*SUR LA NATURE DES SUITES INFINIES.*

-V. les Mém.  
p. 193.

Nous ne pouvons avoir aucune idée distincte de la racine carrée de 2, qui doit cependant se trouver entre 1, racine carrée de lui-même, & 2; si l'on veut prendre 1 pour racine carrée, on verra d'abord qu'elle sera trop petite; si l'on prend  $1\frac{1}{2}$ ,

#### 84 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

elle sera trop grande, si on en ôte  $\frac{1}{8}$ , on verra qu'on en aura trop ôté; si on y ajoute ensuite  $\frac{1}{16}$ , elle se trouvera trop forte, sans qu'on puisse parvenir, par ce moyen, qu'à diminuer l'erreur, sans jamais l'épuiser, du moins dans les cas que nous avons supposés, puisque si on l'épuisait, on parviendrait à trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, donneroit 2 pour son produit, ce qui est manifestement impossible, cet arrangement de termes ayant alternativement plus & moins est ce qu'on nomme *une suite*.

Nous avons dit que les nombres irrationnels ne pouvoient être exprimés que par des suites qui donnoient moyen d'en approcher toujours, sans jamais y atteindre; mais l'usage des suites ne se borne pas là; les nombres rationnels même peuvent s'exprimer par des suites; la seule différence qu'il y a, est que ces suites se peuvent quelquefois sommer, au lieu que celles des nombres irrationnels sont essentiellement infommables, ces nombres ne pouvant par leur nature avoir d'expression finie, & exprimable en nombres.

Quelquefois ces suites ne sont pas composées de termes alternativement affectés des figures  $+$  &  $-$ , il y en a qui ne vont que par additions & d'autres par soustractions; mais de quelque espèce qu'elles soient, comme elles ne représentent jamais qu'une grandeur finie, leurs termes doivent toujours aller en décroissant, & le grand art est même de les faire décroître assez rapidement, afin qu'étant une fois parvenues à un petit nombre de termes, le reste se puisse négliger sans risque.

Comme dans le nombre des suites, il y en a qui peuvent représenter des nombres rationnels & déterminables, il seroit assez naturel de penser que toutes ces suites seroient sommables, ce qui ne seroit pas exactement vrai; un nombre rationnel peut être exprimé par une suite qui ne se laissera pas sommer: d'autres conservent exactement le caractère de suites infinies, mais après un certain nombre de termes, tous les autres parviennent à se détruire & deviennent égaux à 0; d'où il suit qu'elles n'ont qu'une apparence d'infini sans en avoir la réalité; souvent la même grandeur se pourra exprimer par deux suites, dont l'une sera sommable, & l'autre ne se pourra sommer: c'est au Calculateur

habile à reconnoître toutes ces circonstances & à savoir en profiter.

Nous n'avons jusqu'ici parlé que des suites numériques qui n'ont que la quantité discrète pour objet ; mais la Géométrie qui s'occupe de la quantité continue , a aussi les siennes , & l'Algèbre qui soumet à son calcul l'une & l'autre quantité , doit avoir aussi cette même forme d'exprimer les quantités qui se refusent à ses règles ordinaires & qui ne peuvent s'exprimer autrement , elles y sont même bien plus fréquentes & bien plus diversifiées par la nature & par l'expression des quantités qu'on y fait entrer ; nous avons cru ce préliminaire nécessaire pour faciliter au Lecteur l'intelligence du travail de M. le Marquis de Condorcet , en présentant une idée des principes métaphysiques sur lesquels toute la théorie des suites est fondée.

Nous avons dit que les suites algébriques étoient bien plus diversifiées que les suites numériques ; celles-ci n'admettent que les nombres positifs ou négatifs & leurs fractions , mais les suites algébriques admettent les radicaux , les coefficients & les exposans qui ne peuvent trouver place dans les suites numériques ; souvent même ce sont ces quantités qui déterminent la marche de ces suites.

Puisque la somme infinie des termes qui composent la suite ; ne représente que la fonction même qui a été réduite sous cette forme , il est clair que si l'on prend l'expression analytique de la somme des termes de cette suite , jusqu'à un certain terme marqué , cette somme représentera la première fonction qui a donné lieu à la suite , moins les termes laissés qui peuvent être regardés comme formés par une autre fonction affectée des coefficients & des exposans qui constituent la loi de la suite.

Le terme auquel on coupe , pour ainsi dire , la série , n'est pas arbitraire ; & pour peu qu'on y fasse attention , on verra que souvent en rendant le nombre de termes qui le précèdent , plus grand que tout nombre donné , ce qui reste au-delà n'est plus composé que d'infimemens petits ; que par conséquent la nouvelle fonction est , relativement à la première , regardée comme nulle , & qu'on a la véritable somme de la suite.

Si au contraire le nombre des termes où l'on coupe la suite est fini, on n'aura plus le même résultat, la somme de la première partie ne représentera plus la totalité de la fonction qui l'avoit formée, & la nouvelle fonction qui doit servir à former le reste de la suite, ne sera plus un infiniment petit, mais une quantité finie: tout ceci fait voir qu'il y a des suites qu'on peut réduire plus ou moins facilement à une valeur déterminée, & d'autres encore plus rébelles qui ne s'y laissent jamais réduire.

Quelquefois ces suites rébelles se peuvent convertir en d'autres suites dont on peut plus aisément obtenir la valeur, & pour lors les coefficients de la nouvelle suite seront donnés par une suite infinie; il est évident que cette nouvelle suite doit avoir une fonction génératrice, & voici comment M. le Marquis de Condorcet parvient à la trouver.

On peut dans cette recherche avoir pour but, ou de trouver la fonction génératrice de la suite, ou d'en déterminer la somme. Dans le premier cas, il faudra substituer à la suite qui représente les coefficients, non leur somme, mais leurs fonctions génératrices, & prendre ensuite la fonction génératrice de la nouvelle suite; & cette fonction génératrice de la suite des coefficients se trouve, en multipliant tous les termes par une quantité constante, élevée successivement à toutes les puissances: si au contraire on cherchoit la somme d'une suite proposée convertie en une nouvelle suite, on prendroit la somme de la suite des coefficients & celle de la suite nouvelle; mais de quelque manière qu'on puisse opérer, la fonction génératrice de l'une & la somme de l'autre, ne se pourront pas toujours prendre pour la suite même ou pour sa somme; la méthode est sujette à des restrictions que M. le Marquis de Condorcet ne manque pas d'indiquer; ce qui, au reste, ne doit pas étonner: si la méthode étoit générale, il n'y auroit point de suite dont on ne pût avoir la valeur exacte, & il y en a certainement qui ne se laissent jamais réduire, & qui s'enfoncent si avant dans l'abyme de l'infini, que tout l'art de l'analyse est insuffisant pour les en rappeler.

Jusqu'ici nous n'avons considéré les suites que comme composées de quantités, à la vérité, croissantes ou décroissantes à l'infini,

mais cependant finies, ou au moins toutes du même ordre; ce n'est cependant pas là toute leur étendue, elles admettent les quantités différentielles, & font partie du calcul infinitésimal.

Il étoit donc essentiel d'examiner la nature des suites qu'on peut employer dans ces deux cas différens; & c'est-là l'objet du travail de M. le Marquis de Condorcet, duquel nous avons à parler.

Dans le cas où la série représente une équation finie, il se trouve souvent que la série présente des valeurs non continues; quoique l'expression réelle les donne continues; si, par exemple, la série représente une courbe, elle paroîtra donner des angles finis, au lieu des angles infiniment petits qui constituent la nature de la courbe. Voici comment on peut donner la raison de cette différence; on n'est obligé essentiellement d'employer les suites, que lorsque la quantité qu'elles représentent n'a pas & ne peut pas avoir d'expression réelle, on en approche par ce moyen aussi près qu'on le veut; mais souvent, & c'est le cas dont nous parlons; la série ne représente pas toujours la quantité même que l'on cherche, mais une autre qui en diffère infiniment peu: dans l'hypothèse présente, la série ne représente pas la courbe même, mais deux courbes paraboliques qui l'accompagnent & dont les ordonnées sont représentées par les plus & les moins de la série; il n'est donc pas nécessaire que ses termes suivent la loi de continuité; il n'est question que de voir si ces valeurs non continues représentent la grandeur réelle en son entier, il est indifférent qu'elles en diffèrent quant à l'expression; mais si une solution unique de cette espèce embrassoit successivement diverses racines, il faudroit qu'elles eussent une expression commune, sans quoi la solution seroit illusoire: toutes ces restrictions n'ont pas lieu quand la série est divergente, parce qu'en y substituant la fonction génératrice, la solution se trouve avoir d'elle-même l'étendue nécessaire.

S'il étoit question d'une suite qui représentât une équation différentielle aux différences ordinaires, il resteroit des coefficients arbitraires en nombre égal à celui de l'ordre de l'équation, & un autre coefficient donné par une équation d'un degré qui dépend de celui où les variables sont élevées dans la proposée. Mais cette



suite ne donnera aucun moyen de discerner si l'intégrale est algébrique ou non, & au lieu d'une courbe continue, mais transcendante qu'elle devoit donner, elle n'offre que des parties interrompues de courbes paraboliques, sans offrir aucun moyen de reconnoître celles qu'on devoit choisir. Il faut donc, pour employer une série convergente à la solution d'une équation différentielle, lui supposer la forme la plus compliquée qu'elle puisse rigoureusement avoir, & on peut s'attendre que plus la solution sera compliquée, plus les inconvéniens se multiplieront, & plus il sera nécessaire de mettre en usage toutes les ressources de l'art pour vaincre la difficulté.

On conçoit aisément que toutes ces règles avoient besoin d'être éclaircies par des exemples; c'est aussi ce qu'a fait M. le Marquis de Condorcet, par plusieurs exemples choisis avec soin, pour présenter les différentes difficultés qui peuvent s'offrir dans la solution des Problèmes où l'on emploie les suites.

Il en résulte que l'emploi des suites ne peut être avantageux que lorsque la forme que doit avoir l'équation est connue, du moins pour chaque cas particulier; que souvent le travail nécessaire pour parvenir à connoître la fonction génératrice est plus long que celui qui pourroit donner une solution directe; qu'on ne doit employer les séries que dans les cas où elles peuvent abrégier le calcul; & qu'on ne peut avoir de méthode vraiment générale pour la solution approchée, sans en avoir pour la solution exacte. C'est encore ce que M. de Condorcet appuie de plusieurs exemples, qui font, pour ainsi dire, toucher au doigt tout ce qu'il vient d'avancer.

M. de la Grange a donné, pour les équations différentielles, une méthode générale d'approximation; mais celle de M. de Condorcet est différente, & l'Auteur démontre comment elle est également bonne pour tous les degrés; elle réduit les Problèmes à la sommation des suites récurrentes, ou à la recherche de fonctions rationnelles de quantités données; & c'est ce qui l'a engagé à terminer ce Mémoire par quelques réflexions sur cette matière, au moyen desquelles on peut toujours déterminer les cas dans lesquels  
la suite

la suite proposée peut être aisément sommée, & ceux où cette sommation est impossible, ou du moins sujette à trop de difficultés pour être entreprise.

On voit assez, par le court exposé que nous venons de faire du Mémoire de M. de Condorcet, combien il contient de vues utiles; mais ce n'est qu'en le lisant qu'on peut en apercevoir toute l'élégance, & voir avec quelle adresse il a su se tirer des difficultés qu'il a cherché pour ainsi dire à affronter.

Le travail de M. de Condorcet sur les suites, n'est pas le seul que l'Académie ait eu sur cette matière; elle a été traitée par M. l'abbé Bossut, mais sous un autre point de vue; il s'agit dans son Mémoire, d'une manière de sommer les suites dont les termes sont des puissances semblables de sinus ou de cosinus d'arcs qui forment entr'eux une progression arithmétique. V. les Mém.  
P. 453.

Ce même Problème avoit été déjà résolu par M. Euler, dans son Ouvrage intitulé: *Introductio ad Analysim Infinitorum*; & il rappelle dans cet ouvrage ces sortes de suites aux suites récurrentes; mais quoique cette méthode soit très-savante, elle n'est ni simple ni facile, & les recherches de M. l'abbé Bossut l'ont conduit à une autre méthode également simple & facile, & qui peut aisément s'appliquer à toutes les puissances des sinus ou cosinus des arcs proposés.

Cette méthode a pour fondement sept théorèmes si simples, qu'ils n'ont pas besoin de démonstration, & qu'il suffit de les énoncer. L'application de ces théorèmes à la solution de quatorze Problèmes forment le reste du Mémoire de M. l'abbé Bossut; mais ces solutions n'étant que calcul, ne peuvent être présentées plus en raccourci, & ne sont nullement susceptibles d'extrait; il faut les lire dans le Mémoire même, pour y remarquer la finesse & la facilité avec lesquelles ce calcul est conduit.

Nous renvoyons entièrement aux Mémoires:  
Les Recherches de M. d'Alembert, sur le Calcul intégral. V. les Mém.  
p. 73.





## ASTRONOMIE.

*SUR LA COMÈTE DE 1769.*

V. les Mém.  
P. 49.

**L**A Comète de 1769 est une de celles dont on a eu le plus grand nombre de bonnes Observations ; elle a été observée par M.<sup>rs</sup> Messier & de la Lande à Paris, M.<sup>rs</sup> d'Arquier à Toulouse, de Saint-Jacques & Poitevin à Marseille, le P. Audiffredi à Rome, le P. de la Grange à Milan, le P. Mayer à Pétersbourg, M. Liuntberg à Gottinghen, & M. Tofigno, Commandant des Gardes-marines à Cadiz.

Cette multitude d'observations a engagé M. de la Lande à rechercher les élémens de la théorie de cette Comète, suivant les différens Observateurs ; nous allons, avant que de rendre compte de ses résultats, donner une légère idée de la théorie qui a dirigé son calcul.

Pour calculer l'orbite d'une Comète, il faut en avoir au moins trois observations. On trace alors un cercle qui représente l'orbite de la Terre, qu'on divise en ses signes & en ses degrés. On place la Terre sur ce cercle, aux trois positions qu'elle avoit lors des trois observations ; & comme on a, dans chaque observation, la distance apparente de la Comète au Soleil, ou l'angle que font les deux lignes qui vont de la Terre à cet astre, & de la Terre à la Comète, on trace aussi ces lignes sur la figure. On a donc trois lignes indéfinies ou données seulement de position qui représentent les rayons visuels, par lesquels la Comète a été vue de la Terre ; & il ne s'agit plus que de déterminer sur ces lignes les points par où passe l'orbite de la Comète.

Pour cela on doit remarquer que les Comètes, de même que les Planètes se meuvent dans des orbites elliptiques, à l'un des foyers desquelles se trouve le Soleil, & que comme ces dernières

leurs rayons vecteurs décrivent des aires elliptiques; proportionnelles au temps. On peut même, pour plus de facilité, supposer que cette orbite, du moins dans la petite partie que nous en apercevons, soit une parabole, parce qu'elle n'en diffère pas sensiblement. On préparera donc plusieurs paraboles, de différentes amplitudes, divisées suivant la loi que nous venons d'exposer: on placera successivement leur foyer sur le point qui représente le Soleil dans la figure qu'on a décrite, & on verra celle qui donnera entre les deux premières lignes tirées de la Terre à la Comète, un intervalle proportionnel au temps écoulé entre les deux premières observations, & un autre intervalle proportionnel au temps écoulé entre la seconde & la troisième.

Cette opération graphique suffit pour avoir à peu près la position de l'axe de l'orbite de la Comète, sa distance au Soleil, l'instant de son périhélie, &c. mais l'Astronomie moderne ne se contente pas de déterminations peu précises, & il a fallu que le calcul vint au secours de la main; c'est cependant toujours la même théorie qui le dirige, & il ne sert qu'à parvenir à une plus grande exactitude.

M. de la Lande a calculé les élémens de la théorie de la Comète, suivant toutes les observations qui lui étoient parvenues entre les mains, & en faisant toutes les fausses positions nécessaires; il résulte de son travail, que le passage de cette Comète, par son périhélie, a dû être le 7 Octobre 1769, à 8<sup>h</sup> 50'; le lieu du périhélie à 25<sup>d</sup> 24' 34" du Lion; le lieu du nœud ascendant à 25<sup>d</sup> 9' 51" de la Vierge; l'inclinaison de 41<sup>d</sup> 0' 21"; & la distance périhélie de 0,11586; mais en même temps qu'il donne ces élémens, il avertit que ne les ayant déduits que de vingt-cinq jours d'observation, ils pourroient être sujets à quelque erreur; cependant ces mêmes élémens ont assez bien représenté les lieux de la Comète observée les 8 Août & 15 Septembre.

En comparant les élémens de cette Comète à ceux de toutes les Comètes connues, M. de la Lande s'est assuré qu'elle n'est aucune des cinquante-cinq Comètes qui ont été calculées jusqu'ici, & qu'elle fait la cinquante-sixième.

Il suit encore des élémens déterminés par M. Clairaut, que

cette Comète n'est pas de celles qui, par leur proximité à la Terre, y pourroient causer des effets sensibles (si cependant il y en a dans ce cas); il faudroit pour cela qu'un des points dans lesquels l'orbite de la Comète coupe le plan de l'écliptique, rencontrât précisément la circonférence de l'orbite terrestre, & que la Comète & la Terre passassent en même temps l'une & l'autre par ce point d'intersection; assemblage si difficile à faire, qu'on doit avoir sur ce point la plus parfaite assurance.

La Comète a reparu après son passage par son périhélie, & elle a été observée dans cette seconde apparition: M. de la Lande a recherché les élémens de la Comète, il ne les a pas trouvés précisément les mêmes que ceux qui avoient été donnés par les premières observations. Cette différence a paru à M. de la Lande devoir être attribuée à ce que dans ses recherches il avoit employé, selon l'usage, une orbite parabolique, différente de l'orbite véritable, qui est elliptique.

M. de la Lande a reçu des observations de la Comète, faites par M.<sup>rs</sup> Wargentin & Wallot, au commencement de Décembre; celles-ci donnent des élémens encore plus différens que les autres, parce que l'ellipse diffère encore plus de la parabole dans ces points éloignés du périhélie; d'où il conclut qu'en apportant dans le calcul fait sur l'ellipse la plus grande exactitude, on pourroit peut-être calculer le retour de la Comète.

D'après les élémens calculés par M. Zanotti, la queue de la Comète observée le 12 Septembre, de 74 degrés, doit avoir, suivant le calcul de M. de la Lande, plus de douze millions de lieues.

Un Astronome Anglois, nommé M. Dunn, avoit avancé que cette Comète s'approchoit beaucoup de la planète de Vénus; M. de la Lande a eu la curiosité de vérifier cette assertion, il a comparé exactement l'orbite de la Comète à celle de Vénus, & il résulte de cette comparaison, que lorsque la Comète avoit traversé le plan de l'orbite de Vénus, tant avant qu'après son passage par le périhélie, elle étoit extrêmement éloignée de cette planète. Nous venons de voir combien il faudroit faire concourir de hasards pour qu'une Comète & une Planète pussent se rencontrer;

mais ces hasards ne sont hasards que pour nous, ils sont des suites de l'ordre que l'Etre suprême a établi dans ses ouvrages, & qu'il ne permet à aucune de ses créatures de troubler.

*SUR LA CONJONCTION ÉCLIPTIQUE  
DE VÉNUS ET DU SOLEIL,*

*Du 3 Juin 1769.*

Nous avons rendu compte, en 1761\*, des Observations du passage de Vénus sur le disque du Soleil, qui arriva le 6 Juin de cette année, & nous y avons exposé tout ce que l'importance de cette observation avoit engagé à faire pour en assurer le succès & la précision, & pour en tirer le plus grand parti possible pour la détermination de la parallaxe du Soleil.

\* *Voy. Hist.*  
1761, p. 98.

Celui qui est arrivé le 3 Juin 1769, n'étoit pas moins intéressant pour l'Astronomie; il l'étoit même d'autant plus qu'il s'écoulera plus d'un siècle avant qu'on puisse revoir un pareil Phénomène; circonstance bien propre à réveiller la curiosité des Observateurs, & à leur faire redoubler leurs efforts pour ne pas laisser échapper une circonstance si précieuse.

Le temps avoit été très-peu favorable, à Paris & aux environs, la veille & la surveillance du Phénomène; le jour même un orage qui s'éleva peu auparavant l'observation, fit craindre qu'on ne pût la faire. Le Ciel se découvrit cependant presque au moment de l'observation; & nous allons essayer de rendre compte de toutes celles qui ont été faites, & qui sont venues à la connoissance de l'Académie.

Le Roi étant alors à Saint-Hubert, & ayant désiré que l'observation se fit en sa présence, M.<sup>rs</sup> le Monnier & de Chabert s'y transportèrent, munis de tous les instrumens nécessaires, & sur-tout d'une excellente lunette de 18 pieds, & d'une lunette achromatique de 10 pieds; ils s'assurèrent de l'état de leur pendule, par cinq hauteurs correspondantes, qu'ils furent assez heureux pour

V. les Mém.  
P. 187.

obtenir la veille; mais ils ne purent en avoir le jour de l'observation, & ils furent obligés d'y employer d'autres moyens d'autant plus pénibles qu'il faut suppléer au défaut d'exactitude, par la multiplicité des observations.

Tout étant en état, ils attendirent, avec une impatience mêlée d'inquiétude, le moment de l'observation principale; mais ils ne purent obtenir que le contact interne, le Soleil ayant été couvert pendant le temps du premier; il leur parut se faire à la lunette simple qu'employoit M. de Chabert, à  $7^h 34' 32''$  de temps vrai, & à la lunette achromatique de M. le Monnier, à  $7^h 34' 56''$ . Vénus paroissoit très-mal terminée & très-irrégulière, à cause du voisinage de l'horizon, le Soleil n'étant alors élevé que d'environ deux degrés, de manière qu'il fut impossible de mesurer son diamètre.

V. les Mém.  
pages 229 &  
245.

A Paris, M.<sup>re</sup> de Thury, Maraldi, le duc de Chaulnes, & du Séjour, l'observèrent à l'Observatoire royal; ils ne purent observer que le contact interne. M. de Thury l'observa à  $7^h 38' 53''$ , avec une excellente lunette de Dollond de 3 pieds & demi; M. Maraldi à  $7^h 38' 50''$ , avec une lunette achromatique de 36 pouces, qui faisoit l'effet d'une lunette ordinaire de 15 pieds; M. le duc de Chaulnes, à  $7^h 38' 58''$ ; & M. du Séjour, à  $7^h 38' 43''$ . Les bords du Soleil & de Vénus étoient extrêmement ondoyans; ce qui rend incertain le diamètre de cette Planète, que M. de Thury observa une fois de  $1' 1''$ , & la seconde fois de  $1' 1'' \frac{1}{2}$ ; il ne fut pas possible, par la même raison, de faire aucune observation assez exacte pour tracer la route de Vénus sur le Soleil. M. de Thury avoit précédemment averti que la conjonction devoit arriver plus tard d'environ 4 à 5 minutes qu'elle n'avoit été annoncée; & il avoit déterminé cette différence par le calcul tiré des Tables de M. son Père, corrigées par l'observation du premier passage.

V. les Mém.  
p. 417.

M. de la Lande, & M. l'abbé Marie, Professeur de Mathématiques au collège Mazarin, l'observèrent dans l'observatoire établi par feu M. l'abbé de la Caille dans ce collège. Ils ne purent ni l'un ni l'autre obtenir le contact externe; le Soleil ne s'étant découvert qu'après cette phase. M. l'abbé Marie estima l'entrée

du centre à  $7^h 29' 7''$ ; à  $7^h 38' 10''$  Vénus étoit déjà entrée presque toute entière; mais la pluie qui survint ne permit pas d'observer immédiatement le contact interne; & M. de la Lande ne put le conclure qu'à  $7^h 38' 45''$ .

L'observation fut faite au Cabinet de Physique du Roi, établi à la Muette, par D. Noël, Garde de ce Cabinet, & M.<sup>rs</sup> de Bory, Bailly, l'abbé Bourriot, & de Fouchy: le mauvais temps, dont ils ne furent pas plus exempts que les autres, leur causa quelque embarras pour régler la marche de leurs pendules; elles le furent cependant, & malgré le mauvais temps qui dura toute la journée, ils se préparèrent à l'observation. V. les Mém. P. 531.

M.<sup>rs</sup> de Fouchy & Bailly se servirent chacun d'un excellent télescope de 30 pouces de foyer, ayant une ouverture de 4 pouces  $\frac{1}{2}$ ; M. de Bory employa une lunette achromatique de 5 pieds de longueur; & M. l'abbé Bourriot, une lunette de même espèce de 5 pieds, dont il a lui-même travaillé l'objectif.

A 6 heures le Ciel se couvrit de nuages très-épais, qui inquiétèrent fort les Observateurs; cependant vers  $7^h 10'$  on aperçut un instant le Soleil, & ç'en fut assez pour être certain que Vénus n'étoit pas encore entrée sur son disque; à  $7^h 21' 6''$  le Soleil parut encore un instant, & M. Bailly s'écria que le bord du Soleil étoit légèrement entamé; à  $7^h 21' 51''$  le Soleil reparut, & on fut certain que le premier contact étoit fait, l'échancrure étant très-sensible; mais pendant qu'on se dispoit à observer le contact intérieur, il vint un petit nuage couvrir la partie du Soleil où étoit Vénus; enfin ce nuage se dissipa, & M.<sup>rs</sup> de Bory & de Fouchy aperçurent à  $7^h 38' 33''$ , que le contact s'étoit fait il y avoit environ 2 secondes; & tous les autres Observateurs en portèrent le même jugement: d'où il suit qu'il s'étoit fait à  $7^h 38' 31''$ ; ce qui, réduit au méridien de l'Observatoire revient à  $7^h 38' 45'' \frac{1}{2}$ . La pluie qui survint ne permit plus de faire d'autres observations.

Pendant que les Astronomes de Paris tâchoient de tirer parti de l'observation de ce Phénomène, M. Pingré, qui se trouvoit alors au Cap-françois de Saint-Domingue; par la latitude septentrionale de  $19^d 57' 3''$ , &  $4^h 58'$  à  $59'$  à l'occident de Paris, V. les Mém. P. 513.



l'observoit de son côté. Presque tous les jours, dans cette saison ; le temps est serein le matin, mais sur les cinq heures le Ciel s'obscurcit, & il se forme un orage qui dure fort avant dans la nuit ; heureusement le 3 Juin fut privilégié, & l'orage ne commença à se former qu'après l'observation.

M. Pingré s'étoit associé M.<sup>rs</sup> de Fleurieu, commandant la frégate l'*Isis*, M. Saqui Destourès, commandant le détachement des Gardes de la Marine à bord de la même frégate, & M. le Chevalier de la Fillière, Officier des vaisseaux du Roi, auxquels se joignirent dans le cours de l'observation, M. de Foucault, Officier des vaisseaux du Roi, & M.<sup>rs</sup> les Chevaliers d'Isle & de l'Éguille, Gardes de la Marine.

Ils étoient suffisamment munis d'instrumens, & ils avoient établi leur observatoire dans une maison appelée *la maison-rouge*, située hors la ville du Cap-françois, au nord ; cette maison est située sur une petite hauteur, & une gorge entre deux montagnes, permet de suivre le Soleil jusque vers six heures du soir ; ce qui seroit impossible par-tout ailleurs dans la ville & dans les environs.

L'état de la pendule avoit été constaté par des hauteurs correspondantes, prises depuis le 30 Mai jusqu'au 10 Juin.

Le jour de l'observation venu, les quatre Observateurs se disposèrent à la faire, & convinrent entr'eux que personne n'annonceroit aux autres l'instant du contact, ni par paroles, ni par signes, mais qu'ils le détermineroient chacun séparément. Voici le résultat réduit au temps vrai : M. de Fleurieu détermina le contact extérieur à  $2^h 26' 14'' \frac{1}{2}$  ; M. le Chevalier de la Fillière, à  $2^h 26' 16'' \frac{1}{2}$  ; M. Destourès, à  $2^h 26' 20'' \frac{1}{2}$  ; & M. Pingré, à  $2^h 26' 12'' \frac{1}{2}$ . Le second contact, ou le contact intérieur, fut observé par M. de Fleurieu, à  $2^h 44' 45''$  ; par M. le Chevalier de la Fillière, à  $2^h 44' 41''$  ; par M. Destourès, à  $2^h 44' 50''$  ; & par M. Pingré, à  $2^h 44' 44''$ .

Cette première observation finie, M.<sup>rs</sup> de Fleurieu & Pingré s'appliquèrent à déterminer d'instant en instant la position de Vénus sur le disque du Soleil, en faisant passer Vénus & les bords de cet astre par le fil horizontal & le fil vertical du quart-de-cercle & d'un instrument des passages ; ces observations, extrêmement multipliées,

multipliées, donnoient la trace de l'orbite de Vénus sur le disque solaire, & elles furent continuées jusqu'à ce que vers les  $5^h \frac{1}{2}$  le Soleil fut couvert par les nuages, c'est-à-dire, pendant près de trois heures. Pendant ce même temps, M. Destourès prenoit à chaque instant la moindre distance de Vénus au bord du Soleil, avec un micromètre soigneusement examiné. Il résulte de toutes ces observations, que la moindre distance des centres du Soleil a été au Cap de  $10' 2''$ , ou tout au plus de  $10' 7''$ ; car les nuages qui survinrent ne permirent pas de l'observer immédiatement, & elle a seulement été conclue des observations faites avant que le Soleil fût caché.

Un des endroits de la Terre où l'on pouvoit tirer le plus grand parti de cette observation étoit le cap Saint-Lucas, à la pointe méridionale de la Californie; feu M. l'abbé Chappe s'étoit offert pour aller la faire dans cet endroit, & quoique le détail de cette opération ne soit parvenu que plus d'un an après, l'Académie a cru devoir insérer ici l'abrégé de cette importante observation, qui lui coûte si cher, par la perte de ce célèbre Académien qu'elle a causée.

M. l'abbé Chappe s'étoit établi près du cap *San - Lucar* de Californie, au village de Saint-Joseph, composé de cabanes couvertes de roseaux; une de ces cabanes fut destinée à servir d'observatoire; on en perça le toit, & on y substitua des voiles qu'on pouvoit mettre & retirer aisément, & qui en formoient une espèce de tente. Les instrumens y furent placés, M. l'abbé Chappe, avec toute la petite troupe, à laquelle s'étoit joint Don Vincent d'Oz; Officier Espagnol, s'y établirent, & ils commencèrent à déterminer la position de cet observatoire, qui se trouve être par  $23^d 3' 20''$  de latitude boréale, &  $7^h 28' 10''$  à l'occident de Paris.

Les préparatifs nécessaires étant faits, & le jour de l'observation ayant été très-serein, M. l'abbé Chappe observa le premier contact de l'entrée à  $23^h 59' 17'' 2'''$  du 2 Juin \*; il estima l'entrée du centre à  $0^h 5' 15''$  du 3 Juin, le contact interne de l'entrée à  $0^h 17' 26'' 52'''$ ; le premier contact de la sortie à  $5^h 54' 50'' 18'''$ ;

\* Le jour astronomique se compte depuis midi & non depuis minuit comme le jour civil.

la sortie du centre fut estimée à  $6^h 3' 57'' 12'''$ , & le dernier contact parut se faire à  $6^h 13' 19'' 7'''$ .

Il résulte de ces observations, que la durée du passage ou la demeure du centre de Vénus sur le disque du Soleil, a été de  $5^h 55' 42'' 45'''$ , & que le milieu du passage s'est fait le 3 Juin à  $3^h 6' 13'' 20'''$ .

Pendant la durée de ce passage, M. l'abbé Chappe observa plusieurs fois le diamètre de Vénus, avec son micromètre, & le trouva de  $57''.8$ ; le même diamètre, mesuré par le temps qu'il mit à traverser le bord du Soleil, fut trouvé de  $56''.4$ .

Les Astronomes de l'Académie n'ont pas été les seuls qui aient observé ce phénomène; il l'a été dans plusieurs endroits du royaume & des Pays étrangers. A Brest, M. de Verdun, Officier de Marine, & M.<sup>rs</sup> Fortin, le Roy & Blondeau firent l'observation avec toute l'exactitude possible; & cette observation fut accompagnée d'une circonstance singulière. Toutes les observations de Brest donnent les contacts plus tard, toute réduction faite, qu'ils n'ont été observés à Paris; mais cet effet n'a, selon M. de la Lande, été produit que parce que l'effet de la parallaxe étoit plus grand à Brest qu'à Paris.

Les autres Observateurs François qui ont communiqué leurs observations à l'Académie, ont été M. le Président de Saron, à Saron; M. d'Arquier, à Toulouse; M. Diquemar, au Havre-de-Grace; M.<sup>rs</sup> l'Abbé Faugère & de la Roque, à Bordeaux; le P. Christophe, Capucin, à la Martinique; M. le Prince de Croy, à Calais; M. Tourmant, à Laon; M.<sup>rs</sup> Bouin & Dulague, à Rouen; M. Pigott, à Caen; M. de Romas, à Nérac; M. d'Après, à Kergars; M. de Saint-Jacques de Silvabelle, à Marseille; M. de Garipuy, à Toulouse; M. de Nancia, près de Nanci; M. Prolange, à Soissons; M. de Relingue, à Montreuil-sur-mer; M.<sup>rs</sup> Bouillet, de Mansé & Forès, à Béziers.

Les Observateurs étrangers, dont l'Académie a reçu les observations, sont M. le Docteur Bévis, à Londres; M.<sup>rs</sup> Magallens, Maskelyne, Dollon & Hirts, à Greenwich; le Lord Alemoër, James Hey, le Docteur Lind, à Hawkil; M. Jardine, à Gibraltar; M. Planmann, à Cajanebourg; M.<sup>rs</sup> Wargentini & Wilckes, à

V. les Mém.  
p. 546.

V. les Mém.  
p. 421.  
p. 422.  
p. 505.  
p. 509.

V. les Mém.  
p. 539.  
p. 541.  
p. 542.

Stockolm; M. Melander, à Upsal; M. Mallet, à Posnoy en Lapponie; M.<sup>rs</sup> Lexel, le P. Mayer, Albert Euler & le P. Stahl, V. les Mém. à Pétersbourg; M. Rumowski, à Kola, sur la mer blanche; p. 422. M. Kraft, à Orambourg; M. Christophe Euler, à Orsk; M. Ismief, à Yakousk; M. Lowitz, à Gurief près Astracan; le P. Hell, envoyé par le Roi de Danemarck, à Wardoë ou Wardhuys, île de la mer glaciale; M.<sup>rs</sup> Dimont & Wales, au p. 423. Fort du Prince de Galles, dans la baie d'Hudson; M. Smith, à Norwinton, dans la Pensilvanie; M. Ewing, à Philadelphie; M. Bidelle, à Leweston, au cap de la Ware; M. Winthrop, à Cambridge dans la nouvelle Angleterre; Don Alzate & M. p. 424. Bartolache, à Mexico; M. Tofiño, à Cadiz; le P. Manuel Alvarès de Queiros, Professeur royal de Philosophie, à Agromonte près Porto en Portugal; M. Mohr, à Batavia; M. Simonin & le p. 425. P. Théodore d'Almeyda, à Bayonne.

Le passage de Vénus sur le Soleil, arrivé le 3 Juin au soir, fut suivi le 4 au matin d'une Éclipse partielle de Soleil, qui fut observée par M.<sup>rs</sup> le Monnier & de Chabert, à Saint-Hubert; p. 191. par M.<sup>rs</sup> Cassini, Maraldi & du Vaucel, à l'Observatoire royal; p. 231. M.<sup>rs</sup> de Bory, Bailly, l'Abbé Bourriot, Dom Noël & de Fouchy, p. 531. au Cabinet de Physique du Roi, à la Muette; & par M.<sup>rs</sup> de la p. 426. Lande & l'Abbé Marie, à l'observatoire du Collège Mazarin.

Un si grand nombre d'observations, & l'importance de la conclusion qu'on en pouvoit tirer pour la détermination de la parallaxe du Soleil, étoient bien propres à piquer la curiosité des Astronomes, & à les inviter à en faire usage. C'est aussi ce qui est effectivement arrivé; M. le Monnier a comparé les observations V. les Mém. faites en Amérique, avec celles qui ont été faites dans le nord p. 497. de l'Europe; la phase qu'il a choisie pour la comparer, est le contact interne. La première entrée de Vénus sur le Soleil lui a paru trop difficile à déterminer: il admet cependant ce premier contact à Stockolm & à Greenwich, parce que le Soleil y étoit élevé sur l'horizon, l'air plus serein, & que trois ou quatre Observateurs habiles s'y sont réunis, pour la détermination de ces premiers momens: il fait encore entrer dans ses recherches, les durées totales du phénomène dans les deux villes du Nord où elle

a été observée. Il résulte de toutes ces comparaisons, que toutes compensations faites, on trouve  $7'' \frac{1}{2}$  pour la parallaxe du Soleil, ce qui augmente considérablement la distance qu'on croyoit avoir déterminée de la Terre à cet astre.

V. les Mém.  
p. 505.

La détermination de la parallaxe du Soleil n'est pas le seul fruit qui peut se tirer de l'observation du passage de Vénus sur le Soleil ; on peut en tirer un moyen de déterminer l'erreur des Tables de Vénus, indépendamment de l'effet des parallaxes ; c'est précisément ce qu'a fait M. le Monnier, en profitant, avec adresse, de la circonstance de quelques observations, dans lesquelles le cercle de Longitude se confondoit avec le vertical, ce qui faisoit évanouir la parallaxe de longitude, & il a trouvé le lieu observé de Vénus, au moment de la conjonction, plus avancé de  $58'' \frac{1}{2}$  que ne le donne le calcul tiré des Tables de M. Halley ; il ne regarde cependant pas cette détermination comme absolument certaine, parce qu'il se trouve quelque incertitude dans les observations.

V. les Mém.  
p. 509.

M. de la Lande a comparé les observations de Bordeaux avec celles qui ont été faites à Paris, en employant la parallaxe du Soleil de  $8'',8$  ; les observations de Bordeaux se sont rapportées très-exactement avec celles de Paris, & on en tire la longitude observée de Vénus de  $13^d 27' 22''$  des Gémeaux, avec une latitude boréale de  $10' 13'',7$ , à  $2''$  près de celle que donnent les Tables de M. Cassini. M. de la Lande s'est aussi servi de l'observation du contact pour rectifier la Carte du passage de Vénus, qu'il avoit publiée en 1764, fruit surnuméraire, si l'on veut, de l'observation de ce passage.

V. les Mém.  
p. 539.

M. de la Lande a comparé de même les observations faites en Angleterre avec celles de Paris ; mais il a fallu supposer la parallaxe de 9 secondes pour les y rappeler ; elles donnent donc la parallaxe de deux dixièmes de seconde de plus que ne la donnent les observations de Bordeaux comparées à celles de Paris ; différence si petite qu'on peut la regarder comme un véritable accord.

V. les Mém.  
p. 543.

Quelques Astronomes avoient pensé qu'en rassemblant l'entrée de Vénus sur le disque, observée dans un endroit, avec la sortie observée dans un autre, on pouvoit déterminer, à l'aide de ces observations, la parallaxe du Soleil. M. de la Lande s'est assuré,

en essayant d'employer cette méthode, qu'elle ne pouvoit devenir assez exacte, à moins qu'on n'eût d'ailleurs la plus courte distance à un tiers de seconde près, ce qu'il regarde comme impossible. Il n'est donc pas praticable d'obtenir la parallaxe du Soleil exactement, en employant les seules observations du nord; mais en les comparant avec celles du midi, on trouve, comme par les observations précédentes, la parallaxe de 8 à 9".

Tel est le léger crayon que nous avons pu donner de ce qui s'est passé au sujet de ce phénomène, mais nous ne devons pas laisser ignorer au public que M. de la Lande est, au moment que nous écrivons cette Histoire, sur le point de publier une Histoire complète du Passage de Vénus sur le Soleil, dans laquelle il rapporte toutes les observations qui ont été faites de ce Phénomène, & toutes les conclusions qu'on a pu tirer de cette importante observation.

Nous renvoyons entièrement aux Mémoires :

L'Écrit de M. Cassini de Thury, sur le mouvement des Étoiles en longitude & en latitude. V. les Mém.  
p. 1.

Celui de M. le Monnier, sur le mouvement d'*Arcturus* en ascension droite apparente, & de la vraie longitude du Soleil pendant une suite d'observations faites avant & après le solstice d'été, pour en déduire l'erreur des Tables au temps de l'apogée, & au 3 Juin 1769. p. 14.

Les Remarques du même, sur l'Écrit de M. Cassini. p. 24.

Le Mémoire de M. Maraldi, sur l'inclinaison du 3.<sup>e</sup> satellite de Jupiter. p. 25.

L'Observation de l'occultation de  $\mu$  des Gémeaux par la Lune, le 11 Avril 1769, avec des remarques sur la distance des étoiles  $\alpha$  &  $\beta$  des Gémeaux; par M. le Monnier. p. 29.

L'observation de deux Éclipses de Lune, du 30 Juin au matin & du 23 Décembre 1768; par M. Maraldi. p. 59.

L'Observation d'une Éclipse de Lune horizontale, faite à Châtillon, dans la tour de M. le Prince de Croy, le 23 Décembre 1768; par M. le Monnier. p. 61.

- V. les Mém. L'Observation de l'Éclipse de Lune du 23 Décembre 1768;  
p. 63. & du passage de la Lune par le Méridien; par M. de la Lande.
- p. 65. L'Observation de quelques phases de la même Éclipse, par M. de Fouchy.
- p. 147. Les Observations de l'opposition de Jupiter au Soleil, arrivée le 8 Mai 1769, du passage de Vénus sur le disque du Soleil, du 3 Juin; & de l'Éclipse du Soleil, du 4 Juin 1769; par M. Jaurat.
- p. 297. Et la suite du travail de M. du Séjour, sur les Éclipses sujettes aux parallaxes; septième Mémoire.

---

CETTE année M. Cassini fils, publia *la relation du voyage qu'il avoit fait, par ordre du Roi, pour examiner les Montres marines de M. le Roy l'aîné.*

On savoit depuis long-temps que si l'on pouvoit avoir une Montre capable de conserver invariablement l'heure du port duquel on est parti, on pourroit, en comparant cette heure avec celle qu'on observe dans le navire, connoître à chaque instant la longitude du lieu auquel il est parvenu. La simplicité de ce moyen faisoit desirer qu'il pût être exécuté; mais la construction d'une telle horloge étoit, il y a moins d'un siècle, au rang des choses impossibles\*, & on avoit été obligé de chercher d'autres moyens bien plus difficiles, pour parvenir à cette connoissance.

\* Hydrographie  
du P. Fournier,  
p. 475.

La perfection à laquelle l'art de l'Horlogerie est parvenu depuis environ cinquante ans, a fait renaître les espérances des marins sur ce point si important. M. Harrison, en Angleterre, M.<sup>rs</sup> le Roy, Berthoud, & plusieurs autres en France, ont travaillé avec succès, & ont présenté différentes pièces qui ont fixé l'attention des Navigateurs. Mais comme il n'y avoit que la seule expérience qui pût décider de la perfection de ces pièces, relativement à l'usage auquel elles étoient destinées; l'importance de la matière engagea M. le Duc de Praslin à proposer au Roi de faire armer un vaisseau uniquement destiné à cette épreuve. Les Montres de M. Harrison avoient été éprouvées à la mer, celles de M. Berthoud dans la rade de Brest; celles de M. le Roy l'avoient été dans le

voyage que M. le Marquis de Courtanvaux avoit fait pour ce sujet, & duquel nous avons rendu compte en 1767 \*; mais quelques succès qu'elles eussent eu alors, l'espace parcouru n'avoit pas assez d'étendue pour leur faire éprouver la vicissitude des climats, & on crut nécessaire de leur faire faire une navigation plus longue, & qui les portât dans des températures très-différentes.

\* Voy. Hist.  
année 1767.  
p. 120.

Dans cette vue on arma la frégate l'*Enjouée*, commandée par M. de Tronjoly, Capitaine de vaisseau; elle devoit, en partant du Havre, aller droit à l'île Saint-Pierre proche de Terre-neuve; de-là passer à la côte d'Afrique; & enfin revenir en France, après avoir touché les côtes d'Espagne & de Portugal. M. le Roy devoit s'embarquer sur ce navire, avec ses Montres; & le Ministère désira qu'un des Astronomes de l'Académie fût aussi de la partie, & nomma M. Cassini fils pour cette expédition. C'est de ce voyage qu'il a publié la relation de laquelle nous allons essayer de rendre compte.

L'Ouvrage de M. Cassini est divisé en trois parties.

La première comprend les détails historiques de son voyage; depuis son départ du Havre, jusqu'à son retour à Brest. On le suivra avec plaisir dans les brumes continuelles du climat de Terre-neuve, profitant avec soin des occasions rares de voir le Ciel, pour faire quelques observations nécessaires, & employant le loisir forcé, dans lequel il vivoit malgré lui, à observer & à décrire l'art important de la pêche & des différentes préparations de la morue. Les Montres marines ayant été éprouvées dans ce climat, dont l'humidité parut causer à l'une des Montres une légère altération, ou du moins on le soupçonna, il fut question de les transporter aux côtes d'Afrique, dont on vouloit leur faire sentir les ardeurs. Le voyage fut heureux, & la relâche fut à Salé, dans la rade duquel on mouilla le 25 Août. M. Cassini n'a pas oublié les détails qui peuvent intéresser les Marins, tant sur la rade & le mouillage, que sur la barre, très-difficile à franchir, qui ferme l'entrée du port, & sur les mœurs peu connues & le caractère de ses habitans.

La seconde partie contient le détail des observations qui ont été nécessaires pour l'épreuve des Montres; cette partie ne peut



être abrégée, & veut être lûe dans l'ouvrage même; ce sont les pièces d'une des plus importantes affaires qui puisse intéresser le Genre humain, que M. Cassini met, pour ainsi dire, sous les yeux du Public Astronome & Navigateur, seul juge compétant en cette matière.

Pour connoître la Longitude au moyen des Horloges marines; ce n'est pas assez qu'elles conservent exactement l'heure du port d'où on est parti, il faut encore connoître, avec précision, celle du lieu où se trouve le navire; c'est à procurer aux Navigateurs cette connoissance si nécessaire, qu'est destinée la troisième partie de l'ouvrage de M. Cassini.

Les Astronomes se servent à terre de différentes méthodes pour obtenir l'heure; une des principales, est celle qui emploie des hauteurs égales du Soleil, prises avant & après midi; mais cette méthode, qui souvent manque sur terre, parce que le Soleil peut être couvert l'après-midi à l'heure où il revient à la hauteur où il a été observé le matin, devient encore plus difficile à pratiquer en mer, parce qu'il arrive souvent que l'horizon n'est pas net du côté où l'on veut observer, ce qui rend l'observation impossible.

Cette manière de déterminer l'heure, lorsqu'elle se peut pratiquer, est précise, & n'exige presque aucun calcul; mais, comme nous venons de le dire, elle ne peut pas toujours être mise en usage.

On peut y suppléer, en prenant des hauteurs absolues du Soleil ou d'une étoile connue, l'occasion de faire une seule observation; qui n'est assujettie à aucune heure précise, doit être bien plus fréquente que celle d'observer deux hauteurs égales d'un même astre avant & après le méridien; mais le calcul n'est pas aussi simple; la latitude du lieu & la déclinaison de l'astre y entrent, & il y a plusieurs triangles sphériques à résoudre pour déterminer l'heure cherchée par l'observation de la hauteur absolue d'un astre.

Pour lever cet inconvénient, M. Cassini a pris sur lui tout le travail; il a calculé des Tables assez étendues, par le moyen desquelles, connoissant à peu près la latitude du vaisseau, une seule hauteur observée du Soleil ou d'une étoile, donne sur le champ l'angle horaire tout calculé; c'est-à-dire, l'heure vraie du vaisseau qu'on n'a plus qu'à comparer à celle de la Montre marine, pour  
avoir

avoir la différence de longitude entre le lieu du vaisseau & le port d'où l'on est parti. Ces Tables, dûes au zèle & au travail de M. Cassini, réduisent donc le Problème à prendre une hauteur quelconque du Soleil avec l'octans, & à chercher dans les Tables quelle heure répond à cette hauteur & à la latitude par laquelle on se trouve.

L'Ouvrage de M. Cassini est suivi, dans le même volume, par la pièce de M. le Roy, qui, au jugement de l'Académie, a remporté le Prix proposé en 1769, *sur la meilleure manière de mesurer le temps à la mer*, & dans laquelle se trouve la description de la Montre marine éprouvée dans ce voyage.

Ce Mémoire de M. le Roy est divisé en quatre parties, toutes relatives à l'objet qu'il se propose. Selon lui les corps en mouvement sont évidemment les seuls qu'on puisse employer à cette mesure. Les astres ont été certainement les premiers qu'on y ait employé. Les heureux efforts des Astronomes ont pu parvenir à inventer des méthodes capables de les y employer utilement; mais les astres ne sont pas toujours visibles, & quand même on pourroit les avoir à sa volonté, on auroit toujours besoin d'un instrument qui pût conserver, avec exactitude, l'heure donnée par le Soleil.

Les premiers instrumens employés à cet usage, ont été les clepsydres, soit qu'on y ait employé les fluides, soit qu'on ait fait usage des différentes poussières, comme dans les sabliers. Mais il est aisé de s'apercevoir que ces instrumens n'agissant que par la chute du corps qu'ils contiennent; cette chute doit, de même que les frottemens, éprouver des variations si énormes, par les secousses & l'agitation du vaisseau, & par le changement de la gravité dans les différens climats, qu'ils ne peuvent donner une exactitude suffisante.

Ces mêmes causes doivent agir encore sur les machines dont le régulateur est animé par la pesanteur, le magnétisme, &c. Cette dernière cause est même sujette à des variations plus accidentelles & plus irrégulières.

Il ne reste donc d'autres régulateurs à éprouver que ceux qui tirent leur action de l'élasticité des ressorts, comme le balancier des Montres lorsqu'il est joint au ressort spiral.

*Hist. 1769.*

O

C'est aussi ce moyen que M. le Roy a employé dans la Montre marine; mais pour en tirer tout le parti possible, il falloit le mettre à l'abri des irrégularités auxquelles il est sujet. Ces irrégularités viennent, ou de l'altération de l'élasticité de son ressort spiral, produite par le froid & le chaud, des inégalités de la force motrice; enfin, de la quantité & de la variabilité de ses frottemens; il a corrigé les irrégularités résultantes du froid & du chaud, à l'aide de deux thermomètres composés d'esprit-de-vin & de mercure, & placés des deux côtés de l'axe du balancier, au moyen desquels la circonférence de percussion s'éloigne ou se rapproche de cet axe, selon que l'élasticité du ressort augmente ou diminue: il a remédié aux irrégularités de la force motrice par l'isochronisme de son ressort ou plutôt de ses ressorts en spiral, car il y en a deux dans la Montre; en effet, cet isochronisme est tel que soit que les vibrations de ses ressorts soient grandes ou petites, elles se font toujours dans le même temps, de manière que la force motrice augmentant ou diminuant, tout se réduit à rendre les arcs plus ou moins grands, sans altérer leur durée, & son échappement, exempt de tout frottement, est très-bien disposé pour que le régulateur jouisse pleinement de cette excellente propriété du ressort, & dont nous devons la découverte à M. le Roy; car il a montré, par nombre d'expériences curieuses, que tous les ressorts, dès que leurs longueurs sont dans une certaine proportion avec leurs forces ou leurs épaisseurs, leurs vibrations, sont toujours isochrones. Enfin, par la manière dont il a suspendu son balancier; il paroît avoir évité, autant qu'il étoit possible, les frottemens de ce régulateur. C'est d'après cette théorie, dont nous regrettons de ne pouvoir donner ici qu'une idée aussi légère, que M. le Roy a su exécuter avec la plus grande délicatesse & la plus grande précision la Montre marine qui a donné lieu au voyage de M. Cassini, qui a mérité d'être couronnée par l'Académie, & qui est actuellement, avec quelques autres, embarquée sur un vaisseau du Roi, pour subir les épreuves les plus rigoureuses & les plus capables d'en assurer la justesse & la précision.



# HYDROGRAPHIE.

\* *V. les Hist. de*  
1764, p. 26;  
1765, p. 57;  
1766, p. 80;  
1767, p. 178.

Ces moyens ne se peuvent tirer que de l'Astronomie, & M. Bézout employe la seconde partie de son Ouvrage à donner les connoissances astronomiques nécessaires à cet objet; & la troisième

à en faire connoître l'application; M. Bézout y fait voir comment on détermine en mer la latitude avec précision, comment on se sert de ces observations pour corriger la route estimée; comment on peut observer la variation de l'aiguille aimantée; & enfin, les différens moyens inventés pour déterminer en mer la Longitude par l'observation des astres.

La quatrième section est d'un genre tout différent de celui des trois premières; elle est presque entièrement destinée à assurer l'exactitude des opérations dont nous venons de parler; M. Bézout y discute les variations des triangles sphériques, c'est-à-dire, qu'il donne les moyens d'évaluer quelle différence peuvent produire, dans la quantité cherchée, les petites erreurs qui peuvent s'être glissées dans les données; connoissance d'autant plus précieuse, qu'elle est comme la pierre de touche des nouvelles méthodes qu'on peut proposer; il y examine les défauts qui peuvent s'être glissés dans la construction de l'instrument, & sur-tout celui qui naît du non-parallélisme des miroirs qui peut produire une erreur énorme dans les grandes hauteurs; celle qu'on peut commettre dans la recherche du moyen parallèle dans la réduction des routes; celle que produit l'aplatissement de la Terre; & enfin, M. Bézout y donne quelques additions à la méthode de trouver les Longitudes, par le moyen des distances des étoiles à la Lune & au Soleil.

L'Ouvrage est terminé par un grand nombre de Tables astronomiques, nécessaires pour calculer les différens élémens que M. Bézout emploie; & pour procurer encore plus de facilité à ceux qui sont destinés à se servir de cet Ouvrage, il y a joint des Tables de sinus & tangentes, & des logarithmes des nombres naturels jusqu'à 8000.

Cet Ouvrage a paru rassembler, dans un médiocre volume; toutes les connoissances nécessaires à son objet; elles y sont présentées avec clarté & précision, & d'une manière à mettre les Commensans à portée de suivre par eux-mêmes la carrière que M. Bézout leur ouvre, & à leur en faire naître le desir; & cette suite a paru digne des volumes qui l'avoient précédée.





# M É C A N I Q U E.

## S U R U N E M A C H I N E

### PROPRE À MOIRER LES ÉTOFFES DE SOIE.

**M**OIRER une étoffe, est imprimer sur la surface, des ondes V. les Méms. P. 5.  
différemment contournées; ces ondes ne se peuvent im-  
primer que sur les étoffes dans lesquelles la grosseur du fil de  
trame produit des cannelures transversales, qu'on nomme *grain*;  
& c'est l'aplatissement de ces cannelures en sens opposés, qui  
forme les ondes de la moire: elles doivent être grandes & bien  
terminées par des filets fins & déliés, produits par l'intersection  
des aplatissémens du grain en sens contraire; comme l'aplatisse-  
ment ne prend point sur les plis, il en résulteroit que les ondes  
de la moire seroient interrompues d'espace en espace par des  
espèces de lignes transversales, qui feroient un effet désagréable;  
on remédie à cet inconvenient, en dépliant l'étoffe & changeant  
les plis de place, ce qu'on appelle *les faire courir*. Alors toutes les  
parties de l'étoffe souffrent alternativement la pression qui écrase  
le grain, & les ondes ne sont pas interrompues.

Le moyen qu'on employe pour opérer ces ondes, est de faire  
passer l'étoffe, enveloppée d'une toile & roulée sur un rouleau de  
bois de gayac, sous une caisse, dont le fond est très-poli, & qui  
est chargée d'un poids énorme. Cette caisse est tirée par un cable  
alternativement en avant & en arrière; au moyen de cette opé-  
ration, le poids énorme de cette machine écrase le grain de  
l'étoffe, & l'aplatit en divers sens, ce qui forme les ondes qu'on  
remarque sur l'étoffe.

Les Anglois ont été long-temps seuls en possession de la ma-  
nière de bien moirer les étoffes; nous n'avions pas ici de machine  
assez parfaite; ce n'a été qu'en 1740 qu'on en a fait venir une

de Londres, & elle fut établie à Paris. Enfin, quelques années après, la ville de Lyon en fit venir une seconde, & fit un sort assez avantageux à un Moireur de Londres, pour le déterminer à venir s'établir à Lyon; & depuis ce temps on a pu fabriquer en France des moires aussi belles que celles d'Angleterre.

Les unes & les autres sont cependant souvent sujettes à quelques défauts, & quelque bien faite que soit la machine, son effet n'est pas toujours constant; M. de Vaucanson a cru devoir rechercher les causes de ces variations, & essayer d'y remédier.

La nature de la soie qui compose l'étoffe, la grosseur ou la finesse de son grain, l'espèce de teinture dont elle est colorée, introduisent nécessairement des différences dans la force nécessaire pour écraser le grain, & il faudroit que la machine pût s'y prêter, pour que l'étoffe se trouvât également moirée. La manière de rouler les étoffes sur un rouleau de bois, rend encore l'action de la machine très-inégaie sur les différens tours de l'étoffe, & pour peu qu'elle quitte le rouleau en se desserrant, les plis se dérangent, & les ondes se croisent & deviennent confuses.

Il faudroit donc pour éviter ces inconvéniens, que l'étoffe ne fût pas roulée, & que la machine pût prendre promptement, & presque à volonté, le degré de force nécessaire pour s'accommoder à la résistance du grain.

Il est aisé de voir que l'espèce de calandre que nous venons de décrire, ne peut, en aucune manière, opérer ces effets; aussi M. de Vaucanson l'abandonne-t-il entièrement, & voici ce qu'il lui substitue.

Au lieu de faire passer l'étoffe roulée sous une calandre, il la plie en zic-zac à l'ordinaire, & après l'avoir mise entre deux toiles, il la fait passer entre deux rouleaux placés à peu près comme ceux d'un laminoir ou d'une presse d'imprimerie en taille-douce.

Il est d'abord évident que par ce moyen on évite l'inégalité d'action de la calandre sur l'étoffe roulée & le dérangement des plis, qui n'arrive que trop souvent, dans la méthode ordinaire.

Mais il subsisteroit encore dans celle-ci un inconvénient très-considérable; nous avons dit que la différence de l'espèce de soie,

celle de la teinture, celle de la préparation, celle même de la texture de l'étoffe, peuvent rendre le grain plus ou moins difficile à écraser; il peut donc arriver, & il arrive même presque nécessairement, que non-seulement différentes pièces d'étoffe, mais encore différentes parties d'une même pièce exigent différens degrés de pression de la machine; & c'est ce qui ne se peut opérer avec des rouleaux fixes & invariablement arrêtés, qui exerceroient toujours une pression constante & uniforme.

Pour remédier à cet inconvénient, M. de Vaucanson introduit une construction particulière dans la machine; l'un de ses deux cylindres, qui est le supérieur, est formé de métal très-dur, & a ses tourillons appuyés sur des collets immobiles fixés au bâtis; le rouleau inférieur, qui est de bois de gayac, a ses tourillons roulans dans des collets fixés aux extrémités de deux leviers, à environ neuf pouces de leur point d'appui, & la queue de chacun de ces leviers est saisie par un tirant de fer qui répond à un second levier, au bout duquel est attaché un plateau de balance, qu'on peut charger de différens poids. La seule pesanteur des leviers, sans aucun poids dans les plateaux, produit sur le point de contact des deux rouleaux, un effort de six milliers, & un poids de 25 livres ajouté dans chaque plateau, augmente cet effort de 5000 livres; on peut donc, avec la plus grande facilité, augmenter ou diminuer, dans un instant, la pression de la machine, la faire prêter à toutes les différentes qualités d'étoffes qu'on peut avoir à moirer; & elle peut suppléer seule aux deux calandres angloises qu'on emploie ordinairement à cet effet, & donner un moirage bien plus parfait qu'elles ne peuvent le produire.

On juge bien qu'une pareille machine n'a pu s'exécuter qu'après un nombre presque infini de tentatives; aussi M. de Vaucanson ne les a-t-il pas épargnées; & ce n'est qu'après s'être instruit, par ce moyen, sur un très-grand nombre de points, qu'il a fait exécuter cette machine aux frais du Roi, pour la fabrique de Tours, où elle a eu un très-grand succès.

Cependant malgré ce succès, M. de Vaucanson croit devoir attendre qu'une plus longue expérience ait confirmé les avantages de cette machine, pour oser conseiller de l'employer, & pour



en donner une description plus détaillée, & accompagnée de planches. Ceux qui sont le plus en état de décider, sont ordinairement les plus réservés à prononcer sur les objets même qui leur sont les plus familiers.

## S U R

*L'ÉBOULEMENT DES MONTAGNES,*

## E T S U R

*LES MOYENS DE LE PRÉVENIR.*

V. les Mém.  
P. 233.

**I**L n'est que trop certain que des portions considérables de terrain peuvent se détacher, & se détachent quelquefois des montagnes, & causent, dans leur chute, les plus affreux ravages; des montagnes même toutes entières peuvent quelquefois s'écrouler, & nous en avons un exemple dans une montagne très-élevée & presque adjacente à celle de Chimborazo, la plus élevée de la Cordelière des Andes.

Des évènements qui peuvent avoir des suites si terribles, méritent bien qu'on fasse tous les efforts pour les prévenir; c'est aussi ce qu'a tenté M. Perronet; & c'est à rendre compte de ses recherches sur ce point, qu'est destiné le Mémoire dont nous allons essayer de donner une idée.

Le premier pas à faire, dans une recherche de cette nature, est de découvrir les causes de ces accidens; nous disons les causes, parce que plusieurs circonstances, soit naturelles, soit artificielles, peuvent les occasionner.

Dans le nombre de ces causes, se trouvent naturellement les volcans, les tremblemens de terre & les autres phénomènes de cette espèce; mais ils ne sont ni ne doivent faire l'objet des recherches de M. Perronet; toute la puissance & toute l'industrie des hommes, ne peuvent en empêcher les effets; & tout ce qu'on peut raisonnablement faire en pareil cas, c'est d'écarter des endroits suspects d'y être sujets, les édifices & les routes publiques. Examinons  
présentement

présentement les autres causes de ces désastres, auxquels l'art peut légitimement espérer de s'opposer.

Pour pouvoir procéder avec ordre dans cette recherche, il est nécessaire d'établir quelques principes. Une masse de terrain est composée de terre plus ou moins tenace, de sable, de cailloux & de plusieurs autres matières assises communément sur un banc de glaise toujours incliné, ou sur un banc de roche qui l'est quelquefois.

Les terrains ainsi situés devroient naturellement glisser sur leur base inclinée, ou même s'ébouler lorsqu'ils ne sont pas tenaces ou soutenus par d'autres terrains; mais leur pesanteur d'une part, & le glacié qu'ils prennent au premier éboulement, leur interdit ce mouvement, & communément une masse de terre qui a une fois pris cette espèce d'équilibre, reste en repos, s'il n'y survient quelque changement. Ce changement peut venir de plusieurs causes; un bâtiment trop lourd, élevé sur un terrain de cette espèce, peut rompre son équilibre & le faire glisser sur sa base; une fouille faite au pied, & qui emporteroit une partie du glacié, seroit encore capable de produire le même effet, à moins que la liaison de la terre ne le retînt. On doit donc bien examiner la nature du terrain qu'on se propose de charger d'un grand édifice, ou au pied duquel on se propose de fouiller, pour voir si on n'a rien à craindre de ces opérations.

Puisque l'adhérence des particules de la terre les unes aux autres augmente la difficulté qu'elle a de glisser ou de s'ébouler, l'eau qui pourroit s'y insinuer ne manquera pas de la diminuer; premièrement, en diminuant l'adhésion mutuelle des parties du terrain & les rapprochant de l'état de fluidité; & en second lieu, lorsqu'en humectant le banc de glaise ou de roche incliné, sur lequel la masse de terre insiste, elle lui donne une bien plus grande facilité de couler dessus & d'y glisser; & M. Perronet rapporte plusieurs exemples de ces accidens, qui ont cessé dès qu'on a détourné les eaux qui les causoient.

Ce cas arrive quelquefois, mais il n'est pas le plus ordinaire; il en est un autre qui se présente bien plus fréquemment, & qui exige des Ingénieurs & des Architectes l'attention la plus scrupuleuse & le coup d'œil le plus exact & le plus sûr.

*Hist. 1769.*

P

On a tous les jours des terrasses ou des chaussées à construire, des escarpemens à faire, & des coupures profondes à pratiquer; or, les côtés de ces sortes d'ouvrages ne peuvent se soutenir que lorsqu'ils ont pris un talus plus ou moins grand, selon la nature du terrain dans lequel on opère.

Il est donc de la plus grande importance que ceux qui sont chargés de rédiger les projets de ces sortes d'ouvrages aient des règles constantes qui puissent en assurer la solidité & la durée, sans faire cependant une dépense inutile, & sans occuper en pure perte des terrains souvent précieux.

C'est à procurer aux Ingénieurs ces connoissances si utiles que M. Perronet s'est sur-tout appliqué dans ce Mémoire, dans lequel il consigne à la postérité ce que ses recherches & sa longue expérience en ce genre, lui ont appris sur cette matière.

Pour s'assurer si la masse entière du terrain ne peut être sujette à glisser sur sa base, il a fallu reconnoître d'abord quelle étoit la pente de cette base qui pouvoit lui permettre ce mouvement.

Pour cela, M. Perronet a commencé par placer des pierres taillées de différens poids sur des pièces de bois simplement dressées à la scie; elles n'ont commencé à glisser que lorsque ces pièces ont fait, avec l'horizon, un angle de 39 à 40 degrés.

Si le corps & le plan sur lequel il glisse sont polis, une beaucoup moindre inclinaison suffit; il commencera à glisser lorsque le plan sera incliné à l'horizon de 18<sup>d</sup> 26 à 27'; c'est ce dernier angle que les expériences de feu M. Amontons ont fait nommer *l'angle des frottemens*, & qui a été adopté par presque tous les Mécaniciens.

Mais une observation bien essentielle, est que cet angle n'est constant que lorsqu'il n'est question que de poids peu considérables, & qu'il diminue à mesure que les masses augmentent. Voici comment M. Perronet s'en est assuré.

Il a examiné avec soin l'inclinaison qu'on donne aux plans sur lesquels les Vaisseaux portent dans le chantier où on les construit pour être lancés à la mer.

Cette inclinaison n'est guère que de 10 à 13 lignes par pied; ce qui donne pour angle moyen 4<sup>d</sup> 33'  $\frac{1}{2}$ ; d'où l'on peut légitimement

mément conclure que le poids d'une masse de terrain étant infiniment plus grand que celui d'un Vaisseau, & un banc de glaise étant communément assez uni, une inclinaison, moindre même que  $4^{\text{d}} \frac{1}{2}$ , peut permettre à cette masse de terrain de glisser, pour peu qu'elle y soit aidée ou sollicitée par les circonstances locales; on doit donc, avant tout, s'assurer dans ces sortes de terrains, par des fouilles & par des sondes multipliées de la pente du banc de glaise ou de roche sur lequel ils insistent; en voulant supprimer cette légère dépense, on court risque de rendre inutile toute celle qu'exigeroit l'ouvrage projeté. Revenons au talus qu'il faut donner aux terres dans les ouvrages dont nous avons déjà parlé.

Ce talus varie suivant la nature des terres; il y en a quelquefois d'assez fortes pour se soutenir à plomb jusqu'à 30 pieds & plus de hauteur; mais ce n'est pas le cas le plus ordinaire, les terres légères & les sables fins & secs prennent ordinairement un talus qui fait un angle d'environ 30 degrés avec l'horizon.

Lorsque la terre dans laquelle on opère a déjà été remuée; elle n'a plus la même tenacité que la terre vierge ou qui n'a pas été fouillée, elle prend en ce cas des talus différens de ceux que prendroit la terre vierge, mais qui suivent toujours à peu près les mêmes rapports avec la nature du terrain. Voici ceux que l'expérience a indiqués à M. Perronet.

La terre la plus forte prend un talus de 35 à 36<sup>d</sup>; la terre légère & le sable environ 30 degrés, & les qualités de terre intermédiaire à proportion; le gros gravier, les pierres cassées forment un angle d'environ 40 ou 45 degrés.

Il est bon d'observer que tous ces angles supposent que la superficie du talus forme un plan, ce qui est sensiblement vrai quand il n'a qu'une médiocre hauteur, & qu'il est fait de sable ou de terre légère; mais dans les cas contraires l'accélération que les corps acquièrent en roulant lui fait prendre une courbure sensible & plus d'empatement qu'il n'en auroit, suivant les angles que nous venons d'assigner; circonstance à laquelle l'Ingénieur qui conduit ces sortes de travaux, doit avoir égard, s'il ne veut pas être trompé, sur la quantité de terrain que doit occuper l'ouvrage

proposé, ni sur l'étendue des ponts, aqueducs, &c. qu'on peut établir dessous.

Telles sont les précautions générales que M. Perronet croit qu'on doit prendre dans tous les travaux de cette espèce; mais il en est encore de particulières, & pour ainsi dire, locales qu'on ne doit pas négliger.

Il arrive, par exemple, assez souvent que dans les coupures ou dans les escarpemens qu'on se propose de faire, on rencontre des bancs de sable ou de glaise; or dans l'un & l'autre de ces cas on doit pourvoir à ce que l'éboulement du sable ou le dessèchement de la glaise ne puisse causer l'éboulement du talus; si les bancs sont de sable il faudra donner au talus une pente de 30 degrés qu'on fait être propre à cette matière; mais si c'est de la glaise pour laquelle on ne craint que le dessèchement, on la malquera par une portion de mur, qui, dans ce cas n'a pas besoin de beaucoup de force, parce qu'elle n'a presque aucune poussée à retenir, & qu'il suffit que cette portion de mur suffise pour empêcher la glaise de s'éventer, de se gerfer, & de tomber par morceaux, ce qui entraîneroit nécessairement l'éboulement de l'ouvrage.

On voit par tout ce que nous venons de dire, combien de précautions on doit prendre, lorsqu'on est chargé de pareils ouvrages, si on veut les mettre à l'abri des accidens dont ils seroient sans cela infailliblement menacés. Tous ceux qu'on évitera par les moyens que nous venons d'exposer, seront toujours autant de motifs de reconnaissance que ceux qui seront chargés de ces ouvrages devront aux talens & aux recherches de M. Perronet.

---

## SUR LA COURBE

*DÉCRITE PAR LES BOULETS ET LÈS BOMBES,*

*eu égard à la résistance de l'air.*

V. les Mém.  
p. 247.

ON a déterminé, dans presque tous les Traités élémentaires d'Artillerie, la courbe que décrivent les bombes & les boulets, par l'action de la poudre, combinée avec celle de leur

pesanteur, & on a très-bien démontré que cette courbe étoit une parabole; mais on a toujours supposé, dans cette recherche, que ces corps n'éprouvoient de la part de l'air aucune résistance sensible, ou du moins on n'a eu aucun égard à cette résistance.

Il est cependant très-certain que cette résistance de l'air n'est nullement insensible, qu'elle retarde la marche du boulet, qu'elle change la nature de la courbe, la distance des portées, l'angle sous lequel le mortier doit être pointé, pour avoir la plus grande portée possible; en un mot, il n'y a aucune règle de la balistique qui puisse subsister, en remettant dans le calcul la résistance de l'air, qu'on en avoit mal-à-propos exclue.

Newton & M. Euler s'étoient aperçus de ce défaut & avoient travaillé l'un & l'autre sur cette matière, mais ni l'un ni l'autre n'avoient appliqué leurs calculs aux effets connus de nos pièces d'Artillerie, ce qui a ôté à leurs travaux la plus grande partie de l'utilité dont ils auroient pu être.

C'est ce qui a engagé M. le Chevalier de Borda à examiner de nouveau une matière si importante, pour décider à l'aide du calcul, d'une manière certaine, les principales questions de la balistique. Nous allons essayer de donner une idée de son travail.

Le premier pas qu'il fait, est de déterminer quelle est la courbe décrite par un corps qui se meut dans un milieu résistant, & dans cette solution il ne détermine pas la loi suivant laquelle s'exerce cette résistance, ce qui rend la solution la plus générale qu'il soit possible. Comme on sait cependant que la résistance des fluides est à très-peu près proportionnelle au carré des vitesses, il introduit cette expression dans l'équation.

La courbe qui en résulte est très-différente de la parabole; non-seulement, parce qu'on introduit un élément de plus dans le calcul, mais encore parce que cet élément est variable; car il est évident que la vitesse du projectile allant toujours en diminuant, la résistance diminue aussi dans la raison du carré de la diminution de la vitesse; il s'ensuit que les deux branches de la courbe substituée à la parabole, seront inégales: on sent assez combien toutes ces variables introduites dans le calcul, rendent le Problème difficile à résoudre; il le seroit peut-être encore plus, si

on y faisoit entrer d'autres élémens qui géométriquement devoient y avoir lieu ; mais qui ne produisent pas des effets assez sensibles pour en embarrasser le calcul. Nous en allons apercevoir quelques-uns de cette espèce, en appliquant cette courbe aux effets de l'Artillerie.

Puisque la résistance de l'air augmente dans la raison des quarrés des vitesses du boulet, il est clair que plus cette vitesse sera grande, plus les portées différeront en moins de celles qu'on auroit assignées, en employant le mouvement dans le vide, & la parabole qui en résulte. M. le Chevalier de Borda a donc calculé une Table dans laquelle en supposant un canon de 24, pointé à 45 degrés, il a marqué les portées dans le vide dans une colonne, en supposant différentes vitesses initiales depuis 100 pieds jusqu'à 3500 pieds par seconde, & les portées correspondantes, en ayant égard à la résistance de l'air.

La portée réelle d'une pièce de 24, pointée sous un angle de 45 degrés est de 2250 toises, ce qui donneroit une vitesse initiale de 2038 pieds par seconde ; mais cette même vitesse faisant abstraction de la résistance de l'air, donneroit une portée de 22922 toises. La résistance de l'air diminue donc les portées de neuf dixièmes ; on peut donc juger combien on se trompe en négligeant cet élément. Voici quelque chose de plus fort ; les angles qui répondent à différentes portées ne sont pas constans, & l'angle de 45 degrés qu'on supposoit donner la plus grande portée, ne la donne pas à beaucoup près. Il n'est pas difficile de le comprendre, si on veut faire attention que toutes les déterminations qui ont été faites jusqu'ici ont eu toujours pour fondement le calcul dans lequel on n'avoit eu aucun égard à la résistance de l'air, & qu'en introduisant cet élément dans le calcul, la courbe n'est plus une parabole, que les deux branches même diffèrent entr'elles considérablement, parce que les vitesses allant en diminuant, les résistances diminuent aussi, même dans une raison plus forte : il faut donc, dans le calcul des angles qui doivent répondre à une portée donnée, avoir égard aux différentes vitesses initiales, si on ne veut pas tomber dans des erreurs énormes. M. de Borda fait voir que la même pièce de 24, qui,

avec une vitesse initiale de 300 pieds par seconde, donne pour l'angle de la plus grande portée,  $42^{\text{d}} 10'$  ne donne plus cet angle que de  $28^{\text{d}} 10'$ , si on suppose cette vitesse initiale de 2000 pieds par seconde.

Nous venons de dire que le boulet perdoit de sa vitesse à mesure qu'il s'éloignoit du canon; mais il étoit nécessaire de voir comment se faisoit cette diminution. M. de Borda n'a pas négligé cette partie; il l'a calculée pour les pièces de différens calibres, & a déterminé pour chacune deux distances, l'une au bout de laquelle le boulet avoit perdu un dixième de sa vitesse, & l'autre après laquelle il en avoit perdu un cinquième; & il résulte de ce calcul que ces pertes sont dans une raison assez peu différente de celle des distances mêmes.

Un des points les plus intéressans de toute l'Artillerie, est certainement de déterminer la vraie portée des différentes pièces. M. de Borda en donne le moyen par un théorème général qui ne laisse plus que de simples analogies, & quelques interpolations, pour conclure de la première Table de son Mémoire, les portées des boulets de différens calibres; il donne même ce calcul tout fait dans une Table, en employant seulement deux vitesses initiales, l'une de 1500 pieds & l'autre de 1800 pieds par seconde; ces portées se trouvent assez différentes de celles qu'on trouve dans les Mémoires de M. de Saint-Remy; mais cette différence ne prouve rien autre chose, sinon que les vitesses initiales pourroient n'être pas les mêmes pour tous les calibres.

Puisque la résistance de l'air offre un si grand obstacle au mouvement du boulet, il est clair que si l'air a de son côté un mouvement contraire, cette résistance deviendra plus grande, ce qui doit arriver nécessairement quand le vent se trouve dans une direction contraire au chemin du boulet. M. le Chevalier de Borda n'a pas négligé d'apprécier cette résistance, & il fait voir qu'en supposant la vitesse initiale d'un boulet de 24 de 1800 pieds par seconde, & que le vent fasse parcourir à l'air 40 pieds dans le même temps, la portée se trouve diminuée de 90 toises. Le calcul de M. de Borda peut de même s'appliquer aux variations causées par les différences de densité de l'atmosphère, & par les différences de pesanteur dans les boulets.



Ce que nous venons de dire des boulets s'applique de même au jet des bombes, & M. de Borda n'a pas négligé cette application; mais il n'a traité ici que deux questions qui lui ont paru plus importantes que les autres; savoir, les différentes portées des bombes de différens poids & de même diamètre, & sur les angles des différentes portées.

Pour comprendre pourquoi les bombes diffèrent en ces deux points des boulets, il est nécessaire de faire réflexion sur la différence essentielle qui se trouve entre les uns & les autres. Les boulets sont solides, & comme ils sont tous de même matière, leur pesanteur a toujours un rapport déterminé avec leur diamètre. Il n'en est pas de même des bombes, elles sont creuses pour renfermer la poudre qui les doit faire éclater; & deux bombes de même diamètre seront plus ou moins pesantes, selon que ce vide sera plus ou moins grand; il étoit donc nécessaire de voir si cette différence de poids n'en introduiroit pas une dans les portées. Voici ce qui résulte de son calcul. Il a trouvé qu'en comparant ensemble deux bombes du même diamètre de 11 pouces 8 lignes, mais dont l'une pèseroit 140 livres & l'autre 175, & leur donnant des vitesses initiales depuis 600 pieds jusqu'à 1200 pieds par seconde, la plus pesante a toujours une plus grande portée, & que cette différence est assez constamment d'environ un dixième, & l'expérience a confirmé ce raisonnement. Il résulte donc des recherches de M. de Borda, qu'on augmenteroit sensiblement la portée des bombes si, en leur conservant le même diamètre, on diminueoit le vide qui est au centre, pour augmenter leur pesanteur; ce qui peut, dans de certaines circonstances, devenir très-important.

La recherche des angles de la plus grande portée méritoit bien d'être faite avec grand soin; le calcul de M. de Borda y étant appliqué, a fait voir que, conformément à ce que nous en avons dit ci-dessus en parlant des boulets, l'angle de la plus grande portée n'est ni constant ni dans aucun cas celui de 45 degrés dès qu'on fait entrer la résistance de l'air dans le calcul, qu'il est d'autant plus petit que les vitesses sont plus grandes, étant de 37<sup>d</sup> 15' pour une bombe de 140, partie du mortier avec une vitesse de  
six cents

fix cents pieds par seconde, & de 33<sup>d</sup> 20' seulement pour la même bombe, partie du mortier avec une vitesse de 1100 pieds par seconde; d'où il suit que si les mortiers marins qui sont fondus avec leurs semelles sous un angle de 45 degrés, auroient une portée plus grande d'environ 100 toises, si leur angle, avec la semelle, n'étoit que de 33 ou 34 degrés.

Tout ce que nous venons de dire de l'Ouvrage de M. le Chevalier de Borda, nous dispense d'ajouter que la Balistique est devenue, par ses Recherches, une science toute nouvelle, & qu'on ne peut trop désirer de lui voir parcourir, jusqu'au bout, cette carrière qu'il s'est ouverte.

## SUR L'EFFET DES ROUES MÛES PAR LE CHOC DE L'EAU.

ON trouve dans le volume de l'Académie de 1704, un V. les Mém. Mémoire de M. Parent \*, dans lequel ce célèbre Méca- P. 477. nicien établit, comme un principe certain, qu'en substituant à \* Voy. Hist. toutes les ailes d'une roue, qui éprouvent l'action d'un fluide, une année 1704; p. 116. surface plane dont la surface soit égale à l'étendue frappée de ces ailes, & exposée perpendiculairement au choc du fluide; le centre d'impression de cette surface doit prendre le tiers de la vitesse du courant, pour que l'effet de la machine soit un *maximum*.

Cette théorie a été adoptée par presque tous les Mécaniciens; sans qu'aucun ait vraisemblablement pris la peine de l'examiner; car s'ils l'eussent fait, ils n'auroient pas tardé à reconnoître qu'elle étoit défectueuse.

En effet, la force communiquée aux ailes d'une roue ne dépend pas seulement de la grandeur de la surface choquée, mais de l'inclinaison avec laquelle l'aile est frappée par le fluide; & comme chaque aile a une inclinaison différente à l'égard de la direction du fluide, & que cette inclinaison change à chaque instant, il est aisé de voir que le calcul est bien autrement composé que ne

Hist. 1769.

Q

l'avoit cru M. Parent, & que le Problème devient infiniment plus difficile à résoudre.

C'est la solution de ce Problème, pris dans toute la généralité, qu'a entrepris M. l'Abbé Bossut, en examinant séparément l'impulsion du fluide contre chaque aile, & prenant ensuite la somme de toutes ces impulsions.

On doit avoir égard, dans cette recherche, à l'eau qui s'écoule latéralement après avoir rencontré l'aile de la roue, & qui diminue par-là la vitesse du fluide, & par conséquent son impulsion; mais il faut en ce cas faire grande attention que cet inconvénient est beaucoup moindre pour les roues enfermées dans des coursiers où l'eau est retenue, que pour les roues qui sont sur les grandes rivières où elle est libre. On doit encore considérer que dans les roues qui sont dans les grandes vitesses, l'eau qui a imprimé son mouvement à la roue, & qui par-là même a perdu une partie de son mouvement, devient un obstacle à l'aile, qui pour lors tend à sortir de l'eau, inconvénient qui n'a presque pas lieu dans les coursiers, où même on ménage communément une chute à l'eau pour le prévenir.

On voit par cet exposé, combien d'éléments entrent dans ce calcul, & combien il a été difficile de les combiner ensemble & de pouvoir faire varier dans le résultat ceux qui sont sujets à variation; c'est cependant ce qu'a fait M. l'Abbé Bossut, & en employant tous ces éléments, il parvient à une équation générale qui peut, en faisant varier ou même en supprimant certains termes, s'appliquer à tous les cas possibles.

Il résulte de cette équation, que le moment de l'impulsion de l'eau, varie selon le nombre des ailes; M. l'Abbé Bossut a eu la curiosité de chercher quel étoit le nombre d'ailes nécessaires pour que ce moment fût un *maximum*, dans le cas où la roue est supposée en repos, & recevant par conséquent toute l'impulsion du fluide, & cette recherche l'a mené à une conclusion bien singulière; c'est qu'alors le nombre des ailes devoit être infini ou, ce qui revient au même, la roue ronde mais toujours dentée; conclusion géométriquement vraie dans la supposition qui sert de base au calcul, mais qui ne se peut absolument appliquer à la pratique: en effet,

les molécules physiques de l'eau ayant une certaine grosseur qui les gêne dans leurs mouvemens, les ailes doivent toujours laisser entr'elles un certain espace qui leur permette de les exercer. Le nombre des ailes d'une roue doit donc être fini & limité; mais on doit observer qu'il doit être toujours beaucoup moins grand dans les roues mues par le courant des grandes rivières, que dans les roues à courrier où l'eau s'échappe aussitôt qu'elle a cessé de pousser les ailes,

Jusqu'ici nous n'avons parlé que des roues verticales, & ce sont effectivement les seules qu'on emploie dans cette partie du royaume; mais dans les provinces méridionales on y en emploie très-fréquemment d'horizontales, garnies d'aubes inclinées, sur lesquelles l'eau tombe par une espèce de gouttière, placée dans une certaine direction inclinée, qui fait un angle avec le plan de la roue. Le calcul dont nous venons de parler peut de même s'appliquer à ces roues; mais pour abrégé ce calcul, M. l'Abbé Bossut a cru devoir traiter le Problème d'une façon moins générale & plus appropriée à ce cas particulier.

Le calcul appliqué à ce genre de roues, M. l'Abbé Bossut parvient à une équation dans laquelle le poids qui peut faire équilibre à la force de l'eau, se trouve déterminé; & il n'est plus question que de faire varier ce terme pour le rendre un *maximum*; car alors la roue produira tout l'effet dont elle est susceptible; & il trouve, par ce moyen, que cet effet ne sera tel que lorsque le fluide frappera perpendiculairement l'aile, & que pour lors la vitesse de la roue sera égale à celle du fluide, divisé par le triple du cosinus de l'angle que fait l'aile avec la verticale, d'où il suit que la machine en cet état pourroit enlever un poids avec une vitesse qui feroit les  $\frac{8}{27}$  de celle du courant.

Dans ce que nous venons de dire, nous avons toujours supposé que les ailes de la roue étoient exactement planes; il est cependant certain qu'elles ne le sont pas; on leur donne une petite courbure concave vers le fluide, afin que l'eau puisse agir non-seulement par son choc, mais encore par une partie de son poids. Il est clair que cette différence en introduit une dans le calcul; mais

cette courbure étant une fois connue, rien n'est si facile que d'évaluer l'excès de vitesse qu'elle doit produire.

Telles sont les recherches que M. l'Abbé Bossut a cru devoir faire sur cet important objet; il est aisé de voir combien elles jettent de jour sur cette partie de la Mécanique.

V. les Mém.  
p. 278. **N**ous renvoyons entièrement aux Mémoires :  
L'Écrit de M. d'Alembert, sur les Principes de la Mécanique.

**L**es Arts qui ont été publiés pendant le cours de l'année 1769, sont au nombre de trois.

Le premier est l'*art du Menuisier*, par le sieur Ronbo fils, compagnon Menuisier, première partie. Cet art est un des plus étendus, soit qu'on le considère dans le rapport qu'il a avec les bâtimens, soit relativement aux meubles & aux équipages. La première partie contient des élémens de Géométrie très-abrégés, mais suffisans pour mettre les ouvriers intelligens en état d'exécuter toutes sortes de traits, & de faire tous les toisés de leur art : il donne ensuite les principes généraux qui doivent diriger dans le choix du bois, & la manière de le débiter & de le préparer pour les différens ouvrages que l'on entreprend : il détaille les diverses espèces d'assemblages & la manière de les faire; de-là il passe aux différentes espèces d'outils, dont il donne la description détaillée. Enfin il termine cette première partie par la construction des portes & des croisées de toute espèce. Celle de la menuiserie dormante, c'est-à-dire des lambris, revêtemens, chaires à prêcher, est réservée pour la seconde partie, à la fin de laquelle l'Auteur promet de joindre un Traité complet de trait, proprement dit. Et la troisième doit comprendre tout ce qui concerne la menuiserie en meubles & en équipages, & les ouvrages d'ébénisterie.

Le second est l'*art du Tailleur*, par M. de Garfaut. Cette description contient celle de l'art du Tailleur, proprement dit;

de celui du faiseur de culottes de peau; de celui du Tailleur de corps; de celui de la Couturière; & enfin de celui de la Marchande de modes. M. de Garfaut y donne toutes les connoissances nécessaires sur la nature des étoffes, sur les différentes manières de coudre, sur la coupe des différens vêtemens, & sur la manière d'en assembler les pièces. Il ajoute une description ornée de figures des différentes formes d'habillemens usités en France depuis le commencement de la Monarchie: il détermine la quantité d'étoffe nécessaire à chaque vêtement; en un mot, il ne néglige rien de ce qui peut contribuer à mettre son lecteur au fait de l'art de faire des habits, & à le garantir de ce qu'on pourroit nommer en quelques occasions *l'art du Tailleur*.

Le troisième & dernier est *l'art du Pêcheur*. Cet art est devenu; entre les mains de M. du Hamel, un Ouvrage complet, qu'il publie sous le titre de *Traité général des Pêches, & Histoire des Poissons qu'elles fournissent, tant pour la nourriture de l'homme, que pour plusieurs autres usages utiles aux arts & au commerce*.

Cet Ouvrage est divisé en deux parties. La première traite de l'art du Pêcheur, proprement dit; c'est-à-dire, de prendre les poissons; & la seconde comprendra l'histoire générale des poissons.

L'art de pêcher est divisé en trois sections; la première traite de la pêche qui se fait avec des *hameçons*, ou comme les Pêcheurs les nomment, des *hains*; la seconde comprendra la fabrique des différens filets, & la manière de s'en servir; & la troisième contiendra la pêche au harpon, à la fouine, au trident, &c. & toutes les autres manières de pêcher qui n'ont pu se rapporter ni aux hameçons ni aux filets.

La première section ou la pêche à l'hameçon, est la seule que M. du Hamel ait publiée cette année 1769, & de laquelle par conséquent nous ayons à présenter une idée.

Les poissons sont extrêmement voraces, & avalent avec avidité ce qu'ils regardent comme leur proie; cette propriété a fourni un moyen de s'emparer d'eux en employant un crochet de fer ou d'acier très-poinu, & dont la pointe est armée d'une barbe; ce crochet, qu'on nomme *hain* ou *hameçon*, est recouvert d'un insecte,

d'une pâte, en un mot, de quelqu'objet qui puisse attirer le poisson, & attaché à une corde qu'on nomme *ligne*; dès que le poisson a avalé l'appât, la pointe de l'hameçon se pique dans son palais ou dans sa gorge, & on l'amène à bord en tirant doucement la ligne.

Pour peu qu'on y réfléchisse, on verra aisément que suivant les différentes grosseurs du poisson, il faut des hains ou hameçons de grosseurs différentes; ceux qui peuvent servir à prendre des éperlans ou des goujons, ne prendroient certainement ni des raies ni des requins; il faut donc enseigner à les construire de toutes les grandeurs; & c'est ce que M. du Hamel enseigne dans les *articles 6, 7 & 8*. Les lignes doivent aussi être proportionnées aux hameçons, & elles sont l'objet des *articles 3 & 4*.

En vain présenteroit-on des hameçons au poisson s'ils n'étoient appâtés ou couverts de quelque chose qui puisse exciter son avidité; & pour rendre ces appâts plus utiles, on doit consulter le goût des différens poissons qu'on veut attraper: ces appâts sont la matière de l'*article 9*, dans lequel M. du Hamel discute la nature, la rareté des différens appâts, & les inconvéniens qui peuvent résulter de leur recherche.

Les lignes, une fois appâtées, s'emploient de différentes manières; quelquefois on les met au bout d'une perche légère ou d'une canne qu'on tient à la main; & c'est ce que nous appelons ici *pêcher à la ligne*; quelquefois ces lignes sont attachées à des cordes qu'on enfonce plus ou moins dans l'eau; quelquefois elles tiennent à des bois ou à des paniers chargés de pierres; ces assemblages de lignes sont ou dormantes ou mobiles & entraînées par le mouvement des bâtimens. Toutes ces différentes manières sont exactement détaillées dans l'Ouvrage de M. du Hamel.

Plus il y a de poissons assemblés dans un même lieu, plus on peut espérer de faire une bonne pêche, sur-tout si ce sont des poissons qui se tiennent ordinairement près du fond; pour les engager à se rassembler, on compose des appâts qui vont au fond de l'eau, & que pour les y attirer, on sème dans les endroits où l'on se propose de pêcher; ces appâts se nomment *appâts de fond*.

La différence des poissons & du fond de la mer qui se trouve dans les différens parages, & au voisinage des différentes côtes fréquentées par les pêcheurs, introduisent nécessairement des variétés dans leurs procédés; & M. du Hamel n'a pas oublié de détailler tous ces procédés, & ce n'est pas la partie la moins curieuse de son Ouvrage.

Toutes les opérations dont nous venons de parler, ne peuvent s'exécuter sans un grand nombre d'instrumens qui se trouvent de même soigneusement décrits dans cet Ouvrage, avec la manière de les employer aux différens usages auxquels ils sont destinés.

On voit bien de même que la plupart des pêches dont nous venons de parler, exigent que les pêcheurs s'éloignent des côtes plus ou moins, & que par conséquent ils emploient différentes espèces de bâtimens, suivant les différentes côtes où se doivent faire les pêches. On ne peut imaginer combien de bâtimens différens de forme & de grandeur sont employés à cet usage; M. du Hamel n'a pas négligé cet article important, & non-seulement il décrit tous ces différens bâtimens, mais il les représente dans des planches soigneusement gravées, de même que tous les hameçons, les outils nécessaires à leur construction, les appâts; en un mot, il n'a rien négligé pour rendre cet Ouvrage intéressant, & pour mettre son lecteur au fait de tous les objets qu'il y a traités; & la manière dont cette première section a été exécutée est bien propre à faire desirer de voir bientôt paroître la seconde, qui doit comprendre la pêche au filet.





*MACHINES OU INVENTIONS*  
*APPROUVÉES PAR L'ACADÉMIE*  
*EN M. DCCLXIX.*

## I.

UN *Tour*, présenté par le sieur Pasquier, Suisse de M. le Marquis de Voyer: le mécanisme de ce *Tour*, qui tourne toujours du même sens, par un moyen équivalent à une petite roue au pied, a paru ingénieux, & pouvoir plaire aux amateurs de l'art de tourner.

## II.

Une *Méthode*, proposée & exécutée par le sieur Montulay, à l'usage des Graveurs en blason, & qui consiste à composer une grande planche de cuivre, de plusieurs planches plus petites dont on peut changer à volonté les dispositions, & qu'il fait assujettir d'une manière solide, simple & ingénieuse. Quoique l'objet dont le sieur Montulay s'est occupé ne soit pas d'une utilité fort étendue, cependant comme il intéresse l'art de la Gravure, & qu'elle peut en faire des applications heureuses; il a paru assez intéressant pour mériter d'être publié.

## III.

Une *Montre à trois parties*, présentée par le sieur Tosembach, Horloger: on fait que les Montres de cette espèce ont la double propriété de sonner l'heure & de la répéter à volonté; les premiers Inventeurs n'avoient presque fait que combiner ensemble les pièces qui appartenoient séparément à la répétition & à la sonnerie; mais cette grande complication étant vicieuse, plusieurs habiles Horlogers ont cherché à rendre la machine plus simple & les effets plus sûrs. Le sieur Tosembach a renchéri sur ce qui a été fait, & la Montre qu'il a présentée n'a en tout que vingt-six pièces au lieu de quarante-quatre qu'ont les Montres à trois parties ordinaires,

ordinaires, & de trente-six qu'ont les simples Montres à répétition. Cette Montre a paru exécutée d'une manière simple & facile, & la construction en a été trouvée ingénieuse.

## I V.

Un *Microscope*, inventé par le sieur Selva, Opticien établi à Venise : ce Microscope est purement catoptrique ; l'objet est absolument caché à l'œil, qui ne voit que son image renvoyée & grossie par un petit miroir de métal d'environ six lignes de rayon, enchâssé dans une grosse lentille de cristal, dont l'unique usage est d'éclairer l'objet qui se trouve à son foyer. On a cru que ce Microscope avoit sur les Microscopes dioptriques ordinaires, l'avantage d'être plus facile à construire, plus clair & plus simple ; & que cette invention du sieur Selva pouvoit être regardée comme ingénieuse & utile.

## V.

Une manière de faire changer d'air à chaque heure le carillon des grosses Horloges par l'horloge même : les cylindres de ces horloges n'avoient aucun mouvement dans le sens de leur longueur ; & on n'avoit d'autres moyens de faire varier les airs que de changer les chevilles qui prennent les levées des marteaux, à la faveur d'un grand nombre de trous qui sont percés dans le cylindre ; mais cette opération exigeoit la main d'un Musicien stilé à cette opération. M. Courtois, Horloger, a proposé d'opérer le même effet par le mouvement de l'horloge même ; pour cela, il rend l'arbre du cylindre quarré, & le cylindre qui y est enarbré peut par ce moyen glisser le long de cet axe ; à une des extrémités, est une étoile dont il saute une dent à chaque heure, & qui porte, sur la face tournée vers le cylindre, un plan incliné qui rencontrant une pièce attachée au cylindre, le pousse plus ou moins, suivant que la dent de l'étoile qui passe, présente une partie plus ou moins élevée du plan incliné ; & comme cette étoile avance d'une dent à chaque heure, le cylindre fait sonner un air différent. Ce moyen a paru ingénieux, & on a cru qu'étant exécuté avec

*Hist. 1769.*

R

toute la précision nécessaire, il pourroit être utile dans les grosses horloges auxquelles on voudroit adapter des carillons.

## V I.

Une *Pompe*, présentée par le sieur Quentin, maître Pompier à Rouen : cette Pompe a deux tuyaux d'aspiration qui s'ouvrent dans le corps de pompe, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la course du piston ; il en résulte que le piston aspire & foule en même temps, soit en montant, soit en descendant, & que le jet est continu, cette continuité même est favorisée par un réservoir d'air qui se comprime & agit par son ressort. Cette pompe est essentiellement semblable à celle que feu M. de la Hire fils avoit donné en 1716 ; & que l'Académie a publiée dans son volume de la même année \*, à l'addition près du réservoir d'air qui en assure l'effet ; mais cette addition, une construction plus simple, plusieurs choses de détail, & la perfection que le sieur Quentin a mise dans l'exécution, ont paru mériter l'approbation de l'Académie.

\* V. *Mém.*  
de 1716,  
p. 322.

## V I I.

Un *Télescope grégorien*, destiné aux *Observations astronomiques*, présenté par le sieur Navarre : ce Télescope a 32 pouces de long, & est monté comme les télescopes ordinaires de cette espèce ; mais la monture, au lieu de n'avoir que trois pieds sur lesquels elle s'appuie, en a quatre, & porte de plus un fil aplomb, pour mettre de niveau le plan sur lequel cet instrument se meut. Le sieur Navarre a adapté au demi-cercle vertical qui se trouve toujours dans ces montures, une division de *Nonius*, pour mesurer exactement l'angle que le télescope fait avec l'horizon : on peut placer les filets, dans le télescope, avec facilité & précision, de même que les oculaires qui doivent avoir ces mêmes fils à leur foyer, & le micromère est construit de façon qu'il n'y a aucune perte de temps dans son mouvement. Cette construction a paru marquer beaucoup d'adresse & d'intelligence dans l'Auteur, & devoir être très-commode dans l'usage qu'on en peut faire pour les observations.

## VIII.

Une manière de donner à l'Acier un poli aussi vif & aussi beau que celui d'Angleterre, présentée par le sieur Perret, maître Coustelier de Paris, avec un miroir d'acier, fait par cette méthode, & dont le poli ne laisse rien à désirer : la potée qu'il emploie & qu'il a donnée au public, dans un Ouvrage qu'il a fait imprimer, est un composé d'acier & de soufre calciné lentement, pulvérisé & ensuite passé à l'eau pour en avoir tous les différens degrés de finesse. Il a paru, par les Ouvrages que le sieur Perret a présentés, & par les essais qu'il a faits devant les Commissaires de l'Académie, qu'il ne laissoit rien à désirer sur cet article, & que son poli pouvoit aller de pair avec celui d'Angleterre.

## IX.

Une nouvelle méthode pour corriger l'action du chaud & du froid sur le pendule des grosses Horloges, présentée par le sieur le Roy l'aîné : ce moyen est extrêmement simple ; il fait passer les ressorts de suspension du pendule dans une forte fourchette de cuivre, du dessous de laquelle se comptent ses oscillations, & la longueur du pendule ; cette fourchette est placée sur l'extrémité d'un levier de la première espèce, dont l'autre extrémité est conduite par une branche de cuivre, fixée à la cage du mouvement ; dès que cette branche s'allonge par la chaleur, elle élève l'extrémité du levier à laquelle elle tient, & fait par conséquent baisser l'autre, à laquelle tient la fourchette, ce qui diminue la longueur du pendule que la chaleur avoit augmentée, & cette diminution peut être amenée à sa juste valeur, en faisant varier le point d'appui du levier. Cette méthode a paru simple, commode & utile, & même la seule qui puisse réussir dans de grosses horloges & avec de longs pendules, où il est cependant nécessaire de corriger les effets de la dilatation des métaux & de la grandeur des arcs qui varient suivant le temps.

## X.

Une nouvelle Division du manche des Instrumens à cordes, proposée par M. Gosset, facteur d'Instrumens, à Reims ; on fait

que plusieurs instrumens, tels que la viole & toutes les parties, le quinton, la guitare, la mendole, la mendoline & souvent la contre-basse de violon, ont leur manche entouré de cordes qu'on nomme *touches*, & qui servoient, à ce que l'on croyoit, à partager les cordes en demi-tons lorsqu'on appuyoit le doigt sur elles; mais on n'avoit pas pensé que ces touches faisoient tous les demi-tons égaux sur toutes les cordes, tandis qu'il y en a de majeurs & de mineurs, & que cet inconvénient introduisoit nécessairement du faux dans l'instrument; le sieur Gosset s'en aperçut en remontant une guitare, & ayant consulté M. Turpin, organiste de Reims, celui-ci lui en eût bientôt fait voir la raison & ils y remédièrent en substituant aux touches des espèces de fillets bas, collés sur le manche, plus haut ou plus bas sous chaque corde, selon que le demi-ton sera majeur ou mineur, ce que ne peuvent faire les touches qui coupent toutes les cordes à la même hauteur; cette manière de diviser les manches des instrumens à cordes, a paru préférable à celle qui étoit en usage, & digne de l'attention du public musicien.

## X I.

Une *Manière*, proposée par M. le Brun, de donner par une préparation particulière, plus de blancheur au Papier, de le rendre plus lisse & plus uni, & de procurer au Papier commun une grande partie des propriétés du Papier connu sous le nom de Papier d'Hollande; les échantillons qu'il a présentés & les épreuves auxquelles l'Académie l'a soumis, sur-tout celle de blanchir & préparer la moitié d'une vieille feuille d'impression commune, sans toucher à l'autre moitié, ont fait voir évidemment que cette préparation réussit sur le papier imprimé & même sur les estampes sans altérer ni l'impression ni la gravûre, qu'elles acquièrent même plus d'éclat par la blancheur que cette préparation donne au papier, celui qui l'a éprouvé n'est pas plus pénétrable à l'encre qu'il ne l'étoit auparavant, peut-être seulement s'y étend-t-elle un peu davantage que sur le vrai papier d'Hollande, ce qui rend les traits un peu moins bien terminés: cette préparation a paru mériter d'être approuvée, moins comme une découverte nouvelle,

puîsqu'on la pratique depuis long temps en Hollande, què comme un objet utile à la Société & au Commerce national.

---

**L**E Parlement ayant fait l'honneur à l'Académie de lui demander son avis sur les Lettres patentes obtenues par le sieur Vincent Huguet, Marchand Orfèvre de Paris, par lesquelles Sa Majesté lui permet de faire fabriquer & vendre une Vaisselle plate de cuivre, doublée d'argent; l'Académie après avoir soumis à de nouvelles épreuves cette vaisselle, qu'elle avoit déjà précédemment examinée, a cru devoir persister dans son premier avis & assurer que la vaisselle doublée d'argent du sieur Huguet, est fabriquée avec tout le soin & toute l'exactitude qu'on peut désirer, & qu'il y avoit lieu d'espérer qu'elle seroit agréable & avantageuse au Public.

---

**D**ANS le nombre des Pièces qui ont été présentées cette année à l'Académie, elle a jugé les douze suivantes dignes d'avoir place dans le Recueil de ces Ouvrages qu'elle fait imprimer.

Sur quelques Expériences faites avec des Fusils de munition :  
Par M. Fourcroy de Ramecourt, Brigadier des armées du Roi,  
Ingénieur en chef à Calais, Correspondant de l'Académie.

Sur quelques particularités du Cerveau & de ses enveloppes :  
Par M. Sabattier, Chirurgien de Paris.

Sur les Nerfs de la dixième paire: Par le même.

Sur l'Inégalité de la capacité des Ventricules du Cœur & des Vaisseaux pulmonaires: Par le même.

Analyse des Eaux de Barège, Cotteretz & Bagnières: Par M. de Montault.

Sur les Dissolvans de la Pierre: Par M. Camus, Docteur en Médecine.

134 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

Mémoire où l'on essaie de prouver que l'alkali du Tartre y est tout formé par la végétation: Par M. Rouelle le cadet.

Relation d'un Voyage au Volcan de l'île de Bourbon: Par M. de Crémont.

Extrait des Tables & des Observations Botanico - météorologiques, faites à Montmorenci pendant l'année 1769: Par le Père Cotte, Prêtre de l'Oratoire, Correspondant de l'Académie.

Sur la fabrique de l'Indigo: Par M. de Beauvais Rafault.

Observations faites, avec le Mégamètre, à la mer; & sur quelques changemens faits à l'Instrument: Par M. de Charnières.

*De orbitis Planetarum determinandis*: Par le P. Boscowich, Correspondant de l'Académie.

---

L'ACADÉMIE avoit proposé pour le sujet du Prix de 1767, *de déterminer la meilleure manière de mesurer le temps à la mer.*

Quoiqu'une des Montres présentées au Concours eût parfaitement réussi dans les épreuves qu'on avoit pu lui faire subir à terre; cependant la nécessité de faire les épreuves à la mer l'a engagé à proposer de nouveau ce même sujet pour 1769, avec un Prix double; c'est-à-dire, de 4000 livres, & sous la condition expresse que toutes les Pièces qu'on présenteroit au Concours auroient été éprouvées à la mer.

Elle a adjugé ce Prix à la Pièce N.º 2 de 1769, qui a pour devise, *Labor omnia vincit improbus*; & à la Montre qui y étoit jointe. L'Auteur de l'une & de l'autre est M. le Roy l'aîné, Horloger du Roi, de l'Académie Royale des Sciences d'Angers.





## ÉLOGE DE M. TRUDAINE\*.

**D**ANIEL-CHARLES TRUDAINE, Conseiller d'État, & aux Conseils royaux de finance & de commerce, Intendant des finances, & Honoraire de l'Académie des Sciences, naquit à Paris le 3 janvier 1703. Il étoit fils de Charles Trudaine, Conseiller d'État, & de Renée-Magdeleine de Rambouillet de la Sablière. M. Trudaine son père avoit été successivement Intendant de Lyon & de Dijon, & Prevôt des Marchands de Paris. Il joignoit aux principes de la probité la plus exacte, un cœur sensible & droit; toujours vrai, toujours humain, toujours ferme dans ce qu'il croyoit juste. Sa probité rigide n'avoit pu se plier aux différentes circonstances. Le feu Roi l'honoroit de sa confiance. M. le Chancelier Voisins, qui avoit épousé sa sœur, l'avoit mis souvent dans le cas de faire valoir ses services. Il étoit encore Prevôt des Marchands dans le temps des Billets de banque: M. Law étoit alors Contrôleur général des finances; il proposa une opération sur les Rentes dûes par le domaine de la ville de Paris: M. Trudaine crut ne devoir pas s'y prêter. Son inflexibilité sur ce point étant extrême, M.<sup>sr</sup> le duc d'Orléans engagea le Roi à nommer à la place de Prevôt des Marchands; mais il ne lui retira ni son estime, ni ses bontés: il lui dit un jour, *Nous vous avons ôté votre place parce que vous êtes trop honnête homme.* Ce mot seul de la part d'un Prince qui a toujours passé pour un des plus équitables appréciateurs de ceux qu'il employoit, suffiroit pour illustrer une disgrâce.

M. Trudaine, rendu à sa tranquillité & aux fonctions de sa place de Conseiller d'État, mourut peu de temps après, estimé du

\* L'Éloge suivant est dans un cas si nouveau, qu'il exige de l'Historien de l'Académie une déclaration publique; chargé, par la place qu'il a l'honneur d'occuper, de faire l'éloge des Académiciens que la mort enlève à l'Académie, il s'étoit adressé à M. Trudaine de Montigny, pour en ob-

tenir les mémoires nécessaires à l'éloge de M. son Père; ceux qu'il lui a remis lui ont paru si bien faits, & le portrait qu'on y fait de ce digne Magistrat si bien frappé, qu'il a cru les devoir donner presque sans aucun changement, & il déclare qu'il n'y a eu d'autre part que de les avoir approuvés.



public & regretté de ses amis. Il s'étoit marié en 1700, avec M.<sup>lle</sup> de la Sablière, petite-fille de M. & de M.<sup>me</sup> de la Sablière, connus tous deux dans la République des Lettres, l'un par quelques ouvrages de poésie qui ont été donnés au public, l'autre par son goût pour la société des Gens de Lettres, & sur-tout du célèbre la Fontaine. M. de la Sablière leur fils, qui avoit le malheur d'être attaché aux erreurs de la Religion prétendue réformée, fut obligé d'abandonner la France, & de se retirer en Angleterre, avec sa femme & quelques-uns de ses enfans. Sa fille cadette, héritière de grands biens, mise en couvent, & élevée dans les principes de la religion Catholique, y persévéra jusqu'à la mort, avec des sentimens d'une piété vraiment exemplaire. Ils eurent cinq enfans, deux fils & trois filles. L'aîné est M. Trudaine, dont on se propose ici de peindre la vie & le caractère. Le cadet servoit dans la Gendarmerie, & y mourut âgé de vingt-quatre ans. L'aînée des filles avoit épousé M. le marquis de la Tour-Maubourg, depuis Maréchal de France, dont elle eut une fille, mariée à M. le prince de Tingry, & morte sans enfans. La cadette épousa M. Pâris de la Brosse, président de la Chambre des Comptes, & mourut sans enfans. Et la dernière fut religieuse dans le couvent de Sainte-Élisabeth, où elle est morte. M.<sup>me</sup> Trudaine a survécu long-temps à son mari; elle est morte en 1740, fort regrettée de ceux qui vivoient avec elle: sa vertu, sa piété, sa douceur, le choix de ses amis, l'agrément de son esprit, la faisoient rechercher dans la société, & respecter dans le public.

M. Trudaine fut élevé au collège des Jésuites, où il fit de bonnes études: il y prit un goût particulier pour la lecture des Anciens, qu'il a conservé jusqu'à la fin de sa vie. Lorsqu'il fut sorti du collège, il fit son Droit, & fut Conseiller au Parlement en 1721. Il perdit son père à peu près dans le même temps. M. le Chancelier Voisins, son oncle, étoit mort en 1717. Sa fortune alors se trouvoit fort bornée; sa mère, qui avoit apporté la plus grande partie des biens dans la famille, étoit encore jeune, & le bien de son père étoit partagé. Dans cette position, âgé à peine de dix-sept ans, ayant à délibérer presque seul sur le parti qu'il avoit à prendre, il se déterminà à faire toute sa vie les fonctions de Conseiller au Parlement,

pour

pour lesquelles il se sentoît de l'attrait. Il se plaîsoit souvent à dire que ce n'étoit pas sans regret qu'il s'étoit vu entraîné, par les circonstances, dans une carrière différente. Il s'étoit fait l'idée la plus grande & la plus touchante de l'état d'un Magistrat également recommandable par ses lumières & par son intégrité. Dans ces vues, il s'étoit livré tout entier à l'étude de la Jurisprudence; & c'est alors, dans la première jeunesse, qu'il acquit les principes de cette connoissance profonde des loix & des formes du royaume, qui depuis l'ont rendu si utile dans les différens Conseils où il a été appelé. L'esprit de M. Trudaine le portoit toujours à approfondir les choses, & à ranger ses connoissances de manière à en former un ensemble dont toutes les parties se liassent entre elles, & au plan général. Cette habitude d'ordonner ses connoissances & ses projets, est ce qui forma le caractère distinctif de son esprit. Il en tira deux grands avantages, l'un, de rendre ses études faciles; l'autre, d'être lumineux, lorsque les circonstances l'exposèrent à montrer le fruit de ses veilles & de ses réflexions. Il opinoit toujours avec clarté, netteté & assurance. Il étoit loin de dédaigner cette éloquence qui vient de la chaleur de l'imagination, de l'abondance des images & de la richesse de la diction; il l'admiroit souvent dans les autres, mais il l'employoit rarement lui-même. Son éloquence étoit mâle & solide; elle consistoit à répandre du jour sur tous les objets qu'il parcouroit, & à parler purement la langue dont il avoit une connoissance parfaite. Il ne se servoit jamais que du mot propre à l'idée qu'il vouloit exprimer. Ces qualités, qu'il a portées dans la suite à un degré plus éminent, commencèrent de très-bonne heure à le faire connoître. Il exerçoit depuis sept ans ses fonctions avec distinction, lorsque les circonstances lui firent changer de plan de vie, & tournèrent du côté de l'administration des talens qu'il avoit consacrés à la jurisprudence. M. de Gaumont, Conseiller d'État & Intendant des finances, avoit une nièce, fille de M. Chauvin, Conseiller au Parlement; il desiroit la marier à un homme qui pût un jour lui succéder: il jeta les yeux sur M. Trudaine, comme sur un des Magistrats le plus capable de remplir ses vues.

M. le cardinal de Fleury parut approuver ce choix; il avoit particulièrement connu M. Trudaine le père, dans le temps qu'ils

étoient l'un Evêque de Fréjus, l'autre Intendant de Lyon : il croyoit même lui avoir quelques obligations. Il ne voulut pas proposer au Roi, pour ce mariage, la survivance qu'on demandoit, de la charge d'Intendant des finances ; ce Ministre étoit très-oppoé à ces sortes de grâces prématurées ; mais il fit espérer qu'il en obtiendrait l'agrément pour M. Trudaine, après la mort ou la retraite de M. de Gaumont. Le mariage fait, M. Trudaine acheta une charge de Maître des Requêtes : il ne tarda pas à s'y distinguer. M. le Chancelier d'Aguesseau conçut pour lui une véritable amitié ; il lui trouvoit des connoissances analogues à celles qu'il possédoit lui-même dans le degré le plus éminent. Il l'employa souvent dans différentes affaires de législation très-déliques, & qu'il avoit particulièrement à cœur : il aimoit à les traiter avec lui, & il a dit souvent que le travail qu'il faisoit avec M. Trudaine le délassoit de celui qu'il avoit fait dans le reste de la journée. Il a continué, jusqu'à sa mort, de lui marquer la même confiance. Il lui trouvoit des talens si décidés pour la législation, qu'il lui reprocha plusieurs fois de songer à la place d'Intendant des finances, qu'il regardoit comme plus liée à l'administration qu'à la jurisprudence. L'amitié & le suffrage de ce grand homme garantissent suffisamment les talens rares de M. Trudaine, pour cette partie si essentielle d'un homme d'État.

M. le cardinal de Fleury continuoit de lui marquer de l'estime & de l'amitié ; il l'admettoit souvent dans son intimité, & cherchoit à le bien connoître, avant de le proposer au Roi pour une place d'administration.

Peu de temps après, M. Orry, qui avoit été nommé à l'Intendance de Valenciennes, fut fait Contrôleur général. M. de la Granville, Intendant d'Auvergne, fut nommé à sa place, & cette dernière Intendance fut donnée à M. Trudaine, deux ans après qu'il eut été fait Maître des Requêtes.

La nomination à une place d'Intendant fait ordinairement, pour tous ceux qui suivent cette carrière, une époque remarquable dans leur vie. Appliqués jusque-là à l'administration de la justice distributive, il en est peu qui aient trouvé l'occasion de porter leurs vues sur l'administration d'une province, & ce n'est que par des

études particulières qu'ils peuvent en avoir acquis quelques principes. Quoiqu'entre les fonctions dont ils sont chargés, plusieurs exigent la science des loix la plus pure, ils n'y trouvent pas des ressources suffisantes pour la connoissance des hommes & des choses, qui leur est nécessaire. C'est un usage précieux à bien des égards, de ne confier des fonctions aussi étendues & aussi délicates, qu'à des hommes accoutumés à connoître & à respecter les loix, par l'étude particulière qu'ils en ont faite dans le commencement de leur vie. Mais cette étude doit nécessairement être suivie, dans les premiers momens de ce nouvel état, d'un apprentissage des fonctions de pure administration, dont quelques-unes paroissent avoir plus d'analogie aux détails tumultueux du militaire, qu'à la jurisprudence.

Ce fut dans cette nouvelle carrière que les talens de M. Trudaine commencèrent à se développer. Ses vues, ses projets, ses lumières parurent toujours prendre de l'accroissement, à mesure que ses occupations devenoient plus importantes. Il embrassa à la fois toutes les parties qui lui étoient confiées; il s'occupa avec ardeur à saisir les principes de chacune; il sut se les rendre si familières, qu'il en conserva toute sa vie la connoissance la plus solide & la plus sûre. Son caractère de fermeté & d'intégrité, dans la répartition des impositions, commença par lui acquérir cette considération qui est encore quelque chose de plus que l'estime, & qui est si nécessaire pour faire des choses vraiment utiles. Il se livra particulièrement à la construction des chemins, qui étoient dans le plus mauvais état: il sembloit qu'il prévît dès-lors qu'il seroit un jour chargé de cette administration importante dans tout le royaume.

La province d'Auvergne est séparée en deux parties, dont l'une comprend les campagnes fertiles de la Limagne & des environs de Clermont, l'autre des montagnes presque inaccessibles en tout temps. Les moissons de la plaine & les dépouilles des troupeaux de la montagne, ne procuroient pas aux habitans toutes les richesses qu'elles paroissent leur promettre. M. Trudaine sentit & fit sentir aux Ministres, qu'il ne manquoit que des communications pour établir un heureux échange entre ces productions utiles. Il travailla avec succès à procurer à cette province cet avantage précieux,

qui a été depuis perfectionné, & qui y a attiré les richesses des provinces voisines. Toujours prêt à voir par ses yeux, il portoit par-tout l'œil vigilant d'un administrateur infatigable, & la conduite sage d'un Magistrat éclairé. Dans la persuasion que les formes sont le plus sûr garant de la pureté de l'administration, il s'y tint toujours étroitement attaché. Il les conserva avec soin dans toutes les parties où elles étoient établies; il les ramena dans celles où on avoit pu s'en écarter, & les introduisit dans celles qui en avoient jusqu'alors paru le plus éloignées. Il porta même si loin cet attachement aux formes judiciaires, que quelques personnes en prirent occasion de le croire moins propre aux affaires d'administration: mais il ne tarda pas à prouver que cette qualité chez lui ne faisoit aucun tort à l'expédition; & son travail, sans rien perdre du côté de l'activité, en acquit une bien plus grande solidité. Il étoit attentif à écarter les abus de tout ce qui l'entouroit, & à ne s'attacher que les hommes les plus sûrs pour le caractère, & le plus en état par leurs talens & leurs lumières, de remplir les fonctions dont il les chargeoit. Il fut Intendant d'Auvergne pendant cinq ans. M. de Gaumont lui offrit en 1734 de lui remettre sa place; & M. le Cardinal de Fleury ayant proposé au Roi de lui en donner l'agrément, il vint alors exercer la charge d'Intendant des Finances. Il eut le département du Domaine qu'avoit eu M. de Gaumont avant lui. Il y porta des connoissances acquises depuis long-temps dans la Jurisprudence, qui fait la base principale des affaires de ce département. Il eut occasion de faire connoître dans cette place, & la fermeté de son caractère & l'étendue de ses lumières. M. Orry, alors Contrôleur général, lui confia, peu d'années après, la direction des ponts & chaussées, qui lui a valu l'estime de la nation, par l'étendue de ses projets, la suite qu'il mettoit dans les détails, & l'économie avec laquelle il en a dirigé tous les travaux.

Le département des ponts & chaussées que M. Trudaine a conduit pendant trente ans, est d'une étendue considérable & comprend beaucoup de détails. Il n'en négligea aucun, & s'appliqua avec ardeur à y introduire l'ordre & l'économie qu'il avoit naturellement dans l'esprit. Il s'occupa principalement des deux parties

qui lui parurent les plus essentielles, & sans lesquelles il sentit bien que tout l'édifice qu'il méditoit, ne pourroit subsister : la première est la distribution & la comptabilité des fonds; la seconde, le choix des Artistes destinés à exécuter sous ses ordres les travaux nécessaires. Il a eu le bonheur de conduire ces deux parties avec un succès égal.

Dans la première, il fut si bien distribuer les sommes destinées par le Roi à cet objet, & mesurer avec tant d'exactitude les époques de la rentrée des fonds, pour y proportionner l'étendue & l'activité des travaux dont il étoit chargé, qu'il étoit sûr de pouvoir ordonner à point nommé les payemens des ouvrages à mesure qu'ils avançaient. Cette exactitude lui concilioit la confiance des entrepreneurs & des ouvriers, & lui donnoit la facilité de conduire ses travaux avec une économie qui a souvent fait l'étonnement des artistes les plus expérimentés. Il n'avoit pas donné moins d'attention à la régularité de la comptabilité, pour empêcher que la plus petite partie de ces fonds ne pût être détournée à des objets étrangers. Il s'en faisoit rendre compte, & employoit un temps considérable à en suivre tous les détails avec la plus scrupuleuse attention. Aussi on pouvoit toujours être sûr que les sommes destinées à cet objet étoient bien employées.

Quant au choix des Artistes, il ne négligea aucun des moyens qui peuvent servir à former les hommes, & à leur inspirer le zèle & la confiance nécessaires pour entreprendre & exécuter de grandes choses. Il eut le bonheur de s'entourer, dans le premier ordre, d'hommes recommandables par leur probité & leurs talens. Il leur témoigna une amitié & une confiance par laquelle il gagna entièrement la leur; & il étoit formé entre eux & lui, des liaisons d'estime & d'attachement qu'il a conservées chèrement jusqu'à la fin de sa vie. Il les admettoit à son intimité; il les consultoit dans tous les projets qu'il méditoit, & il étoit parvenu à leur inspirer des sentimens d'un zèle & d'un désintéressement rares. Il comprit que pour avoir des hommes tels qu'il les desiroit, il falloit les former & les diriger de bonne heure aux vertus & aux talens, qu'on exigeoit d'eux. C'est dans cet esprit qu'il forma une École où tous les concurrens étoient également admis à venir essayer leur

bonne volonté & leurs dispositions. Il plaça à la tête M. Perronet; aujourd'hui premier Ingénieur des ponts & chaussées, Membre de cette Académie & de celle d'Architecture, qu'il crut propre à cet emploi de confiance, par la pureté de ses mœurs, la sûreté de ses connoissances & la sagesse de son esprit. Le succès répondit pleinement à ses vues. Il avoit une satisfaction pure lorsqu'il entendoit dire du bien de ceux qu'il employoit. Il les connoissoit particulièrement presque tous. Il aimoit à s'entretenir avec eux de ce qui les touchoit, pour les connoître plus intimement. Il avoit eu soin d'exciter entre eux une émulation honnête, qui étoit accompagnée d'une union fondée sur l'estime réciproque; & pour la cimenter, il avoit soin de les assembler souvent chez lui, & de les consulter en commun, de manière que tout ce Corps paroissoit animé du même esprit. Lorsqu'il y avoit quelque place à donner, il étoit presque sans exemple que le choix ne tombât pas sur celui qui auroit été nommé par tous les confrères. Cette justice exacte & soutenue éloignoit de ce Corps jusqu'à l'ombre de cette basse jalousie qui a quelquefois déshonoré les plus grands talens. Il étoit parvenu par-là à écarter toute espèce de sollicitation étrangère; on en reconnoissoit l'inutilité: chacun se contentoit de faire parler pour lui ses travaux & ses talens, sans chercher un protecteur étranger, souvent plus occupé de son protégé que du bien de la chose.

Par ces moyens réunis, M. Trudaine réussit à entreprendre & à achever plusieurs grands ouvrages qui seront des monumens durables de son zèle & de son attachement à ses devoirs, & de la capacité de ceux qui les ont conduits.

Le pont d'Orléans, entrepris par M. Hupeau, mort depuis premier Ingénieur des ponts & chaussées; le pont de Moulins; construit avec la plus grande solidité par M. de Regemorte, premier Ingénieur des turcies & levées, & de l'Académie d'Architecture, sur un fond de sable, & sur l'Allier, rivière orageuse, qui avoit déjà détruit plusieurs fois des ouvrages pareils; entrepris dans le même lieu; celui de Tours; conduit par M. Bayeux, Inspecteur général, commencé depuis quelques années; celui de Saumur, conduit par M. de Voglie, Ingénieur de Touraine; enfin

les projets & les premiers fondemens du pont de Neuilly sur la Seine, par M. Perronet, sont les fruits de l'affection particulière qu'il avoit mise à cet objet important. On ne parle pas ici d'une multitude d'autres ouvrages moins considérables, qui se présentent de toutes parts à ceux qui voyagent dans le royaume. Des routes essentielles au commerce, entreprises & achevées, des montagnes adoucies, des abords & des traversées de villes embellis, attestent & attesteront pendant des siècles, aux patriotes & aux Étrangers, l'attention particulière que le Roi a cru devoir donner à la facilité du commerce de ses sujets.

M. Trudaine ne garda pas long-temps le département du Domaine dont il avoit été chargé par la démission de M. de Gaumont; il eut celui des Fermes générales après M. de Fulvy, & fut chargé de la principale administration du Commerce, lorsque M. Rouillé, qui avoit ce détail, fut nommé à la place de Secrétaire d'État de la Marine. Il apporta dans ces deux parties le même esprit qu'il avoit montré dans toutes celles dont il avoit été successivement chargé. Son attachement aux intérêts du Roi, ne le fit jamais écarter des principes de la justice la plus exacte. Il traitoit les affaires de finances avec cette franchise noble qui lui gagna toujours les cœurs. L'amour de la patrie & celui de l'humanité en général, le portèrent à chercher les moyens de soulager le peuple, sans nuire aux intérêts du Roi. Il gémissoit & s'attendrissoit souvent sur cette multiplication d'impôts que les circonstances ont rendu nécessaires. Il mettoit tout en usage pour en adoucir la charge, par la facilité de la perception. Dans les discussions qu'il avoit quelquefois avec les Fermiers généraux, ou sur le prix de leur bail, ou sur quelque perception qu'il trouvoit trop onéreuse, il écoutoit leurs raisons; il tâchoit de les pénétrer de sa façon de penser, & y réussissoit souvent; aussi en étoit-il fort aimé & en a-t-il été sincèrement regretté.

Le département du Commerce paroît composer des vues beaucoup plus étendues & des opérations plus utiles. M. Trudaine en fut chargé dans un temps où toute la nation éveillée par nos rivaux & par les écrits même de plusieurs de nos compatriotes, paroissoit entrer dans une espèce de fermentation. On n'étoit plus



dans ces temps où la science du gouvernement sur cet objet ; étoit un mystère impénétrable à ceux qui n'y étoient pas initiés ; tout le monde, au contraire, réfléchissoit, parloit & écrivoit sur le commerce, regardé par toutes les nations comme l'appui le plus sûr de la prospérité des États. Les opinions se partageoient : quelques hommes instruits critiquoient les principes adoptés jusqu'alors ; d'autres, attachés à des connoissances qu'ils avoient toute leur vie cultivées, croyoient que tout ce qui n'avoit pas été prévu par les Anciens, étoit vicieux, & rejettoient avec indignation tout ce qui leur paroissoit nouveau. M. Trudaine déjà formé aux affaires & à la connoissance des hommes, par une expérience longue & éclairée, écoutoit tout, profitoit de ce qui lui paroissoit utile, & savoit encourager les différens partis, en les conciliant. Mais le poids de sa considération servoit à entretenir l'équilibre ; par-là il laissoit au temps & à la discussion à préparer les voies. La matière s'éclaircissoit, & les nouvelles décisions étoient adoptées sans peine. Plus la marche avoit été lente, plus les progrès étoient sûrs. Également attaché à la règle, & porté par son caractère à favoriser la liberté, il savoit concilier l'une avec l'autre. Il suivoit avec zèle & exactitude, toutes les branches de manufactures, & ne manquoit aucune occasion de relâcher insensiblement les gênes, & de donner de l'effort à l'industrie. Pendant que ces opinions générales se discutoient, M. Trudaine ne perdoit pas les détails de vue. Les fonds destinés depuis long-temps à encourager l'industrie dans le royaume, souvent mal distribués, & alors presque entièrement épuisés, revenoient de toutes parts, en silence, à leur destination naturelle. Après quelques années entièrement consacrées au rétablissement de l'ordre, il se trouva par ce moyen en état d'appeler dans le royaume, les branches d'industrie les plus florissantes chez l'étranger. Souvent quelques avances faites à propos, quelques secours donnés à des Artistes laborieux & intelligens, excitèrent le travail & l'émulation dans des provinces prêtes à tomber dans la langueur. Ces secours ménagés avec une économie attentive, paroissoient se multiplier. Il eut soin de ne confier sous lui cette administration qu'à des hommes honnêtes, actifs & intelligens. Il y ramena, comme dans les autres parties qui avoient été remises

à

à ses soins, l'observation exacte des formes & des loix dans le détail. Il s'attacha les Négocians, cette classe précieuse & estimable des citoyens, par la considération qu'il leur marqua & qu'il chercha à leur attirer de toutes parts. Il aimoit à converser avec eux, à les voir former leurs spéculations, & à puiser chez eux les fruits de l'expérience & du génie. Son ame vertueuse & honnête, paroissoit être à son aise avec les hommes de cet état, chez qui ces qualités sont recommandables, & dont les principes y sont si analogues. Il entretenoit particulièrement une correspondance plus intime avec ceux qui sont attachés au Conseil en qualité de Députés des places commerçantes; & son nom étoit chéri, dans ce Corps respectable des représentans du Commerce du Royaume.

Indépendamment des différens départemens de M. Trudaine, il étoit quelquefois appelé dans les Conseils, pour y délibérer des affaires générales, & plusieurs Ministres le consultoient avec la confiance la plus entière. M. Orry, pendant le ministère duquel il avoit commencé à se mêler des affaires générales, avoit conçu pour lui une estime qui s'est soutenue jusqu'à la fin de sa vie. M. de Machault, qui succéda à M. Orry, étoit son ami dès l'enfance. Enfin, tous ceux qui l'ont consulté en ont reçu des secours utiles & des lumières satisfaisantes.

M. Trudaine avoit porté ses vues sur toutes les parties de l'Administration; son imagination s'étoit promenée sur tous les projets qui pouvoient contribuer à la perfection du Gouvernement, à la prospérité de l'État, & sur-tout au bonheur du peuple: il n'étoit point de moyens tendans à ces buts utiles, sur lesquels il n'eût formé des plans très-vastes & très-étendus; il en entretenoit souvent ceux qui étoient le plus dans son intimité, & qu'un amour du bien analogue à son caractère lui avoit plus particulièrement attachés; & ces conversations, dans lesquelles il instruisoit toujours, en paroissant douter & discuter, étoient de tous les délassemens qu'il se permettoit après ses longs travaux, ceux qui lui plaisoient le plus.

Il avoit reçu de la part du Roi les récompenses qu'il ambitionnoit; Sa Majesté le traitoit toujours avec cette bonté qui la fait chérir de ceux qui l'approchent. Elle l'avoit comblé de grâces

dans la personne & dans celle de son Fils; & chacune de ses grâces avoit été accompagnée d'une marque d'estime infiniment supérieure au bienfait. Il avoit été fait successivement Conseiller d'État, Conseiller au Conseil royal de Commerce & au Conseil royal de Finances.

Les grandes occupations, jointes à une disposition naturelle aux catarres, affoiblissoient depuis long-temps la santé de M. Trudaine; une surdité qui lui étoit survenue long-temps avant la mort, l'empêchoit souvent d'assister au Conseil: il eut, en 1759, une maladie considérable, dont il guérit; mais il sentit dès-lors qu'il avoit plus besoin de repos; il commença à laisser à son fils, qu'on lui avoit donné pour Adjoint, la plupart des détails les plus fatigans, jusqu'à ce qu'enfin sa santé devenant de jour en jour plus mauvaise, il le chargea presque de la totalité de ses départemens, ne se réservant que celui des ponts & chaussées, que la longue habitude lui avoit rendu plus familier, & auquel il s'étoit attaché par le bien qu'il y avoit fait. Les rhumes dont il étoit tourmenté presque tous les hivers, lui avoient laissé une toux qui devint presque continuelle dès les commencemens de l'année dernière. Les Médecins jugèrent dès-lors que son état étoit dangereux, & essayèrent inutilement plusieurs remèdes. Il sentit lui-même, par la diminution de ses forces, que la fin approchoit; il le vit avec le calme de l'homme juste. Il alla cependant, comme à son ordinaire, passer la plus grande partie de l'année à la terre de Montigny: il y demeura environné d'un très-petit nombre d'amis intimes, dont il faisoit le bonheur, & que l'état actuel de sa santé mettoit au désespoir; il les consolait, les soutenoit, par le courage & la tranquillité de son ame. Vers la fin du mois de Novembre, la fièvre continue se joignit à l'état de déperissement dans lequel il étoit depuis plus de huit mois. Ce nouvel accident le ramena à Paris; il s'y réduisit, dès les premiers jours, à la société de son fils & de sa belle-fille, & de deux seuls amis qui lui étoient attachés depuis bien des années, & dont les soins ont fait la consolation de ses derniers momens. Au milieu des pleurs & des sanglots de ceux qui l'entouroient, & de l'appareil funeste qui frappoit continuellement ses regards

tourmenté de douleurs aiguës & insupportables, son ame, loin de s'altérer, se déploya dans toute la force & dans toute la beauté. Il se livra à la tendresse pour les seuls objets qui lui restoient, mais la fermeté de son ame n'en souffrit pas un moment. Il envisagea la mort comme la fin d'un voyage long & honorable. Un jour son fils, dans l'excès de l'affliction, recevant quelques derniers ordres, qu'il lui donnoit, avec le plus grand sang-froid, crut devoir l'informer de l'intérêt universel qu'on lui avoit marqué sur son état, de l'estime & de la considération dont il jouissoit, & qui ne sont jamais plus vraies que dans ces funestes instans; son père l'écouta avec une douce satisfaction peinte dans les yeux; ensuite le regardant avec attendrissement: *Eh bien, mon ami*, lui dit-il, *je te lègue tout cela*. Il remplit, avec le même sang-froid, les devoirs que lui imposoit la religion. Le 19 Janvier, il reçut, le matin, le Viatique, entouré de ses principaux domestiques; & bientôt après il sentit qu'il ne lui restoit que peu d'instans à vivre. Son fils en larmes, s'étant approché de son lit; le moribond rassembla ses forces, prit un visage serein, & lui dit, en lui tendant la main, *adieu, mon ami*; ce furent presque ses dernières paroles.

Nous n'avons jusqu'ici vu dans M. Trudaine que le Magistrat & l'Homme public; la vie privée & son caractère avec ses amis, ne méritent pas moins d'être connus. Il avoit naturellement l'ame ferme & sensible: il savoit allier ces deux qualités souvent inconciliables. Personne ne porta jamais à un plus haut degré, l'amour de l'humanité; rigide & scrupuleux pour lui-même, il étoit, par caractère, par raison, indulgent pour les autres. Sa vertu peut-être la plus dominante, étoit l'amour de la vérité & de la simplicité: il l'avoit poussé si loin, qu'il évitoit, avec un scrupule étonnant, je ne dis pas tout ce qui pouvoit avoir l'air de fausseté, mais de la plus légère exagération. Cette vertu, née avec lui, avoit pris tant de force, par l'habitude persévérante qu'il en avoit, qu'il la communiquoit à tous ceux qui étoient avec lui en commerce d'affaires ou de familiarités, & plusieurs personnes ont avoué qu'il leur étoit impossible de déguiser la vérité à M. Trudaine, tant il inspiroit de confiance & de franchise. Il aimoit les Sciences; quoique ses occupations ne lui eussent permis d'en suivre aucune

en particulier, il étoit aisé de voir qu'il avoit l'esprit de toutes; il entendoit ceux qui les possédoient, & il en étoit écouté. Il se plaisoit particulièrement dans la société des Gens de Lettres & des Savans: il les cultivoit sans prétention: il vivoit avec eux, parce qu'il aimoit à les entendre; & ils se plaisoient avec lui, parce qu'ils étoient sûrs de trouver, dans sa conversation, de la satisfaction, & souvent des lumières. Ses liaisons particulières avec plusieurs des Membres les plus distingués de cette Académie, lui firent desirer d'y être admis: il y fut élu en 1743.

Il prenoit un intérêt très-vif à tout ce qui fait l'objet des occupations de cette illustre Compagnie, dans laquelle il avoit presque autant d'amis que de confrères. Il étoit toujours empressé à contribuer, de tout son pouvoir, à tout ce qui pouvoit tendre à l'avancement des Sciences. Il suivit, pendant quelque temps, les séances; mais ses occupations, & le mauvais état de sa santé, ne lui ayant pas permis d'être aussi exact à y assister, qu'il l'auroit désiré; il donna en 1764 la démission de sa place. Son fils y fut élu, & le Roi, du consentement de l'Académie, lui permit d'y conserver sa séance & sa voix délibérative.

M. Trudaine, malgré ses occupations, avoit beaucoup lû sur toutes sortes de matières; mais il s'étoit particulièrement appliqué à l'Histoire, comme plus analogue à ses autres connoissances, & plus propre à exercer son esprit, naturellement méditatif. Il parvint à en acquérir une connoissance profonde, & sur-tout de l'histoire de son pays. Il la savoit en homme d'État, en Magistrat & en homme d'esprit. Il s'étoit aussi beaucoup occupé des ouvrages de Philosophie, & avoit été en liaison avec les hommes les plus célèbres de ce siècle, & intime ami de plusieurs d'entr'eux. Il aimoit à discuter, mais la discussion de sa part étoit si douce, qu'il ne propoisoit presque jamais ses opinions que comme des doutes. Souvent il lui est arrivé de donner lui-même du corps & de la solidité à une objection qu'on lui faisoit, pour l'attaquer ensuite avec tous les ménagemens qu'il croyoit devoir aux autres. Lorsqu'il vouloit appuyer ses opinions par des faits, il racontoit avec la grâce que donnent la vérité & la clarté. Sa politesse étoit moins le fruit de l'habitude & de l'usage du monde, que d'une bien-

veillance naturelle qu'il avoit pour ceux qu'il aimoit à voir ; & ses égards étoient d'autant plus flatteurs, qu'il n'étoit pas difficile de pénétrer qu'ils étoient fondés sur l'estime. Incapable de dissimulation, son abord froid pour ceux qu'il ne connoissoit pas assez, ou qu'il croyoit avoir quelque raison de ne pas désirer de voir, a souvent prévenu quelques personnes contre lui ; mais ceux qui ont eu occasion de le connoître plus particulièrement, conviendront, avec plaisir, qu'il étoit de la société la plus douce & la plus facile.

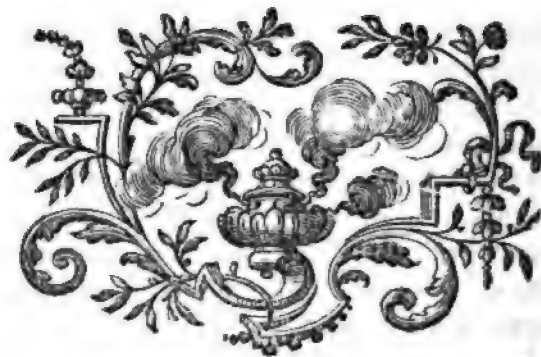
M. Trudaine étoit naturellement modeste, & cette modestie n'étoit pas chez lui une vertu dictée par la raison ou par la réflexion ; elle étoit née avec lui, & faisoit une partie essentielle de son caractère. Son amour pour la simplicité & pour la justice, le portoit à craindre de s'assigner une place qui ne fût pas la sienne. Il pensoit qu'il n'étoit pas permis à un homme de croire qu'il méritoit de la gloire. Ce sentiment qui porte à vouloir s'élever au-dessus de ses semblables, lui paroissoit injuste. Il disoit souvent que les hommes ne devoient désirer que la paix ; employer tous ses efforts pour faire du bien aux autres, mériter par-là d'en être aimé & bien voulu, étoit selon lui le moyen de se procurer cette tranquillité intérieure & extérieure, qu'il regardoit comme la seule récompense qu'il fût permis d'ambitionner. Avec cette façon de penser, qui étoit devenue un sentiment chez lui, il n'est pas difficile de s'imaginer qu'il fût loin de toute ambition. Content des circonstances dans lesquelles il se trouvoit, il ne desiroit jamais aucune place ; il avoit obtenu celles qu'il avoit sans les avoir sollicitées ; & comme il auroit su ne les pas regretter, il n'en desiroit pas de supérieures ; il les auroit plutôt craint que souhaité ; & le public, qui l'y avoit quelquefois désigné, le récompensa de sa modération, en lui accordant la considération qui y est ordinairement attachée.

M. Trudaine avoit rassemblé pendant le cours de sa vie, tous les biens de sa famille. Il joignoit à ce patrimoine des bienfaits considérables du Roi. Il fut ménager & arranger sa fortune, avec le même ordre qui l'avoit dirigé dans les affaires publiques. Également éloigné de l'avarice & de la prodigalité, il destina ses

150 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

revenus à tenir un état honorable & simple; il affectionnoit surtout la terre de Montigny, qu'il a passé beaucoup de temps à améliorer & à embellir; mais ce dont il s'occupoit particulièrement, étoit le bien-être des habitans de cette terre; il leur a procuré, par ses soins, des moyens de faire valoir leur industrie. Tout ce qu'il a fait respire son esprit; tout y porte le caractère de la solidité, de l'ordre & de la simplicité.

M. Trudaine n'eut de son mariage que trois enfans, deux fils & une fille; la fille est morte en bas âge, & son fils cadet, dans le temps où il s'occupoit de lui procurer un état. Il lui reste un fils unique, à qui le Roi avoit accordé de son vivant la survivance & l'adjonction à toutes ses places.





## ÉLOGE DE M. FERREIN.

**A**NTOINE FERREIN, Docteur en Médecine des Facultés de Paris & de Montpellier, ancien Médecin des armées du Roi, Lecteur & Professeur en Médecine au Collège Royal, Professeur d'Anatomie & de Chirurgie au Jardin du Roi, de l'Académie des Curieux de la Nature, & de celle d'Erford, naquit à Frespèch en Agénois, le 25 Octobre 1693, d'Antoine Ferrein & de François d'Elprat, tous deux d'ancienne famille & vivant noblement.

Il fit ses premières études au Collège des Jésuites d'Agen, & les fit avec distinction, & son cours de Philosophie étant fini, il alla en 1713 à Cahors pour y faire celles qui pouvoient lui ouvrir l'entrée aux hautes Sciences.

M. Ferrein étoit alors très-indécis sur le choix d'un état; ce choix devoit cependant beaucoup influencer sur le genre d'étude qu'il alloit entreprendre; son père desiroit qu'il se livrât à celle de la Jurisprudence, mais il ne s'y sentoit aucun attrait. Dans cette perplexité, il imagina un excellent moyen de se tirer d'embarras, il suivit, par déférence pour son père, les leçons des Professeurs en Droit, mais il y joignit celles des Professeurs en Médecine & en Théologie, sans cesser pour cela l'étude des Mathématiques, dont il s'étoit occupé tout le temps qui s'étoit écoulé depuis la fin de son cours de Philosophie, jusqu'à son départ pour Cahors; & ce fut cette dernière étude qui le tira de son indécision. Le Livre de Borelli, *de Motu Animalium*, lui tomba entre les mains: on sait que cet excellent Ouvrage placé, s'il m'est permis d'employer cette expression, sur les limites de la Mécanique & de l'Anatomie, ne peut être bien entendu que par un Mécanicien-Anatomiste, qui sache parler à la fois la langue des deux Sciences; l'envie de l'entendre engagea M. Ferrein à étudier l'Anatomie, dans laquelle ses talens devoient le faire primer un jour, & bientôt il prit tant de goût pour cette Science,



qu'elle le détermina entièrement à se livrer à la Médecine.

Dès qu'il eut pris cette résolution, il partit pour se rendre à Montpellier : M.<sup>rs</sup> Vieussens & Deidier y professoient alors la Médecine ; ils connurent bientôt le mérite de leur Disciple, & s'appliquèrent à le diriger dans ses études ; non content de leurs leçons, il y joignoit une lecture assidue des meilleurs Livres en ce genre, que ses Professeurs se faisoient un plaisir de lui prêter : avec ces secours & celui d'une heureuse mémoire, il fit les progrès les plus rapides dans l'étude de la Médecine, & sur-tout dans l'Économie Animale, à laquelle il s'étoit particulièrement attaché. Il joignit à cette étude celle de la connoissance des maladies & des remèdes propres à chacune, & pour se perfectionner dans cette dernière partie, il suivoit assidument les Médecins dans les hôpitaux, & examinoit avec soin le traitement des différentes maladies. Il ne cultivoit pas avec moins de soin l'Anatomie ; il assistoit à presque toutes les ouvertures de cadavres, & faisoit dans ces occasions sur le champ des discours sur les causes & les effets des maladies, dont les plus habiles Maîtres se feroient fait honneur.

Après avoir passé deux années à Montpellier dans de pareilles occupations, il y prit en 1716, le grade de Bachelier ; mais des affaires domestiques qui l'appeloient en Provence, l'obligèrent d'interrompre son Cours, & il s'y rendit sans retardement.

Si le voyage de M. Ferrein interrompit le cours de sa licence ; il n'interrompit certainement pas celui de ses études ; à peine eut-il séjourné quelques jours à Marseille, où sa réputation naissante l'avoit devancée, que les Médecins & les Chirurgiens les plus fameux de cette ville vinrent le solliciter de faire, pour leur propre utilité, un Cours suivi d'Anatomie, l'assurant qu'il auroit pour ce sujet autant de cadavres qu'il jugeroit à propos : la même prière lui fut faite par M. le Bailli de Langeron, Commandant des Galères, & par les principaux Officiers de ce corps, dans la vue d'instruire & d'éclairer, par ce moyen, les Chirurgiens de l'hôpital des forçats : on peut bien juger que M. Ferrein déféra sans peine à leurs prières ; c'étoit lui procurer de nouveaux plaisirs.

Il fit donc à Marseille plusieurs Cours d'Anatomie & d'opérations chirurgicales ;

chirurgicales, auxquels il joignit des leçons sur l'économie animale & sur les maladies relatives aux opérations, & il eut l'avantage d'y voir assister les Médecins & les Chirurgiens les plus habiles, & tout ce qu'il y avoit de plus distingué dans la Noblesse & dans le Service; ce fut à de si utiles & de si brillantes occupations qu'il consacra le temps que les affaires qui l'avoient appelé en Provence pouvoient lui laisser; & ce ne fut qu'après avoir satisfait abondamment à tout ce qu'on avoit exigé de lui qu'il retourna à Montpellier reprendre le cours de sa licence, & recevoir le grade de Docteur.

Ce grade, dans l'Université de Montpellier, se confère avec beaucoup d'éclat; le Professeur qui donne le bonnet, prononce ordinairement un discours sur quelque partie de la Médecine; M. Chicoyneau, alors Chancelier de l'Université, & qui fut chargé de cette fonction, crut pouvoir changer l'usage en cette occasion, & au lieu de traiter dans son discours un sujet de Médecine, il prit pour sujet l'éloge même de M. Ferrein: cette circonstance pensa tout gâter; la modestie du Récipiendaire, auquel on avoit soigneusement caché cette obligeante supercherie, souffrit de telle manière, qu'il se troubla & eut quelque peine à se remettre & à prononcer le discours qu'il devoit faire; nous n'avons eu garde de supprimer cette circonstance, les fautes que sa modestie lui arracha en cette occasion font une partie trop essentielle de son éloge: quelque temps après, il fut nommé pour faire, à la place de M. Astruc, alors absent, les leçons que ce dernier devoit en qualité de Professeur, ministère qu'on n'eût sûrement pas osé confier à un homme médiocre.

Jusque-là M. Ferrein n'avoit éprouvé que des succès, mais le mérite même le plus distingué n'est pas à l'abri des revers, & il en éprouva.

En 1731 & 1732, il vqua une chaire de Médecine & une de Chimie dans l'Université de Montpellier; sept Concurrents se présentèrent, & M. Ferrein fut du nombre; il fut le premier des trois que les Juges du Concours présentèrent au Roi, & cependant il ne fut pas choisi; il arrive souvent qu'en pareille

circonſtance, des raifons particulières font pencher la balance, ſur-tout quand il s'agit de décider entre le plus ou le moins de mérite, & les noms de M.<sup>rs</sup> Fizes & Marco, qui obtinrent les places, ne laiſſent aucun lieu de douter que le Miniſtère ne fût dans ce cas.

M. Ferrein fut extrêmement ſenſible à cette préférence, & il quitta ſur le champ Montpellier pour ſe rendre à Paris, où ſes talens lui avoient préparé d'illuſtres protecteurs; feu M. le Cardinal de Fleury voulut le voir, ce Miniſtre lui témoigna combien il étoit fâché de ce qu'il n'avoit pas obtenu l'une des deux chaires; & pour le conſoler plus efficacement, il lui promit de le recommander à M. Chicoyneau, alors premier Médecin, qui connoiſſoit certainement mieux que perſonne le mérite de M. Ferrein; il lui fit même offrir par M. le Garde des Sceaux (Chauvelin) d'engager le Roi à créer pour lui une nouvelle chaire à Montpellier, s'il vouloit retourner: des offres ſi flatteuſes étoient peut-être plus glorieuſes à M. Ferrein qu'il ne lui eût été d'obtenir une des deux chaires, mais il ne crut pas devoir les accepter; il avoit conçu le deſſein d'augmenter ſes connoiſſances, & ce fut dans cette vue qu'il ſollicita en 1733 la place de Médecin en chef de l'armée que le Roi envoyoit en Italie: ſa préſence n'y fut pas inutile, & ſes nombreuſes obſervations lui eurent bientôt fait reconnoître qu'il étoit facile d'établir dans les Hôpitaux militaires un ordre qui diminueroit le nombre des morts des deux tiers, la durée des maladies de moitié, & par conſéquent très-confidérablement la dépenſe; le Miniſtre n'eut ſûrement pas lieu de ſe repentir de lui avoir confié cette place qu'il occupa juſqu'en 1735.

A peine étoit-il de retour à Paris qu'il ſe préſenta une nouvelle occaſion d'exercer ſes talens & ſon humanité; une eſpèce de fièvre peſtilentielle, connue ſous le nom de *ſuette*, déſoloit alors le Vexin, & emportoit au moins les deux tiers de ceux qu'elle attaquoit, & cela malgré tous les ſecours qu'on pouvoit leur donner; M. Ferrein y fut envoyé, bientôt ſon extrême ſagacité lui eut fait reconnoître les cauſes du mal, & la méthode qu'il donna pour y remédier fut ſi efficace, que non ſeulement il ne perdit pas un ſeul de ceux qu'il traita, mais que la même

méthode envoyée dans plusieurs autres provinces où le même fléau se fit sentir, eut par-tout le même succès.

M. Ferrein avoit enfin pris le parti de se fixer dans la Capitale, & pour se procurer le droit d'y exercer la Médecine, il se présenta à la Faculté de Médecine; il y fut reçu Bachelier en 1736, & Licencié en 1738, ayant obtenu le premier rang dans la licence, distinction d'autant plus flatteuse qu'on la doit en partie aux suffrages de ceux qui ont droit de la disputer.

La réputation que M. Ferrein s'étoit si justement acquise, tant comme Médecin que comme Anatomiste, avoit porté son nom à l'Académie, & l'y avoit fait désirer; il fut nommé le 12 Février 1741 à la place d'Adjoint-Anatomiste, vacante par la promotion de M. Senac à celle d'Associé, & l'année suivante à celle d'Associé, qu'avoit eue feu M. Maloët; un avancement si rapide est une preuve certaine de la façon de penser de l'Académie à son égard.

Il n'avoit pas attendu jusque-là à justifier la bonne opinion que l'Académie avoit conçue de lui, il s'y étoit fait connoître par un Mémoire sur la structure & sur les vaisseaux du foie; il distingue dans chaque lobule de ce viscère deux substances, l'une corticale & l'autre médullaire, qui est recouverte par la première; il y démontre plusieurs particularités dans les vaisseaux sanguins & lymphatiques & dans les conduits biliaires; des insertions de ces vaisseaux & même des canaux biliaires dans les vaisseaux sanguins, des expansions des canaux biliaires sur le diaphragme, toutes découvertes nouvelles qui jettent un grand jour sur le cours de la bile & sur le mouvement de la lymphe dans les vaisseaux; il joint à ses autres découvertes celle du réseau lymphatique qui enveloppe le poumon; il finit par prouver que les vaisseaux lymphatiques du foie ont une origine en partie commune avec les tuyaux biliaires, & indique à cette occasion un moyen facile de faire paroître ceux du rein, en poussant de l'air par l'uretère dans le bassin du rein.

Deux ans après il avoit donné de nouvelles recherches sur les vaisseaux de l'œil, nommés par Vieussens, *névro-lymphatiques*. Le sang qu'on y voit dans quelques inflammations avoit fait imaginer que ces vaisseaux communiquoient avec les vaisseaux

sanguins, recevoient d'eux la partie séreuse du sang, & servoient à la faire circuler dans l'organe. Ce système étoit très-vraisemblable; mais il n'étoit pas prouvé par le fait; M. Ferrein parvint, à force de recherches, à voir ces vaisseaux de l'œil dans leur état naturel, & il les démontra à l'Académie: cette recherche étoit cependant si difficile, que la plupart des Anatomistes regardoient comme impossible de démontrer anatomiquement ces vaisseaux.

Il revint encore sur cette matière en 1741, & il constata l'existence des artères lymphatiques. On n'avoit jusque-là connu que les veines de cette espèce; il aperçut dans l'œil d'un chien des tuyaux lymphatiques, qui lui parurent différens des veines; & qu'il reconnut pour les artères qu'on soupçonnoit. Cette découverte lui rappela celle qu'il avoit précédemment faite de vaisseaux semblables dans la matrice; il reprit ses observations sur l'un & sur l'autre organe, & parvint à suivre les ramifications de ces vaisseaux, & à les reconnoître bien certainement pour ce qu'ils étoient réellement.

Cette même année fut marquée par un travail anatomique d'un autre genre, & qui fit le plus grand bruit dans tout le monde Physicien, ce fut son Ouvrage sur l'organe immédiat de la voix & sur ses différens tons.

Tous ceux qui avoient travaillé sur cette matière, avoient toujours regardé l'organe de la voix comme un instrument à vent seulement, quelques-uns regardoient l'ouverture de la glotte comme la bouche d'un tuyau de flûte, tandis que d'autres la comparoient à l'anche d'un hautbois; M. Ferrein fit voir que ni l'une ni l'autre de ces assertions n'étoit exactement vraie, & que l'organe en question étoit un instrument d'une espèce mixte & toute différente de celle que nous connoissons.

Les deux lèvres de la glotte sont, selon lui, deux véritables cordes qui, comme celles d'un violon, rendent un son d'autant plus grave, qu'elles sont plus lâches, & d'autant plus aigu, qu'elles sont plus tendues; le vent, chassé par le poumon, est l'archet qui met ces cordes en jeu; & c'est par leurs vibrations plus ou moins promptes, qu'elles rendent les différens tons. Les organes destinés à tendre ces cordes, les muscles qui les font agir; rien,

En un mot, de ce qui peut constater cette hypothèse, n'est échappé aux recherches de M. Ferrein.

Il parvint même à faire voir le jeu de toutes ces parties sur des larynx détachés, aux lèvres de la glotte desquels il pouvoit, au moyen de fils & de chevilles, donner la tension qu'il vouloit. De ces expériences plusieurs fois répétées, il résulte que, malgré la différence d'un larynx vivant à celui qui est détaché de l'animal, la voix ou le cri des différens animaux est très-reconnoissable; que les lèvres tendineuses de la glotte également tendues, ne forment qu'un son; mais que si on les tend inégalement, ou qu'avec une pince on altère la longueur de l'une des deux, alors chaque corde vocale produit un son différent & proportionné à sa longueur ou à sa tension: en un mot, que ces cordes ont toutes les propriétés de celles des instrumens à archet. Il terminoit ce Mémoire en annonçant un autre organe qui produit certaines différences de la voix, mais il n'a jamais donné la description de ce dernier.

Les ouvrages dont nous venons de parler, étoient des preuves certaines du savoir & de la capacité de M. Ferrein en Anatomie; & la place qu'il occupoit à l'Académie, le mettoit à portée de rendre ce talent utile au Public; mais indépendamment de celui-là, il en avoit encore un autre aussi précieux, c'étoit celui d'enseigner avec netteté. Pour mettre celui-ci à profit, il fut nommé, en 1742, à la place de Professeur en Médecine & en Chirurgie au Collège Royal, vacante par la mort de M. Andry; &, non content de s'acquitter, avec le plus grand succès, de ce ministère, il faisoit encore des Cours particuliers, d'où sont sortis un grand nombre d'excellens sujets qui, devenus eux-mêmes de grands hommes, ont porté sa réputation dans toute l'Europe.

M. Ferrein méritoit d'autant mieux cette célébrité, que ses leçons n'étoient pas bornées à la seule Anatomie; mais, accompagnées de tout ce qui pouvoit instruire ses auditeurs dans la bonne pratique de la Médecine. Combien de gens doivent, sans le savoir, la santé & peut-être la vie à un Professeur de cette espèce!

Ces occupations multipliées, & la pratique de la Médecine à laquelle se livroit M. Ferrein, ne l'empêchoient pas de satisfaire

au devoir d'Académicien & de payer, en quelque sorte, au Public, le tribut que nous nous faisons tous honneur de lui devoir. Il donna, en 1744, deux Mémoires sur le mouvement des mâchoires; dans le premier, il fait voir que le mouvement de la mâchoire inférieure ne se fait pas toujours autour des condyles ou pivots de cette mâchoire, mais que souvent ces condyles sortent de la cavité où ils sont articulés; d'où il suit que plusieurs mouvemens de la mâchoire inférieure ne s'exécutent qu'au moyen d'une espèce de luxation naturelle qui se rétablit d'elle-même; & dans le second, il établit, contre le sentiment de plusieurs célèbres Anatomistes, que, par la disposition des muscles, la mâchoire inférieure ne contribue pas seule à l'ouverture de la bouche, mais que la tête, dont la mâchoire supérieure fait partie, s'incline & s'élève pour coopérer à cette ouverture.

En 1749, il donna un Mémoire très-étendu sur la structure des viscères glanduleux; il avoit déjà entamé, en 1733, cette matière, comme nous l'avons dit en parlant de son travail sur les vaisseaux du foie; il reprend ces mêmes idées, en les appliquant, non-seulement au foie, mais encore aux autres viscères de même nature, & sur-tout aux reins: il s'écarte beaucoup des idées adoptées même par les plus célèbres Anatomistes; il prétend que ces viscères ne sont composés ni de grains glanduleux, ni de vaisseaux sanguins, mais, pour la plus grande partie, de tuyaux blancs, qu'il a distinctement reconnus dans les reins & qu'il croit avoir aussi retrouvés dans le foie & dans les capsules atrabilaires; ces vaisseaux gardent constamment leur blancheur dans le temps même où les vaisseaux sanguins sont le plus gorgés de sang, & une injection colorée très-pénétrante, que M. Ferrein a poussée dans ces derniers, n'a jamais pu l'altérer; preuve évidente que ces vaisseaux ne font point partie du système des vaisseaux sanguins: des grains rouges qui se trouvent dans le foie, paroissent se refuser à l'idée de M. Ferrein; un heureux hasard vint la confirmer; en disséquant un foie obstrué, ces grains gonflés décélèrent leur véritable structure, & il reconnut qu'ils n'étoient composés que de filets blancs extrêmement déliés & que leur finesse déroboit aux yeux dans leur état naturel. La structure du

rein offrit à M. Ferrein la même composition; il y reconnut une substance corticale & une substance médullaire, mais bien plus mêlées qu'on ne pensoit. M. Ferrein trouva qu'un seul rein est composé d'environ vingt-huit parties, toutes enveloppées de leur substance corticale qui pénètre par conséquent dans l'intérieur du rein, en donnant cependant passage aux vaisseaux qui y apportent ou en remportent le sang: la même structure se retrouve dans les reins des oiseaux où elle se présente même plus facilement; enfin il résulte des observations de M. Ferrein, que la plupart des organes glanduleux du corps animal, sont composés d'un amas de vaisseaux d'une espèce particulière, & qu'on s'étoit beaucoup trompé en les regardant comme presqu'entièrement composés de vaisseaux sanguins.

Depuis 1749 jusqu'en 1766, on ne trouve plus aucun Mémoire de M. Ferrein dans les Recueils de l'Académie; ce n'étoit certainement pas qu'il se fût ralenti sur son travail ni sur l'assiduité aux assemblées, il faisoit part à l'Académie très-soigneusement des observations qu'il faisoit ou qui lui étoient communiquées; il en avoit entr'autres donné une bien singulière d'un homme qui avoit vécu & fait un voyage de plus de quatre-vingts lieues, ayant le bout d'une lame d'épée qui perçoit une des vertèbres & traversoit toute la moëlle dorsale.

La raison de l'inaction apparente de M. Ferrein, étoit le surcroît d'occupation qui lui étoit survenu en 1751: feu M. Winslow, accablé du poids de ses années, avoit, comme nous l'avons dit dans son éloge, demandé un Coadjuteur à sa place de Professeur au Jardin du Roi, & M. Ferrein avoit été chargé de ce ministère: cette nouvelle place acheva d'occuper le temps que les fonctions de Professeur au Collège Royal, la pratique de Médecine & les Cours particuliers qu'il faisoit, lui laissoient libre.

Il travailloit cependant, quoique plus lentement, malgré ses occupations, & il donna, en 1766, le commencement d'un grand travail sur les inflammations du foie: il en résulte que cette maladie, que la plupart des Auteurs de Médecine mettent au rang des plus rares, est très-commune, qu'elle peut exister sans tension, sans douleur & sans fièvre, qu'elle a cependant des



signes certains auxquels on la peut reconnoître, & que M. Ferrein indique: que le foie, contre l'opinion de très-habiles Médecins, a une grande sensibilité; que cette maladie est souvent produite par l'amas de mauvaises humeurs dans les premières voies, & que l'inégalité de force ou de vitesse des battemens du poulx; inégalité qui peut aller quelquefois jusqu'à l'intermittence, est une marque certaine de la présence de ces humeurs & du besoin de la purgation. M. Ferrein donne, dans le plus grand détail, tous les accidens qui peuvent procéder, accompagner ou suivre cette maladie, & le traitement nécessaire pour la guérir & pour en prévenir les retours. Ce Mémoire est imprimé dans le volume de 1766 qui va paroître\*; celui de 1767, qui le suivra de près; contient encore un Mémoire de M. Ferrein, dans lequel il fait voir qu'il est très-douteux qu'il y ait eu de véritables hermaphrodites, c'est-à-dire des individus qui aient réuni les deux sexes; & que tous ceux de cette espèce qui ont été examinés; n'avoient que le sexe féminin, joint à une apparence trompeuse des parties qui caractérisent le sexe masculin. Le volume même de 1768, contiendra encore une observation importante de M. Ferrein sur une difficulté d'avaler, dont il trouva la cause dans de mauvaises matières contenues dans l'estomac, & dont la présence occasionnoit une affection spasmodique dans les nerfs des parties qui servent à la déglutition, & qu'il guérit, selon ce principe, avec la plus grande facilité.

Cette observation a été le dernier ouvrage que M. Ferrein ait donné à l'Académie; il commençoit dès-lors à se ressentir de son âge & de ses longs travaux; il avoit même été obligé de se désigner un successeur à la chaire de Médecine du Collège Royal, & l'Académie a confirmé, pour ainsi dire, le choix qu'il avoit fait en admettant, au nombre de ses Membres, M. Portal qu'il avoit présenté au Roi pour lui succéder.

La santé de M. Ferrein ne paroïssoit cependant pas se démentir, & il ne s'étoit, en aucune façon, ralenti sur l'assiduité

\* Ceci étoit vrai le 15 Novembre 1769, jour de la prononciation de cet Éloge, le Volume de 1766 n'ayant paru qu'au commencement de Décembre, & celui de 1767 en 1770.

aux Assemblées de l'Académie, lorsqu'il fut frappé d'une attaque d'apoplexie, étant actuellement en consultation près d'un malade pour lequel il avoit été appelé : on tenta vainement toutes les ressources que l'art peut offrir en pareil cas ; le coup étoit porté , & il mourut le 28 Février de cette année \*, âgé de soixante-quinze ans & un peu plus de quatre mois.

\* 1769.

M. Ferrein paroïssoit sérieux & concentré dans ses études ; cependant lorsqu'il étoit avec ses amis , il s'égayoit , racontoit plaisamment , & se livroit à une raillerie assez fine. On lui a reproché de l'avoir quelquefois rendue amère & de n'avoir pas toujours eu assez d'égards pour ceux qui couroient la même carrière que lui , ou dont il croyoit avoir quelque lieu de se plaindre ; sa vivacité , son amour pour l'Anatomie , & l'espèce d'impatience que lui causoient les fautes qu'il remarquoit en ce genre , parvent lui servir d'excuse.

Dans les cours publics & particuliers qu'il a faits sur toutes les parties de la Médecine, il ne s'est jamais une seule fois démenti, ni sur la netteté, ni sur la précision ; il mettoit un ordre admirable dans ses leçons, ne perdoit jamais son objet de vue, & épargnoit à ses Auditeurs toute digression qui auroit pu les écarter du sujet principal : aussi a-t-il compté parmi ses Disciples, presque tous ceux qui occupent les principales chaires & les postes les plus brillans de l'Europe en ce genre, & mérité d'être mis, par un consentement unanime, au rang des premiers Anatomistes de notre siècle ; il étoit très-assidu auprès de ses malades, les observations continuelles qu'il faisoit sur leurs maladies, lui avoient acquis le talent précieux de les reconnoître, quelque compliquées qu'elles pussent être, & sa réputation en ce genre lui attiroit une infinité de consultations qui lui emportoient une partie considérable de son temps. On ne doit donc pas être étonné qu'il ne nous reste que très-peu d'écrits de lui ; on a cependant, indépendamment de ses Mémoires Académiques, quelques Thèses de Médecine, qu'on peut regarder comme des dissertations achevées ; & un petit Écrit, contenant les questions qu'il avoit traitées dans le temps qu'il concourut à la chaire vacante à Montpellier, &

*Hist. 1769.*

X

qu'il avoit fait imprimer dans le temps : mais si la postérité ne jouit pas de beaucoup d'écrits de M. Ferrein , elle jouira des Anatomistes qu'il a formés ; & la gloire qu'ils acquerront , par leurs Ouvrages , rejaillira toujours sur celui qui les a mis en état de les produire.

La place de Pensionnaire-Anatomiste de M. Ferrein a été remplie par M. Hérissant , associé dans la même classe.



Il étoit impossible que des dispositions si bien marquées échappassent aux regards du P. de la Tour, alors Principal de ce Collège; il crut devoir faire part à feu M. Cassini de cette espèce de phénomène; celui-ci desira voir des ouvrages du jeune homme : il en fut frappé, & conçut dès ce moment le dessein de cultiver des talens si précieux : il lui fit lever les plans de plusieurs Maisons royales; il le fit travailler à la Carte de France; & pour mettre à profit son talent pour l'Astronomie, il lui fit traduire les Tables astronomiques de M. Halley, que M. l'Abbé Chappe publia en

1752, avec des additions considérables: il étoit déjà en état, non-seulement d'entendre les ouvrages de ce célèbre Astronome, mais encore de les commenter & de les étendre.

Dès l'année suivante, ses talens furent mis à une autre épreuve; le Roi ordonna la levée de plusieurs plans dans le comté de Bitche en Lorraine, & il fut chargé de la direction de ces plans & des arpentages qu'il y avoit à faire dans la forêt qui entoure cette ville.

On auroit peut-être peine à trouver un Ciel moins favorable aux Observations astronomiques que celui de la ville de Bitche, & M. l'Abbé Chappe n'avoit point d'instrumens. Son amour pour l'Astronomie fit disparaître à ces yeux ces inconvéniens; il fut se procurer un quart-de-cercle qui se trouvoit chez M. le Prince des Deux-Ponts; il vérifia cet instrument; il trouva moyen d'avoir une lunette & une pendule; & grâce à l'assiduité avec laquelle il fut pour ainsi dire à l'affût des momens favorables aux observations, il en fit assez pour déterminer la position de cette ville; espèce de conquête pour la Géographie, & fruit surnuméraire de son voyage.

Ce fut au retour de cette espèce d'expédition que M. l'Abbé Chappe se présenta à l'Académie, & qu'il y obtint, le 17 Janvier 1759, la place d'Adjoint, vacante par la promotion de M. de la Lande à celle d'Associé.

Dès l'année suivante, il se présenta une occasion de signaler ses talens & d'exercer son activité. Cette année fut remarquable, par l'apparition de deux Comètes; M. l'Abbé Chappe les observa toutes deux, avec la plus grande assiduité, & donna à l'Académie le détail de ses observations, & les élémens de la théorie de ces Comètes qu'il en avoit conclus; il y joignit des Observations suivies de la Lumière zodiacale, qu'il avoit faites en même temps, & celle d'une assez belle Aurore boréale, qui s'étoit trouvée pour ainsi dire sous sa main dans le temps de ses recherches.

Presqu'aussi-tôt après la lecture de ce Mémoire, M. l'Abbé Chappe entreprit une expédition d'une bien plus grande importance. Le passage de Vénus sur le Soleil, qui devoit arriver le 6 Juin 1761, occupoit alors tous les Astronomes. Pour tirer le

plus grand parti possible de l'Observation de ce phénomène, il falloit qu'elle fût faite en des endroits très-éloignés les uns des autres, & dont la position étoit déterminée par le calcul. L'un de ces endroits étoit Tobolsk, capitale de la Sibérie, située dans le climat le plus froid de tout l'univers connu; l'autre étoit l'île Rodrigue, espèce d'écueil presque désert, situé dans la mer des Indes. M. Pingré offrit de se rendre à ce dernier poste, & M. l'Abbé Chappe entreprit d'aller faire l'Observation à Tobolsk: l'un alloit braver l'ardeur de la zone torride, & l'autre affronter les glaces d'une région plus véritablement hyperborée que celle que les Anciens qualifioient de ce nom.

La difficulté de ce voyage étoit extrême, il falloit traverser une partie de l'Europe dans la saison la plus incommode, parce qu'une fois arrivé à Pétersbourg il falloit encore faire huit cents lieues en traîneau, espèce de voiture qui ne va que sur la neige durcie, en sorte que M. l'Abbé Chappe n'avoit rien de plus à craindre que de voir l'horrible froid qu'il alloit éprouver, se relâcher.

Ces désagrémens ne rebutèrent pas M. l'Abbé Chappe, il partit de Paris à la fin de Novembre 1760, & arriva un mois après à Vienne où il ne séjourna que huit jours; Leurs Majestés Impériales auxquelles il fut présenté par M. le Comte de Choiseul, Ambassadeur de France, l'honorèrent du plus favorable accueil & lui firent les plus vives instances pour l'engager à repasser par Vienne à son retour; il n'en reçut pas un moins favorable du Roi de Pologne auquel M. le Marquis de Paulmy, alors notre Ambassadeur en cette Cour le présenta.

Il arriva enfin à Pétersbourg le 13 Février & eut l'honneur d'être présenté à l'Impératrice par M. le Baron de Breteuil; les Astronomes Russes qui devoient aller faire l'observation en différens endroits étoient déjà partis il y avoit près d'un mois, & il n'y avoit pas un moment à perdre s'il vouloit arriver à Tobolsk avant le dégel; cependant malgré toute la vivacité qu'y mit M. l'Abbé Chappe & tous les soins que M. le Baron de Breteuil & M. le Comte de Voronzof, Grand Chancelier de Russie, se donnèrent pour hâter son départ, il ne put partir que le 10

Mars 1761, risquant d'être surpris par le dégel au milieu des vastes forêts de la Sibérie ou d'être accablé dans les défilés des montagnes par des masses énormes de neige qui s'en détachent alors; la vue de tous ces dangers & les incommodités d'un voyage fait en traîneau dans ces déserts & par le froid le plus rude, n'effrayèrent point l'intrépide Académicien & il osa les affronter.

Le succès répondit à son courage, & malgré tous les accidens qu'il éprouva, il arriva à Tobolsk le 10 Avril, ayant fait environ huit cents lieues depuis son départ de Pétersbourg & plus de quinze cents depuis qu'il étoit parti de Paris.

Il étoit temps que son voyage finît, le dégel étoit si proche que six jours après son arrivée la débacle se fit avec une inondation considérable; la rivière d'Irtiz sur laquelle Tobolsk est bâtie, couvrit une grande partie de la basse ville; on peut juger du risque qu'il auroit couru si cette fonte de neiges & de glaces l'eût surpris quelques jours auparavant dans les déserts ou dans les montagnes qu'il venoit de traverser.

Aussitôt après son arrivée il alla présenter les ordres de l'Impératrice à M. Ismaëlof, Gouverneur de cette ville, auquel le public doit une très-bonne Carte de la mer Caspienne; cet Officier fut charmé de donner en cette occasion des marques de son zèle pour les Sciences dont il connoissoit d'autant mieux l'utilité qu'il les cultivoit lui-même; il donna aussitôt ses ordres pour la construction d'un Observatoire, qui ne put cependant, malgré toute l'activité qu'on y mit, être fini que le 11 Mai; M. l'Abbé Chappe y fit aussitôt porter ses instrumens & il y observa une éclipse de Lune & une de Soleil; cette dernière étoit d'autant plus importante qu'elle devoit donner la longitude de Tobolsk qu'on ne pouvoit obtenir de l'observation des satellites de Jupiter dans un climat où dans cette saison le Soleil éclaire presque continuellement.

Le 5 Juin, tout fut disposé pour l'observation, mais le Ciel se couvrit pendant la nuit; on peut juger de la situation de M. l'Abbé Chappe qui se voyoit arracher, pour ainsi dire des mains, le fruit d'un si terrible voyage, entrepris uniquement pour cet objet.

Il en fut cependant quitte pour la peur, le Ciel se découvrit

au moment de l'observation, & elle fut faite avec toute la précision possible, l'Académie en a publié le détail dans ses Mémoires, & cette observation a été un des plus solides fondemens de la détermination de la parallaxe du Soleil.

M. l'Abbé Chappe resta environ trois mois à Tobolsk après son observation, pour déterminer exactement la latitude de cette ville & pour s'assurer de l'état de ses instrumens, précaution nécessaire pour ne rien laisser en arrière qui pût altérer la certitude de ses opérations.

Jusque-là la force du tempérament de M. l'Abbé Chappe avoit résisté aux fatigues & à la rigueur du climat, mais à peine eut-il fini ses travaux qu'un vomissement de sang accompagné d'une foiblesse accablante, vinrent l'avertir qu'il devoit se hâter de partir.

Il partit en effet & prit la route par Katerinburg, plus au sud que le chemin qui l'avoit amené à Tobolsk, & y arriva après avoir traversé une plaine de cent lieues, si marécageuse qu'il étoit obligé de se faire précéder par un Soldat, qui fendoit le terrain & le rendoit praticable en y jetant des fascines, c'étoit à la lettre faire son chemin & non pas seulement le parcourir; il eut besoin dans cette route d'une escorte qui pût le mettre à couvert du brigandage qu'y exerçoient alors des déserteurs Russes; ce n'étoit pas assez d'être exposé aux dangers de cet affreux climat, il falloit encore qu'il le fût à ceux dont le menaçoit la méchanceté des hommes.

C'est à Katerinburg ou dans son voisinage que s'exploient presque toutes les mines que les Russes ont mises en valeur, M. l'Abbé Chappe n'oublia pas de les visiter, après quoi il partit de cette ville & arriva à Casan le 1.<sup>er</sup> Octobre, ayant employé pendant toute cette route quarante-deux chevaux distribués sur deux voitures & cinq chariots, preuve assez complète de la difficulté des chemins.

Casan est la capitale du royaume du même nom, dépendant de l'empire de Russie; elle est placée vers les 55 ou 56 degrés de latitude septentrionale, cependant quoique l'hiver y commençât alors, M. l'Abbé Chappe se crut en y arrivant, transporté dans le climat



le plus tempéré; on peut juger par-là de celui qu'il venoit de quitter: il fit à Casan quelques observations astronomiques qui en déterminèrent exactement la longitude & la latitude, mais l'hiver qui s'approchoit ne lui permit pas d'y faire un long séjour & l'obligea de hâter son départ.

Nous ne pouvons cependant passer sous silence un phénomène d'un autre genre qu'il y observa; le Prélat combla de politesse M. l'Abbé Chappe, qui trouva en lui un homme instruit dans les Sciences, l'Histoire & la Littérature, aussi étoit-il respecté dans toute la Russie, c'étoit le seul Prêtre Russe qui n'eût pas été étonné qu'on fût venu de Paris observer Vénus à Tobolsk; le reste de la route de M. l'Abbé Chappe n'offre plus rien de particulier, il arriva à Pétersbourg sans accident fâcheux & y passa l'hiver.

Ce fut pendant son séjour dans cette capitale que l'Impératrice de Russie fit tous ses efforts pour l'attacher à son service, elle lui fit offrir la même place que feu M. de l'Isle avoit autrefois occupée, mais quelque avantageuses que fussent les offres de cette Princesse, l'amour de M. l'Abbé Chappe pour sa patrie & son attachement pour son Roi ne lui permirent pas de les accepter; il ne resta à Pétersbourg que jusqu'au moment où le printemps eut rendu la mer libre & s'embarqua pour revenir en France, où il arriva au mois d'Août 1762, ayant employé près de deux ans à son voyage.

On ne s'imagineroit pas aisément que la difficulté des routes & l'espèce de précipitation avec laquelle il étoit presque toujours obligé de voyager lui eussent pu permettre de faire des observations en chemin: il en faisoit cependant, & de toute espèce; celles du baromètre lui ont, par exemple, fourni un moyen de former une espèce de nivellement de toute sa route, dont il a donné une coupe; il en résulteroit que le terrain de la Sibérie, du moins dans l'endroit où il l'a parcourue, est beaucoup moins élevé qu'on ne l'avoit cru jusque-là; nous disons il en résulteroit, car le peu de temps & le peu de commodité qu'avoit eu M. l'Abbé Chappe, pour faire ces Observations, qui exigent beaucoup plus d'attention qu'on ne pense, ne permet pas d'accorder à ce résultat la même confiance

confiance qu'à ses autres Observations. Il examinoit par-tout la nature du terrain & ses productions, les rivières, les fontaines, les montagnes, les volcans, les mœurs & les coutumes des habitans, les animaux, les minéraux; en un mot, tout ce qui pourroit servir à donner une entière connoissance du vaste empire de Russie; il rassembloit même des Mémoires sur les régions qu'il n'avoit pu parcourir, & ne négligeoit rien pour être bien instruit de tout ce qui pouvoit avoir rapport à cet objet.

Aussitôt après son retour en France, il s'occupa à rassembler tous ces matériaux, & en forma une relation de son voyage, ornée de Cartes, de plans, de profils, de vues, & de toutes les autres planches nécessaires à l'intelligence de cet Ouvrage, qui parut en trois volumes *in-quarto*, en l'année 1768. A voir l'immense quantité d'Observations de tout genre, contenue dans cet Ouvrage, on seroit tenté de le regarder moins comme celui d'un Académicien, que comme celui d'une Académie; encore faudroit-il la supposer aussi Académie de Belles-Lettres, du moins si l'on fait attention à la quantité de morceaux intéressans sur l'Histoire & l'origine des différens peuples de ce vaste Empire, qui y sont contenus.

Ce travail occupa M. l'Abbé Chappe depuis son retour de Sibérie; presque jusqu'au temps de son départ pour la Californie; il ne négligeoit cependant aucune des fonctions d'Astronome, & n'en étoit pas Observateur moins assidu. Les volumes de l'Académie, & plus encore les registres de l'Observatoire, peuvent faire voir qu'il y avoit peu de phénomènes célestes qui lui échappassent. On peut entr'autres citer quatre années entières d'observations des éclipses de satellites qu'il avoit fait; il y avoit joint des observations de Mercure, & entr'autres une qu'il avoit faite au méridien, en obscurcissant le cabinet d'observation, & alongeant le tuyau de la lunette avec un bout de tuyau de deux pieds, qui avoit à son extrémité un diaphragme de six lignes d'ouverture; observation qui mérite d'autant plus d'attention, que cette ingénieuse méthode pourra peut-être multiplier les observations de cette planète au méridien, & contribuer à la perfection de la théorie.

*Hist. 1769.*

## 176 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

Il donna à l'Académie, en 1767, une Observation d'un genre différent. On est aujourd'hui convaincu que le tonnerre & l'électricité ne sont qu'une seule & même chose; quelques Physiciens avoient avancé que dans certaines circonstances une partie du trait de feu partoît du corps frappé de la foudre & l'autre de la nuée; mais on leur avoit contesté ce fait. M. l'Abbé Chappe avoit observé ce phénomène à Tobolsk, mais il voulut s'en assurer plus positivement, & il profita pour cela d'un orage qui arriva à Paris le 6 Août 1767: il fut servi à souhait; il vit distinctement s'élever un trait de feu du pied d'un mât, placé à environ trente-deux toises de l'Observatoire, où il étoit avec M.<sup>r</sup> Cassini fils & de Prunelay; ce trait de feu en joignit un venant de la nuée; & ce fut au moment de cette jonction que se fit l'explosion; nouvelle preuve que le tonnerre ne diffère que par la force, de l'électricité des globes de verre, & qu'il agit précisément comme elle. Nous avons rendu compte de cette singulière Observation dans l'Histoire de l'Académie\*.

\* Voy. Hist.  
1767, p. 31.

Ce Mémoire est le dernier que M. l'Abbé Chappe ait donné à l'Académie, si on en excepte cependant son observation de l'Éclipse de Lune du 4 Janvier 1768, il étoit dès-lors occupé des préparatifs du nouveau voyage qu'il méditoit.

Vénus qui avoit passé sur le Soleil le 6 Juin 1761, devoit y passer encore le 3 Juin 1769, on étoit sûr d'avoir d'excellentes observations faites dans le nord-est de l'Europe, mais il falloit en avoir qui fussent faites au sud-ouest sur la côte la plus occidentale de l'Amérique, & le calcul indiquoit pour un des endroits les plus favorables, le cap San-Lucar à la pointe de la Californie, c'en fut assez pour déterminer M. l'Abbé Chappe à s'offrir pour y aller faire l'observation; son offre fut acceptée, & après s'être pourvu de tous les instrumens nécessaires, il partit de Paris pendant les vacances de 1768 pour se rendre à Cadix où il devoit s'embarquer sur un vaisseau de la flotte Espagnole qui alloit à la *Vera-cruz*; mais l'armement de ce navire n'allant pas assez vite au gré de son impatience, il osa risquer de traverser l'océan sur un petit bâtiment qui n'avoit que huit hommes d'équipage; sa hardiesse

lui réussit, il arriva heureusement à la *Vera-cruz* & passa de-là à Mexico, où les ordres de M. le Marquis de Croix, Vice-roi de cet empire, secondèrent si bien son activité, qu'il fut rendu à San-Lucar de Californie dix-neuf jours avant l'observation; il profita de cet intervalle pour s'y disposer & la fit effectivement avec le temps le plus favorable; c'est-là tout ce que nous en savons jusqu'à présent, n'ayant pas encore reçu les papiers de M. l'Abbé Chappe que M. Pauli, Ingénieur françois, le seul de sa suite qui lui ait survécu, s'est chargé de remettre à l'Académie \*.

Il régnoit alors dans ce canton de la Californie une maladie épidémique dangereuse; trois jours après l'observation, M. l'Abbé Chappe en fut attaqué & aucun des siens n'en fut exempt; il auroit pu cependant en échapper si son zèle ne lui eut pas fait commettre une imprudence qui lui coûta la vie; il étoit mieux & dans une espèce de convalescence, il voulut absolument passer la nuit à observer une Éclipse de Lune qui arrivoit le 18 Juin; cette fatigue lui occasionna une rechute de laquelle il mourut le 1.<sup>er</sup> Août 1769, âgé de quarante-un ans & quelques mois; trois jours avant sa mort il disoit, *je sens bien qu'il faut finir & que je n'ai que peu de temps à vivre, mais j'ai rempli mon objet & je meurs content*; ces mots peignent bien vivement son amour pour l'Astronomie & son attachement à son devoir.

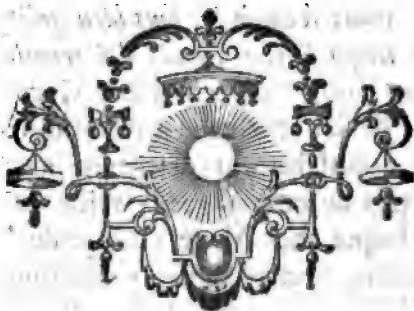
Il étoit au reste parfaitement déterminé avant son départ à courir tous les risques de ce voyage; la veille du jour qu'il partit de Paris, étant à souper chez M. le Comte de Mercy, Ambassadeur de l'Empereur, quelqu'un de la compagnie essaya de le détourner de son dessein en lui représentant les risques qu'il auroit à courir, il répondit avec fermeté que la certitude de mourir le lendemain de l'observation ne seroit pas un motif suffisant pour l'empêcher de partir.

M. l'Abbé Chappe étoit de taille médiocre, assez replet, d'un tempérament robuste & très-vif; il avoit une ame simple,

\* Ceci étoit vrai le 14. Novembre 1770, que cet Éloge fut prononcé; mais l'Académie a reçu depuis ces papiers, dans lesquels elle a trouvé le détail le plus complet & le plus satisfaisant de l'observation.

libre & franche & un cœur noble, droit & plein de candeur; il étoit naturellement gai, social & porté à l'amitié; il étoit lié avec ce qu'il y avoit de plus grand, le Roi même daignoit souvent s'entretenir avec lui & a honoré sa mort de ses regrets; jamais personne n'a été plus désintéressé que lui, il aimoit la gloire; mais il ne vouloit l'obtenir qu'à bon titre; il vouloit mériter ses faveurs & non pas les dérober; son courage & sa fermeté étoient sans bornes, ce que nous avons dit de lui en fournit plus d'une preuve; il eût été seulement bien à désirer que la dernière qu'il en a donnée & qui mérite tant d'éloges, lui eût été moins funeste;

La place d'Adjoint-Astronome de M. l'Abbé Chappe, a été remplie par M. Messier, Astronome de la Marine, & de la Société Royale de Londres.





## ÉLOGE DE M. JARS.

GABRIEL JARS, de l'Académie des Arts, établie à Londres, & de celle des Sciences, Belles-Lettres & Arts de Lyon, naquit à Lyon le 26 Janvier 1732, de Gabriel Jars, intéressé dans les mines de Saint-Bel & de Cheiffey, & de Jeanne-Marie Valioud, tous deux d'ancienne & honnête famille. Il étoit le cadet de six enfans, trois garçons & trois filles; ses deux aînés ont suivi comme lui le travail des mines, & se sont distingués dans cette laborieuse carrière.

M. Jars, dont nous faisons l'éloge, fit ses premières études au grand Collège de Lyon, & il s'y étoit déjà distingué lorsque M. son Père commença l'exploitation des mines de Saint-Bel & de Cheiffey, & il crut y devoir appeler son fils pour essayer ses talens.

Cet essai fut suivi du plus grand succès; les dispositions que M. Jars avoit reçues de la Nature n'attendoient qu'une occasion pour se développer; la vue des mines, des travaux & des établissemens nécessaires à leur exploitation le rendirent Métallurgiste; & bientôt il fallut modérer cette ardeur & l'empêcher de passer la plus grande partie de son temps dans les souterrains: l'envie de s'instruire lui faisoit oublier le danger auquel il exposoit sa vie & sa santé. Cette espèce de phénomène parvint jusqu'aux oreilles de feu M. de Vallière; à son passage à Lyon, il voulut voir le jeune homme, & en fut si content qu'il jugea nécessaire de l'envoyer à la Capitale, pour y cultiver des talens si marqués & si précieux, & dès ce moment il devint en quelque sorte l'Élève de l'État.

M. Trudaine, auquel M. de Vallière avoit fait connoître les talens & la bonne volonté de M. Jars, seule bonne recommandation auprès de lui, & qui protégeoit ouvertement l'établissement des mines du Lyonnais, le fit entrer à l'école des Ponts & Chaussées, pour y prendre les connoissances qui lui étoient

nécessaires, & il y apprit le Dessin & les Mathématiques, en même temps qu'on lui faisoit faire un cours de Chimie qui pût le mettre au fait des véritables principes de la Métallurgie; à laquelle il se destinoit. Au bout de deux années employées à ce travail il fut envoyé par le Gouvernement aux mines de plomb de Poulawen en Bretagne; il y donna des preuves si marquées de sa capacité, par les plans & les Mémoires qu'il envoya, qu'on n'hésita point à le renvoyer l'année suivante visiter dans la même province les mines de Pontpean: & en Anjou celles de charbon de terre, qui sont aux environs d'Ingrande; très-peu de temps après il fut chargé d'aller en Alsace visiter les mines de Sainte-Marie-aux-mines & de Giromagny, desquelles il envoya des plans accompagnés de Mémoires détaillés; de-là il retourna aux mines de Saint-Bel & de Cheiffey: sa présence y valut un grand fourneau à raffiner le cuivre, qui procura aux entrepreneurs une économie considérable; il a depuis communiqué la description de ce fourneau à l'Académie, qui l'a destinée à paroître dans ses Mémoires de 1769\*; il ajouta à la construction de ce fourneau celle de plusieurs autres, dont l'utilité qu'on éprouve tous les jours est un nouveau motif de regretter la perte.

\* V. les *Mém.*  
p. 589.

M. Jars avoit à peine demeuré un an à Paris, lorsqu'il reçut ordre d'aller en Allemagne visiter les mines de Saxe, d'Autriche; de Bohême, de Hongrie, du Tirol, de la Carinthie & de la Styrie: ce voyage dura trois ans, & le fruit en fut une grande quantité de bons Mémoires sur tous les objets qu'il avoit observés.

Ce fut au retour de ce voyage que M. Jars se présenta pour la première fois à l'Académie, & qu'il y lut plusieurs Mémoires qui le firent connoître & lui valurent le titre de Correspondant; qu'il obtint le 10 Janvier 1761; ce fut aussi à peu près en ce même temps qu'il fut reçu Associé de l'Académie Royale des Sciences, Belles-Lettres & Arts de Lyon; il alla ensuite faire un tour aux mines de Saint-Bel & de Cheiffey, où il fit construire un martinet pour battre le cuivre; il se fut bon gré dans cette occasion d'avoir employé quelque temps à l'étude des Mathématiques.

Pendant qu'il étoit à Cheiffey, il reçut ordre de se rendre en

Franche - Comté , pour y travailler à la recherche des mines de charbon , & il employa une année entière à cette recherche.

A peine étoit-il de retour de ce voyage, qu'on l'envoya en Angleterre pour y acquérir de nouvelles connoissances; car on ne le laissoit pas long-temps oisif: il en rapporta plusieurs observations importantes , entr'autres le procédé par lequel on obtient le *minium* qui étoit presque inconnu parmi nous , ou au moins entre les mains d'un petit nombre d'Artistes qui en faisoient un secret. Pendant son séjour en Angleterre il fut admis comme Associé-étranger à l'Académie des Arts établie à Londres.

Nous n'avons pas parlé jusqu'ici d'une autre occupation de M. Jars pendant ses voyages , c'étoit l'étude de la Langue des différens pays où il se trouvoit, connoissance d'autant plus nécessaire qu'il avoit principalement à traiter avec des gens qui n'entendoient que la leur, ou plutôt leur espèce de jargon , plus difficile à entendre que la Langue même; c'étoit à ce travail qu'il employoit les momens que ses observations lui laissoient libres.

Jusque-là M. Jars n'avoit encore pour ainsi dire que prélué à ses voyages; le Ministère lui en fit entreprendre un en 1766 d'une bien plus grande étendue; il fut envoyé pour visiter la plus grande partie des mines du Nord; il demanda pour adjoint dans ce voyage le second de ses frères , qui avoit étudié comme lui la Métallurgie. On pourroit croire, & même sans lui faire tort, que la tendre amitié qu'il avoit pour ce frère avoit dicté cette démarche; mais du caractère dont étoit M. Jars, nous pouvons presque assurer qu'il auroit préféré un autre à son frère, s'il l'avoit cru plus capable de contribuer au succès de son voyage.

Les deux Voyageurs partirent bien munis de recommandations; & sachant que leur arrivée étoit annoncée aux Ministres du Roi, par-tout où ils devoient aller: ils visitèrent d'abord la Hollande & ses manufactures; de-là ils passèrent au pays d'Hanovre & dans les montagnes du Hartz, où ils séjournèrent quatre mois; ils parcoururent une partie de la Saxe & du comté de Mansfeld; d'où ils passèrent à Hambourg, & de-là à Copenhague aux mines d'argent de Koenisberg en Norwège, & enfin en Suède. Nous



ne pouvons passer ici sous silence l'accueil qu'ils reçurent du Prince Royal de Suède; ce Prince avoit eu l'attention de faire prévenir les Professeurs d'Upsal de leur arrivée, & lui & Leurs Majestés Suédoises leur firent l'honneur de s'entretenir long-temps avec eux sur les objets de leur voyage; la gloire du Prince Royal \* est trop chère à l'Académie, pour qu'elle puisse négliger de faire part au public de ce nouveau témoignage de son amour pour les Sciences, & de lui en marquer ici sa reconnoissance.

On peut aisément juger des risques, des périls & des peines qu'entraînoit un pareil voyage. La difficulté des chemins, les horreurs des hivers du Nord; les fréquentes occasions de descendre au fond des mines les plus profondes, & d'aller arracher, pour ainsi dire, le secret de la Nature au fond des entrailles de la terre; rien ne put rebuter les courageux Observateurs, & le desir de s'instruire & de servir leur Roi & leur patrie aplanirent toutes ces difficultés. Le fruit de cette savante caravane fut consigné au Conseil dans seize Mémoires; après quoi les deux frères se séparèrent; le Cadet retourna à Saint-Bel, & celui dont nous faisons l'éloge revint à Paris; il eut pour récompense de ce voyage un Département, que M. Trudaine engagea M. le Contrôleur général à lui donner.

Nous voici enfin arrivés à l'endroit de la vie de M. Jars qui intéresse le plus l'Académie. Peu de temps après son retour, la mort de M. Baron y fit vaquer une place de Chimiste; malgré les Concurrens redoutables qu'avoit M. Jars, il osa entrer en lice; les voix furent balancées entre M. Lavoisier & lui; & l'Académie eut la satisfaction de les voir tous deux agréés par le Roi le 19 Mai 1768.

M. Jars ne fut pas plutôt admis parmi nous, qu'il voulut justifier le choix de l'Académie, par plusieurs Mémoires qu'il lut dans ses assemblées; son élection avoit été précédée par deux autres qu'il avoit lûs, l'un sur le procédé des Anglois pour faire l'huile de vitriol, fruit de son voyage en Angleterre; & l'autre sur la séparation des métaux.

\* Aujourd'hui Roi de Suède.

Aussitôt après la réception il lut un Mémoire sur la circulation de l'air dans les mines. Une observation singulière faite dans les mines de Cheiffey fut l'occasion de ce travail; il y remarqua que le courant d'air qui s'établissoit dans les galeries, par leur ouverture & par les puits de respiration, avoit en hiver une direction absolument contraire à celle qu'il prenoit en été, & il trouva la cause de ce singulier phénomène: l'air contenu dans les galeries & les puits, conserve toujours à peu près le même état & la même température; tandis que celui de dehors varie extrêmement de l'hiver à l'été: en hiver, où l'air extérieur est plus pesant, la colonne qui entre par l'ouverture des galeries, & qui est la plus longue, chasse l'air contenu dans le puits de respiration & le fait sortir par son ouverture, au lieu qu'en été l'air extérieur étant plus léger, celui du puits qui se trouve le plus pesant, chasse l'air de la mine par l'ouverture de la galerie.

De ce principe, il tire la raison du singulier phénomène qu'on observe dans quelques mines où les ouvriers ne peuvent travailler dans le printemps ni dans l'automne, parce qu'ils y manquent d'air, quoiqu'ils y en trouvent suffisamment pendant l'hiver & pendant l'été; & ce qui est bien plus important, les moyens de procurer de l'air dans les mines, & d'en écarter les vapeurs pernicieuses & meurtrières qui ne s'y trouvent que trop souvent. Ce Mémoire paroît dans le Volume de 1768, actuellement sous presse\*. Il lut encore au mois de Juin dernier, la description du fourneau d'affinage, duquel nous avons déjà parlé. Il ignoroit alors, & nous l'ignorions nous-mêmes, que ce Mémoire seroit le dernier qu'il liroit à l'Académie. Il fut chargé au mois de Juillet d'aller visiter différentes manufactures du Royaume; il parcourut celles du Berry & du Bourbonnois, & passa en Auvergne dans le même dessein; c'étoit-là que la fin de sa vie étoit marquée. Dans une des courses qu'il étoit obligé de faire à cheval pendant les ardeurs de la canicule, il fut frappé d'un coup de soleil; M. de Monthion, Intendant de la Province, s'empressa de lui faire procurer tous les

\* Ceci étoit vrai le 25 Avril 1770, jour de la prononciation de cet Éloge, le Volume de 1768 étant alors prêt à paroître.

*Hist. 1769.*

secours de l'art, mais ces secours furent inutiles, & il mourut le 20 Août, troisième jour de sa maladie, muni des Sacremens de l'Eglise, & avec une résignation & une tranquillité dignes d'un Philosophe Chrétien.

Les deux Mémoires dont nous venons de parler n'étoient pas les seuls Ouvrages qu'il destinât à l'Académie; il s'en est trouvé plusieurs dans ses papiers, desquels il avoit déjà communiqué quelques-uns à l'Académie avant que d'en être Membre, & d'autres absolument neufs; du nombre de ces derniers est un Mémoire sur la manière de préparer le charbon de terre, pour le rendre propre à la fonte des mines; cet Ouvrage n'avoit pas été achevé par M. Jars; il n'a été fini que depuis sa mort par M. son Frère, qui l'a envoyé à l'Académie; les autres étoient en état d'être lus, & l'ont effectivement été depuis sa mort: la séance qui précéda la semaine sainte, fut en grande partie remplie par un de ces Mémoires; c'est ainsi que M. Jars a été Académicien long-temps même après sa mort.

Le peu de temps qu'il a vécu ne lui a pas permis de publier d'autres Ouvrages que ceux dont nous venons de parler, & qui trouveront place dans les recueils de l'Académie. On a cependant de lui la description d'une machine, exécutée aux mines de Schemnitz, imprimée dans le cinquième Volume des Savans étrangers \*, & la manière de fabriquer la brique & la tuile usitée en Hollande, imprimée dans les descriptions des Arts & Métiers, publiées par l'Académie. Le reste de ses Mémoires n'avoit pas encore été rédigé, & ce sera par l'organe d'un frère digne de lui qu'ils parviendront à l'Académie & au public.

Il s'étoit procuré une collection précieuse des pièces qu'il avoit recueillies dans ses voyages, & nous ne pouvons trop tôt informer le Public qu'elle sera déposée à la résidence de M. son Père, pour servir à l'instruction & à la curiosité des Voyageurs qui viendront aux mines.

Le caractère de M. Jars étoit doux & simple; il vivoit très-retiré & très-sobrement, il ne prenoit part que par complaisance à ce qu'on nomme amusement dans le monde: la conversation

étoit gaie, sur-tout lorsqu'il parloit de ses occupations; hors de-là il étoit absolument concentré dans son cabinet. Cette constante application avoit été une puissante barrière contre la corruption des mœurs; aussi les siennes n'avoient-elles jamais été même le plus légèrement effleurées par le vice. Son ame étoit extrêmement sensible & toujours prête à s'attendrir sur les malheureux qu'il soulageoit souvent aux dépens même de son nécessaire; en un mot, son caractère, ses talens & ses ouvrages font également regretter qu'il ait été enlevé par une mort si précipitée, & pour ainsi dire au milieu de sa carrière.





*É L O G E*  
*DE M. LE DUC DE CHAULNES.*

**M**ICHEL-FERDINAND D'ALBERT D'ALLY, Duc de Chaulnes, Pair de France, Chevalier des Ordres du Roi, Lieutenant général des ses armées, Gouverneur & Lieutenant général pour Sa Majesté en la province de Picardie, & pays reconquis d'Artois, Gouverneur particulier des villes & citadelles d'Amiens & de Corbie, & Capitaine-lieutenant des Chevaux-légers de la garde du Roi, naquit à Paris le 30 décembre 1714, de Louis-Auguste d'Albert d'Ally, Pair & Maréchal de France, Chevalier des Ordres du Roi, Capitaine-lieutenant des Chevaux-légers de la garde, & de Marie-Anne-Romaine de Beaumanoir, fille du marquis de Lavardin, Chevalier des Ordres du Roi, Lieutenant général de ses armées, & au gouvernement de Bretagne, & son Ambassadeur extraordinaire à Rome.

Il marqua dès sa plus tendre jeunesse beaucoup de facilité pour apprendre, & une grande justesse d'esprit; fondement, & si l'on veut, présage certain du goût qu'il devoit avoir un jour pour les hautes Sciences.

Le jeune comte de Chaulnes, car ce fut le premier titre qu'il porta, étoit cadet de trois frères & de trois sœurs, tous morts longtemps avant lui. Il fut destiné dès l'enfance à l'état ecclésiastique, & pourvu à l'âge de sept ans d'un canonicat de Strasbourg, mais la mort de M. le duc de Picquigny son frère, arrivée dix ans après, fit changer sa destination; il remit son canonicat, & entra en 1732 dans les Mousquetaires, d'où il ne sortit que pour passer à la Cornette des Chevaux-légers de la garde, dont il reçut le brevet en 1733, avec la commission de Mestre-de-camp de Cavalerie; il est qualifié dans ce brevet de Vidame d'Amiens, l'un des titres de sa maison.

Dès la fin de la même année il servit au siège de Kell, comme Aide-de-camp du Maréchal de Berwick, & se trouva, un an après,

à celui de Philisbourg. L'année suivante fut marquée par une continuation de services, & par une augmentation de dignité militaire : il fit la campagne de cette année, & fut pourvu de la place de Capitaine-lieutenant des Chevaux-légers, de laquelle M. le Maréchal son père se démit en sa faveur ; il est nommé dans le brevet duc de Picquigny, titre qu'il avoit pris depuis la mort de son frère aîné ; la paix qui termina cette guerre, suspendit pour quelques années les effets de son zèle & ses services : pendant le cours de cette paix il fut fait Brigadier de Cavalerie des armées du Roi.

La guerre s'étant rallumée, il fit en 1742 la campagne de Bohême, & se trouva comme volontaire au siège de Prague, car il se faisoit un devoir de saisir avec empressement toutes les occasions de servir ; l'année suivante il se trouva à l'affaire de Dettinguen, où il reçut deux coups de feu dans ses armes ; il eut part aux sièges de Menin, Ypres, Furnes & Fribourg ; il fut honoré pendant cette campagne de la Croix de Saint-Louis, du titre de Gouverneur des villes & citadelles d'Amiens & de Corbie, & du grade de Maréchal-de-camp. Après tout ce que nous venons de dire, le public est en état de juger s'il avoit bien mérité toutes ces distinctions.

Jusque-là M. le Duc de Chaulnes n'avoit servi que comme Mestre-de-camp ou comme Officier général, il servit en 1745 comme Aide-de-camp du Roi ; ce Monarque le chargea au commencement de la bataille de Fontenoy de faire établir sur la rive gauche de l'Escaut une batterie de gros canons qu'il avoit proposée la veille, & qui fit en effet une terrible exécution sur l'aile gauche de l'armée ennemie, & dans la même bataille il fit avancer à la tête de la Maison du Roi, quatre pièces de campagne pour rompre la colonne angloise, ce qui fut suivi du plus grand succès, après cette victoire il accompagna le Roi aux sièges de la ville & de la citadelle de Tournai dont la prise termina la campagne.

L'année suivante M. le Duc de Chaulnes se trouva au siège d'Anvers & à celui de Namur, pendant ce dernier, étant de tranchée il prit en plein jour le fort Ballard & y fit prisonniers un Capitaine, un Lieutenant & trente-deux hommes qui le défen-

doient; il se trouva à la bataille de Raucoux, & en 1747 à celle de Lawfeld, ce fut la dernière opération de cette guerre à laquelle il eut part, la paix d'Aix-la-chapelle y ayant mis fin en 1748.

Pendant tout le cours de cette guerre & de la précédente il avoit été plusieurs fois nommé Commissaire du Roi pour les échanges des prisonniers & avoit été chargé de plusieurs autres négociations délicates qui étoient une preuve sans réplique de la confiance qu'il s'étoit acquise, ce fut aussi pendant ce même temps qu'il fut reçu au Parlement en qualité de Duc & Pair par la démission de M. le Maréchal de Chaulnes en sa faveur: à la fin de la dernière campagne il fut fait Lieutenant général des Armées du Roi, avec une pension de six mille livres que le Roi lui accorda pour récompenser les services qu'il lui avoit rendus comme Aide-de-camp, & peu de temps après il fut nommé pour assister comme Commissaire du Roi aux États de Bretagne.

La guerre s'étant encore rallumée, il servit dans l'armée de Westphalie, & se trouva à la bataille d'Hastembeck le 26 Juillet 1757. Le Roi lui avoit accordé, dès 1751, une place de Chevalier de ses Ordres, & en 1752 le Gouvernement de Picardie & d'Artois, vacant par la mort du Prince Charles de Lorraine; c'est ainsi que la vie militaire de M. le Duc de Chaulnes offre une longue suite de services rendus par un sujet fidèle & zélé; & de récompenses honorables dispensées par un Monarque équitable & bienfaisant.

Jusqu'ici nous n'avons considéré M. le Duc de Chaulnes que sous ce seul point de vue, encore n'en avons-nous présenté le tableau intéressant que dans un raccourci qui lui fait tort, pour venir plus promptement à un autre genre de mérite qui nous intéresse plus particulièrement, & pour le peindre comme Académicien.

Nous disons comme Académicien; car il l'étoit en effet & dans toute l'étendue qu'on peut donner à ce mot, il avoit obtenu parmi nous en 1743 la place d'Honoraire, vacante par la mort de feu M. le Cardinal de Fleury; cette place n'exigeoit de lui ni travail ni assiduité, mais son amour pour les Sciences & son attachement pour l'Académie ne lui permettoient pas de s'absenter

de ses Assemblées dès qu'il étoit en son pouvoir d'y assister; ni de demeurer oisif; tout le temps que ses fonctions lui laissoient libre, étoit employé à des recherches utiles; il s'étoit procuré une nombreuse bibliothèque de livres de Sciences, il avoit formé un cabinet très-curieux de Physique, de Mécanique & d'Histoire Naturelle & avoit établi un laboratoire destiné à l'augmenter d'un grand nombre de pièces qu'il imaginoit tous les jours; il s'étoit sur-tout extrêmement appliqué à la Dioptrique & à l'art de perfectionner les Instrumens de Mathématique, & sur-tout ceux qui servent à l'Astronomie; c'étoit par ces moyens & par son assiduité à nos assemblées qu'il travailloit à se mettre en état de produire les excellens ouvrages qu'il nous a donnés & d'ajouter en temps de paix la gloire que procurent les Sciences à celle que ses services lui avoient méritée en temps de guerre.

Le premier Mémoire de M. le Duc de Chaulnes fut lû à l'Académie en 1755, & est imprimé dans le volume de cette année, il contient des expériences relatives à un article qui fait le commencement du IV.<sup>e</sup> livre de l'Optique de Newton; cet illustre Physicien avoit remarqué que si dans une chambre obscure on reçoit un rayon du Soleil dans l'axe d'un verre concave d'un côté & convexe de l'autre, étamé par le côté convexe, ce rayon étoit nécessairement réfléchi sur lui-même, mais que si on opposoit au rayon réfléchi un carton blanc, percé dans son milieu pour laisser passer le rayon direct, l'ouverture du carton se trouvoit entourée de quatre ou cinq anneaux colorés; M. de Chaulnes répétant cette expérience, un heureux hasard lui fit remarquer que lorsqu'on ternissoit la surface antérieure du verre en soufflant dessus, les anneaux, bien loin de perdre leur éclat, en devenoient plus vifs & plus distincts.

Il n'en fallut pas davantage pour piquer sa curiosité; il imagina d'abord de rendre cet effet permanent, en substituant au souffle, de l'eau mêlée d'un peu de lait pour ternir le verre, & il sut varier l'expérience en tant de manières, qu'il découvrit à la fin la raison de ce singulier phénomène: il tient à la diffraction; c'est-à-dire, à la propriété qu'ont les rayons de lumière de se plier à l'approche des corps solides. Il trouva que le souffle & l'eau



chargée de lait, formoient une espèce de réseau à mailles rondes; qui produisoit l'apparence d'anneaux colorés; qu'en substituant à cette espèce d'enduit une mouffeline claire, on obtenoit au lieu d'anneaux des carreaux colorés; que des fils parallèles ne donnoient que des bandes; en un mot, il fut si bien tirer parti de ce présent du hasard, que l'expérience de Newton devint entre ses mains un objet tout nouveau, & bien plus intéressant qu'il n'avoit été jusque-là.

Le fameux passage de Vénus sur le Soleil, arrivé en 1761; étoit un phénomène trop important pour ne pas intéresser la curiosité de M. le Duc de Chaulnes; il fut du nombre des Académiciens qui l'observèrent, & il contribua, par cette Observation, aux déterminations précieuses qui devoient-en résulter.

Pendant que M. le Duc de Chaulnes travailloit à ses ouvrages de Dioptrique, il s'occupoit encore d'un autre objet également important, c'étoit la perfection des Instrumens d'Astronomie; & pour proposer le Problème dans toute son étendue, l'art de procurer aux Instrumens d'un très-petit rayon une précision au moins égale à celle dont jouissent ceux d'un rayon considérable, tels qu'on les a employés jusqu'ici. Ce Problème pourroit, par sa difficulté, être mis presque au rang de ceux de la trisection de l'angle & de la quadrature du cercle, si l'expérience n'avoit fait voir qu'il l'avoit parfaitement résolu.

M. le Duc de Chaulnes donna, en 1755, à l'Académie, un Mémoire qui contenoit les principes de ce travail. Il avoit d'abord imaginé d'employer le mouvement d'une vis sans fin, pour obtenir ces divisions. La vis, faite d'acier, auroit elle-même marqué ses pas sur l'épaisseur de l'arc de cercle à diviser, & ces pas qui devoient être parfaitement égaux, & dont on pouvoit avoir, au moyen d'un index, les plus petites parties, devenoient, à ce qu'il croyoit, un moyen assuré d'obtenir des divisions très-fines & très-égales.

Qui n'auroit cru, comme lui, qu'une division faite de cette manière seroit exacte? & pouvoit-on soupçonner de l'inégalité dans un petit nombre de pas d'une vis faite avec soin, & dans ceux de cette espèce d'écrou, tous marqués avec la même vis? L'expérience fit  
cependant

cependant voir à M. le Duc de Chaulnes qu'on ne pouvoit, en aucune manière, compter sur l'exactitude de cette méthode; l'inégale dureté des parties de l'acier, de la vis & de celles du cuivre de l'instrument, rend les pas de l'une & de l'autre très-inégaux; d'où il suit que non-seulement on ne doit pas employer cette manière de diviser les instrumens, mais qu'on doit déterminer, par observation, la valeur de chaque partie d'un micromètre, & ne pas se contenter de mesurer la totalité, ou une grande partie de la courbe, en comptant, pour les divisions intermédiaires, sur l'égalité des pas de la vis, comme on le faisoit ordinairement; nouvelle source d'erreur, dont la découverte est due à M. le Duc de Chaulnes, & qui pouvoit altérer les Observations les plus importantes & les mieux faites.

Il fallut donc employer un autre moyen; M. le Duc de Chaulnes s'étoit aperçu depuis long-temps qu'en appliquant le micromètre au microscope, on pouvoit exactement mesurer jusqu'à la quatre millième partie d'une ligne: ce fut par ce moyen qu'il entreprit de donner à la division des instrumens une précision jusqu'alors inconnue. Nous ne pouvons le suivre ici dans l'ingénieuse application qu'il en fit; tout ce que nous en pouvons dire, est que jamais principe n'a été manié avec plus d'adresse; & qu'on est étonné, en lisant cet Ouvrage, des ressources que son génie lui a fournies, & de la sagacité avec laquelle il met à profit une infinité de circonstances qui auroient probablement échappé à tout autre. Le fruit de tant de travaux fut un Instrument de onze pouces de rayon, garni de lunettes achromatiques, & dont l'exactitude étoit si grande, qu'ayant été employé concurremment avec deux excellens quarts-de-cercle de six pieds de rayon, à mesurer les hauteurs méridiennes solsticiales du Soleil & celles d'*Arcturus*; il les a données avec la même précision qu'eux; épreuve certainement la plus forte, à laquelle on pût le soumettre.

Non-seulement il étoit parvenu à donner à son instrument le degré d'exactitude dont nous venons de parler; mais il avoit encore imaginé la manière de les communiquer à tous ceux qu'on voudroit faire dans la suite, au moyen d'une très-grande plate-forme qu'il avoit proposé de construire sur ce principe, & qui tiendrait

lieu, pour ainsi dire, d'un Artiste habile & immortel. Nous laissons au public à juger si M. le Duc de Chaulnes avoit bien rempli toutes les conditions du Problème, & à apprécier le degré de reconnaissance qui lui est dû pour le présent qu'il a fait à tout le monde Mathématicien. Cet Art absolument nouveau, dont il avoit donné, comme nous venons de le dire, les principes en 1765, fut depuis donné dans un bien plus grand détail en 1768, dans la description des Arts, publiée par l'Académie.

Tout le travail qu'avoit fait M. le Duc de Chaulnes sur la construction des Instrumens de Mathématique lui avoit fait sentir le degré d'utilité dont pouvoient être susceptibles en cette partie les lunettes achromatiques, c'en fut assez pour l'engager à travailler à leur perfection, & il communiqua ses vues sur ce sujet en 1767, dans un Mémoire imprimé dans le volume de cette année & qui est prêt à paroître.

On sera étonné en lisant cet ouvrage, des ressources qu'il a su se procurer pour déterminer avec exactitude des quantités qui sembloient ne donner aucune prise à l'observateur; les mêmes microscopes dont il s'étoit déjà servi pour la division des instrumens, se retrouvent encore ici, mais employés d'une manière absolument différente & montés sur des espèces de micromètres, qui mesurent jusqu'à un 400.<sup>e</sup> de ligne la course de l'instrument ou du porte-objet; c'est à l'aide de ces microscopes & de plusieurs autres instrumens ingénieux inventés pour cet objet, qu'il parvint à mesurer exactement le degré de réfringence des différentes sortes de verres; les courbures convexes & concaves de toutes les pièces d'un objectif composé; sans les séparer les unes des autres, problème singulier & qui sembleroit au premier coup d'œil impossible à résoudre & à déterminer enfin avec précision, si la courbure du verre de cristal d'Angleterre qui doit corriger l'aberration de réfrangibilité & détruire les couleurs, est telle qu'elle doit être, ce qu'on n'avoit pas pu parvenir à connoître jusqu'ici.

Toutes ces recherches sont suivies de l'invention d'une nouvelle machine parallaxique, plus solide & plus commode que celles qui sont en usage, de plusieurs réflexions sur la manière d'appliquer le micromètre à ces lunettes & de mesurer exactement la

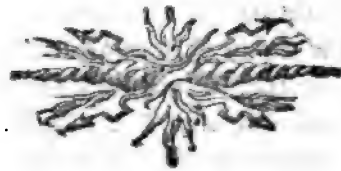
valeur des parties de cet instrument; il emploie pour cela une mire qui pour être vue de loin, a la singulière propriété d'offrir à l'observateur, des traits très-gros, au moyen desquels il peut mesurer des intervalles très-petits; ce Mémoire brille par-tout du génie de l'invention, & on ne peut le lire sans admirer les ressources qu'il a su se procurer pour éviter des difficultés qui au premier coup d'œil paroissent insurmontables; ce sera le dernier ouvrage qu'on aura de lui, & il est bien propre à faire regretter ceux qu'il se proposoit encore sur ce sujet & que la mort l'a empêché d'exécuter.

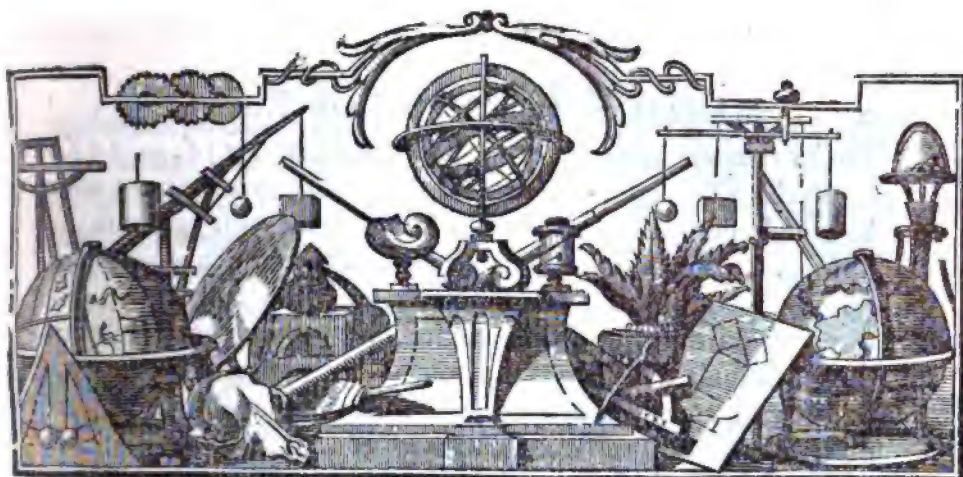
M. le Duc de Chaulnes étoit du caractère le plus aimable, la douceur qui en faisoit la base, étoit ornée de la politesse du grand monde & de la Cour, aussi ne comptoit-il presque que des amis dans tous ceux avec lesquels il vivoit; le Roi même qui connoissoit son zèle & son mérite, lui donnoit souvent de ces marques de bonté qui font la satisfaction du bon sujet & la félicité de l'homme de Cour. Dans la situation où il se trouvoit, il sembloit être à l'abri des revers & des chagrins, il en essuya cependant de vifs & de longs, il y opposa la constance que prescrit la Philosophie & la patience qu'inspire la Religion, mais on ne lutte pas impunément contre de tels ennemis, & son tempérament quoique fort, y succomba; il tomba malade au commencement de l'été dernier & le mal alla en augmentant jusqu'à la mi-Septembre; il y eut alors une apparence de mieux, il se leva même & sortit en carrosse pour se promener, il devoit partir incessamment pour aller passer le reste de la belle saison dans une campagne près de Paris; le jour étoit pris pour ce départ & ses amis invités à aller lui tenir compagnie: vains projets! la veille du jour auquel il devoit partir, il se trouva plus mal au moment où l'on s'y attendoit le moins & mourut le 23 Septembre 1769, en moins de cinq heures, d'une mort qu'on pourroit peut-être nommer subite, mais qui n'étoit certainement pas imprévue, ayant mis ordre quelques jours auparavant à ses affaires temporelles & reçu les derniers Sacremens avec les sentimens les plus marqués de la piété & de la religion qui avoient toujours été la règle de sa conduite; son corps fut porté à la sépulture de sa maison, accom-

pagné d'un nombreux cortège de ses amis, qui s'empresèrent de lui rendre ce dernier devoir. Il étoit grand, bien fait, d'une physionomie agréable & d'un embonpoint qui lui alloit assez bien & ne l'empêchoit point de se mouvoir avec une légèreté & une agilité singulières; ses mœurs avoient toujours été très-pures, il étoit bon ami, doux, tendre, compatissant aux misères des pauvres, bon pour les domestiques qui de leur côté l'aimoient & le chérissoient; il étoit fort instruit de l'histoire & des affaires du royaume, & avoit l'esprit très-orné sur une infinité de matières; sa conversation étoit gaie & amusante, lors même qu'il parloit de l'objet de ses recherches; il écrivoit avec netteté & pureté, les Mémoires qu'il a publiés ont mis le public en état d'en juger, & nous l'avons vu plus d'une fois parler dans nos Assemblées, sur le champ & s'y exprimer avec noblesse & précision; toutes ces qualités étoient couronnées par le plus grand éloignement du faste & de l'ostentation, ses devoirs seuls & la façon dont il les remplissoit, ont trahi sa modestie & fait connoître ses vertus.

M. le Duc de Chaulnes étoit marié, il avoit épousé en 1734; Demoiselle Anne-Josephine Bonnier, fille de Joseph Bonnier, Baron de la Moisson, Trésorier général des États de Languedoc, & d'Anne Malon; il n'en a laissé qu'un fils, M. le Duc de Picquigny, déjà connu de l'Académie par son goût pour la Physique & l'Histoire naturelle.

La place d'Honoraire qu'occupoit parmi nous M. le Duc de Chaulnes, a été remplie par M. le Duc de Praslin, Ministre & Secrétaire d'État au département de la Marine,






M É M O I R E S  
D E  
MATHÉMATIQUE  
E T  
D E P H Y S I Q U E,  
*T I R É S D E S R E G I S T R E S*  
*de l'Académie Royale des Sciences.*  
Année M. DCCLXIX.

*M É M O I R E*  
*SUR LE MOUVEMENT DES ÉTOILES*  
*EN LONGITUDE ET EN LATITUDE.*

Par M. CASSINI DE THURY.

 LE MONNIER ayant publié des Observations, par lesquelles il détermine le mouvement d'*Arcturus* en longitude, j'ai cru devoir remettre sous les yeux de l'Académie ce qui a été publié par mon père sur le mouvement des  
Mém. 1769. 2 Septembre 1769.  
A

Étoiles fixes en longitude & en latitude (*Mém. 1738, p. 331*):

Tycho s'étoit aperçu le premier de quelque mouvement dans la latitude des Étoiles fixes, M. Halley avoit aussi reconnu des différences dans la latitude des Étoiles; mon père, en comparant les observations faites à Cayenne avec les nôtres faites à la méridienne & au mural de l'Observatoire, avoit trouvé une variation dans la latitude d'*Arcturus* de 2 minutes dans soixante-six années, & il remarque, en même temps, que si l'on employoit nos propres observations, on trouveroit le mouvement d'*Arcturus* en latitude, encore plus grand.

Les observations de Tycho, en 1584, comparées à celles de 1672, faites par M. Picard, donnent une variation dans la latitude d'*Arcturus* de 3 minutes & de 4' 57" pour l'année 1739, ce qui seroit à raison de 3' 13" pour cent années.

Pour prouver incontestablement ce mouvement d'*Arcturus* en latitude, mon père fait remarquer qu'une étoile, dans la jambe du Bouvier, déterminée par Tycho & par nos observations, n'a point varié en latitude, dans l'espace de cent cinquante-deux années, tandis que la variation d'*Arcturus* a été de 5 minutes dans le même intervalle de temps; cependant les deux étoiles ont été observées par Tycho avec le même instrument, ce qui ôte toute l'incertitude que l'on pourroit avoir sur le résultat des observations.

Mon père examine ensuite si les observations des autres étoiles, ne donnent point de semblables variations dans leur latitude, il n'a trouvé qu'une différence d'une minute dans la latitude de *Sirius*; mais les Étoiles où cette variation est plus sensible, qui n'excède cependant pas deux minutes, sont *Rigel*, la *Luisante dans l'épaule d'Orion*, le *cœur du Lion* & la *Chèvre*.

Les variations dans la latitude des Étoiles fixes, n'ont pas été le seul objet des recherches de mon père, il a essayé de reconnoître le mouvement en longitude, & il a trouvé qu'il n'y en avoit aucune où ce mouvement parût avec plus d'évidence que dans la *luisante de l'Aigle* & les deux Étoiles voisines; en comparant nos observations avec celles de Flamsteed dans l'espace de quarante-huit années, il a trouvé une variation très-sensible en longitude dans le mouvement des trois Étoiles en longitude, ce

qui est encore confirmé par les observations de Tycho, comparées aux nôtres dans un intervalle de cent trente-sept années.

Je passe ensuite à la conclusion du Mémoire de mon père ; il peut demeurer pour constant, que, quoique la plupart des Étoiles fixes conservent entr'elles la même situation, il y en a quelques-unes qui s'approchent ou s'éloignent les unes des autres, tant en longitude qu'en latitude, ce qu'il est très-important de reconnoître pour le progrès de l'Astronomie ; j'ajouterai seulement que comme la détermination de la position des Étoiles, suppose un grand nombre d'observations du passage de l'Étoile & du Soleil par des fils, il faut que la différence que l'on remarque dans la position de l'Étoile soit sensible pour qu'elle ne puisse être attribuée à l'erreur des observations.

### ADDITION au Mémoire précédent.

JE dois répondre à une objection qui m'a été faite à la lecture de mon Mémoire ; il paroît étonnant que mon père ayant reconnu comme constant le mouvement des Étoiles fixes en longitude & en latitude, il ait précisément employé les deux Étoiles où ce mouvement étoit plus sensible pour fixer le mouvement apparent des Étoiles en longitude. 6 Septembre 1769.

Je répondrai 1.<sup>o</sup> que le Mémoire sur les variations des Étoiles en longitude, est postérieur à celui sur le mouvement apparent des Étoiles en longitude.

2.<sup>o</sup> Que ce qui a déterminé mon père à se servir des étoiles d'*Arcturus* & de l'*Aigle*, pour déterminer le mouvement apparent des Étoiles en longitude, a été (comme il le fait remarquer) le dessein de faire usage des observations de mon grand-père, faites en 1672, selon la méthode la plus exacte pour déterminer la position des Étoiles, en choisissant les instans où le Soleil & les Étoiles avoient la même déclinaison que le Soleil, il avoit l'avantage de déterminer le mouvement apparent des Étoiles en longitude par les seules observations modernes, sans avoir recours aux observations anciennes qui donnoient des résultats très-différens ; mais mon père n'a trouvé que les deux étoiles d'*Arcturus* & de l'*Aigle*, dont les observations aient été faites dans les circonstances



#### 4 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

requises & par la méthode la plus exacte pour déterminer l'ascension droite des Étoiles, & c'est par cette raison qu'il les a employées pour cette recherche; mais il observe en même temps dans les résultats, des différences qui lui font soupçonner, pour me servir de ses termes, *que le mouvement du Soleil ou celui d'Arcturus n'ont pas été uniformes* (p. 285.)

En effet, si l'on compare la longitude d'*Arcturus* qu'il a déterminée en 1738, de  $6^{\text{h}} 20^{\text{d}} 34' 45''$  avec celle de Flamsteed en 1690, de  $6^{\text{h}} 19^{\text{d}} 53' 52''$ , on trouvera une différence de  $40' 53''$  dans l'espace de quarante-huit années à raison de 51 secondes par an, tandis que le mouvement apparent n'est que de 50 secondes environ.

On pourroit aussi, par la même raison, m'objecter que je n'ai point reconnu le mouvement d'*Arcturus* en latitude, puisque j'emploie cette Étoile depuis plus de vingt années, pour déterminer le terme du bord solsticial du Soleil, & si l'obliquité de l'écliptique change, alors je répondrai que jusqu'à ce que l'on ait trouvé des points plus fixes que les Étoiles, les Astronomes seront toujours obligés d'y avoir recours, & particulièrement à celles de la première grandeur qui ont l'avantage d'être aperçues le jour comme la nuit, & qui sont sans doute celles qui ont été déterminées avec plus d'exactitude par les anciens Astronomes.



# NOUVELLE CONSTRUCTION

## D'UNE MACHINE

### PROPRE À MOIRER LES ÉTOFFES DE SOIE.

Par M. DE VAUCANSON.

L'ART de moirer, consiste à former des ondes sur une des surfaces de l'étoffe ; il n'y a que les étoffes qui ont un grain saillant, comme les gros Taffetas, les gros de Tours & les gros de Naples, qui puissent être moirées. On appelle *grain* dans l'étoffe, cette éminence faite par la grosseur du fil de trame, & qui forme ces cannelures parallèles qui vont d'une lisière à l'autre : lorsque le fil de la trame est mince, on dit que l'étoffe est à petit grain ; lorsque ce fil a plus de grosseur, on dit que l'étoffe est à plus gros grain.

, Avril  
1769.

C'est l'aplatissement de ce grain ou des cannelures couchées par parties, & en sens contraire les unes des autres, qui fait paroître les ondes sur l'étoffe à cause des différens reflets de lumière que ces couches occasionnent. Pour que la moire soit belle, il faut que les ondes soient grandes & bien terminées par des filets fins & déliés ; c'est l'intersection des différentes couches qui produit ces filets.

Les moires d'Angleterre ont été long-temps supérieures en beauté & en qualité à toutes celles qu'on faisoit en France ; nos Fabriques étoient bien en état d'y employer d'aussi belle matière, & de les fabriquer aussi parfaitement, mais elles n'avoient pas une Machine pour les moirer aussi bonne que celle des Anglois. Le Ministère trouva le moyen en 1740, d'en faire venir une de Londres ; au lieu de l'envoyer à Lyon, elle fut établie ici à Paris dans la rue de Louis-le-Grand, où elle existe encore ; mais, soit que la personne qui fut chargée d'en diriger les opérations, ait manqué d'intelligence ou de capacité, soit que les Fabricans de Lyon, aient trouvé trop de difficulté à faire aller & revenir de si loin leurs étoffes, pour être moirées, cette

## 6 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Machine est restée sans aucun succès, ou du moins, elle n'a pas eu l'effet qu'on en attendoit.

La ville de Lyon se détermina, quelques années après, à faire tous les frais nécessaires pour se procurer la Machine Angloise; & afin de ne pas manquer son but, elle offrit un fort avantageux à un habile Moireur de Londres qui vint s'établir à Lyon avec toute sa famille. Cette ville retire maintenant le fruit des sacrifices qu'elle a faits à cet égard; les moires de Lyon sont tout aussi belles que celles d'Angleterre, quant à l'effet du moirage.

On nomme cette Machine une *Calandre*, parce qu'elle ressemble à celle avec laquelle on calandre les satins apprêtés & les autres étoffes mélangées; elle consiste de même en une lourde masse que l'on fait promener sur deux rouleaux appuyés sur une plate-forme posée horizontalement sur un fort massif de maçonnerie: cette lourde masse est composée d'une caisse en bois de neuf pieds de longueur sur quatre pieds de largeur & de cinq pieds environ de hauteur, que l'on remplit de pierres, de boulets de canon ou de plusieurs saumons de plomb, jusqu'à ce que le total soit à peu près égal à un poids de quatre-vingts milliers: le fond de cette caisse est fait de deux forts plateaux de noyer ou de chêne, ainsi que la plate-forme inférieure qui est assise sur le massif de maçonnerie; au-dessous du fond de la caisse, on incruste une plaque de fer bien unie & bien dressée, de quatre pieds environ de longueur sur trois pieds de largeur & d'un pouce & demi d'épaisseur; on en met une semblable sur la plate-forme inférieure, toutes deux encastrées à fleur du bois, & contenues avec des vis à tête perdue: c'est entre ces deux platines que l'on met le rouleau chargé de l'étoffe qu'on veut moirer, comme je le dirai ci-après. À chaque extrémité de cette caisse, on accroche un câble dont l'un, après avoir passé sur plusieurs poulies mouflées, vient se rouler sur le haut d'un arbre vertical traversé par un levier horizontal, au bout duquel est attelé un cheval; le câble opposé, après avoir passé sur autant de poulies mouflées, vient se plier au bas du même arbre, de manière que le cheval en tournant, tantôt dans un sens & tantôt de l'autre, fait mouvoir la caisse alternativement de droite à gauche.

Il faut nécessairement une grosse & une petite calandre pour moirer les Étoffes de soie ; la petite ne diffère de la grande , qu'en ce qu'elle est moins pesante ; elle n'est chargée que d'environ vingt milliers : on nomme cette dernière calandre *préparatoire*, parce que c'est sous elle qu'on fait d'abord passer l'étoffe qui a été pliée pour la première fois sur le rouleau. Voici comment se fait ce pliage.

On commence par plier l'étoffe en deux , dans toute la longueur , c'est-à-dire , qu'on rapproche les deux lisières l'une sur l'autre , en observant que l'extrémité de chaque cannelure formée par le fil de trame , réponde exactement à l'autre extrémité de la même cannelure : on contient la jonction des deux lisières par deux points d'aiguille faits à neuf ou dix pouces de distance les uns des autres sur toute la longueur des lisières ; la largeur de l'étoffe ayant été pliée en deux dans toute la longueur de la pièce , on replie l'étoffe ainsi doublée en feuillets de demi-aune de long ; on arrange ces feuillets sur une forte toile de coutil en forme de zigzag , c'est-à-dire , qu'on les incline les uns aux autres sous un angle indéterminé , mais qui est de quatre à cinq degrés environ ; on roule la toile de coutil avec l'étoffe ainsi arrangée autour d'un cylindre de bois de gayac qui a cinq à six pouces de diamètre : l'étoffe étant recouverte par deux ou trois tours de toile surabondante , on contient le tout avec une ficelle à chaque extrémité du cylindre qu'on nomme le *rouleau*.

On met ce rouleau chargé de l'étoffe sous la petite calandre ; c'est-là , qu'en roulant alternativement d'un sens & de l'autre sous le poids de cette première charge , certaines portions du grain de l'étoffe sont déterminées à se coucher d'un côté , tandis que d'autres le sont d'un sens opposé : après que l'étoffe est restée quinze ou vingt minutes sous cette première calandre , on en ôte le rouleau pour examiner si la moire se dispose à prendre de belles ondes , & l'ouvrier juge si l'étoffe doit être remise sous la petite calandre , ou si elle est en état d'être portée sous la grande ; auquel cas on change de plis à l'étoffe , & on l'arrange sur le coutil comme la première fois pour la remettre sur le rouleau qui désormais est toujours placé sous la grosse calandre.

Comme la moire ne prend point sur les plis de l'étoffe, & que les ondes se trouveroient coupées par ces mêmes plis, on est obligé de sortir souvent l'étoffe de dessous la calandre pour faire courir les plis, c'est-à-dire, pour les changer de place; ce ne sont que les plis des feuillets faits de demi-aune en demi-aune que l'on rechange, celui qui est fait dans le milieu de la largeur de la pièce, est invariable; c'est par lui que s'opère la répétition des objets que l'on voit sur les deux côtés de la moire.

Quoique tous ces procédés paroissent fort simples & fort aisés, il n'en résulte pas toujours un même effet. Il arrive souvent que dans des étoffes qui paroissent semblables en matière & en fabrication, la moire prend plus tôt dans les unes, & plus tard dans les autres; quelquefois les ondes y sont grandes & bien détachées, quelquefois petites, confondues entr'elles & mal terminées; souvent un bout de la pièce sera bien moiré, & l'autre bout ne le sera pas de même; d'autres fois le milieu sera mieux moiré que les extrémités; il arrivera aussi que les extrémités seront bien, & que le milieu sera mal; souvent la moire sortira très-bien après trois ou quatre passées sous la calandre, & quelquefois elle ne paroîtra qu'après la dixième ou la douzième passée.

L'expérience a appris que les étoffes, dont les couleurs exigent du soufre, du vitriol, du jus de citron & autres acides semblables, ne prennent point du tout la moire. On a surmonté ces inconvéniens en lavant les soies & en les faisant bien dégorger avant de les employer à la fabrication de l'étoffe; elles prennent alors la moire, mais elles sont toujours sujettes à cette espèce de caprice qu'on aperçoit dans toutes les autres, & auquel on n'a pas encore trouvé de cause, ni par conséquent de remède.

Il n'est pas permis de croire avec les ouvriers moireurs, que cette variété dans le moirage soit le pur effet du hasard, sans une cause quelconque: quoique des étoffes paroissent également bien fabriquées, quoiqu'elles soient composées d'un même nombre de fils, soit dans la chaîne, soit dans la trame, il peut y avoir entr'elles quantité de petites différences qui échappent aux yeux les plus exercés, mais qui rendent la moire plus ou moins difficile à sortir; la soie d'une chaîne peut être plus ou moins nerveuse, plus

plus ou moins élastique, plus ou moins tordue, que celle d'une autre; la trame d'une étoffe peut être plus ou moins molle ou plus ou moins frappée; le grain peut n'en être pas également ferré & saillant; la teinture des différentes couleurs peut encore apporter des variétés infinies dans la roideur ou dans la souplesse de la soie: la manière de moirer étant toujours la même, les effets doivent nécessairement être relatifs à toutes ces différences.

Le poids de la petite calandre pourroit être trop léger pour une telle étoffe, & celui de la grosse trop pesant pour telle autre; il faudroit peut-être plusieurs charges intermédiaires entre ces deux-là; l'étoffe enveloppée dans le coutil sur le rouleau, ne forme presque jamais une épaisseur égale autour de la circonférence, ce qui peut rendre l'impression de la calandre beaucoup plus sensible dans les parties plus minces, que dans celles qui le sont moins. Lorsque ce rouleau est enveloppé d'une pièce d'étoffe de trente-six à quarante aunes de longueur ou de plusieurs pièces d'un moindre aunage, que l'on met ordinairement ensemble afin d'avancer l'ouvrage, l'épaisseur en est alors si considérable, que l'action de la calandre se trouve avoir produit une partie de son effet sur le commencement & sur la fin de la pièce avant d'avoir pu pénétrer dans le milieu, parce que les premiers tours appuyant sur le rouleau de gayac, & les derniers tours sur les plaques de fer des plates-formes, la proximité de ces corps durs les oblige de céder les premiers à l'effort du poids de la calandre. Voilà pourquoi l'étoffe peut n'être pas toujours également bien moirée dans toute la longueur.

Quoique l'étoffe soit pliée ferme sur le rouleau, le poids de la calandre la fait bientôt étendre & quitter le rouleau; alors les plis se dérangent, ou il s'en fait de faux, ce qui oblige de sortir le rouleau de dessous la calandre pour replier l'étoffe. Ces déployemens trop fréquens occasionnent bien des fois de la confusion dans les ondes & dans les filets qui les terminent; la moire en devient trop ondulée, défaut qu'il n'est plus possible de corriger.

Voilà, je crois, les causes qui rendent l'effet du moirage si capricieux; elles m'ont paru assez vraisemblables pour me

déterminer à tenter le moyen de les éviter par une construction de calandre toute différente.

J'ai compris qu'il falloit trouver une calandre que l'on pût charger à volonté & par degrés, de plusieurs milliers jusqu'à la concurrence de quarante mille; que ce chargement pût être fait très-promptement & avec beaucoup de facilité; que l'étoffe plissée pût y recevoir une pression égale dans toutes les parties; que ces plis ne pussent jamais se déranger par l'extension de l'étoffe, ni par autre cause quelconque, qu'on ne fût plus obligé de sortir l'étoffe que lorsqu'il est question d'en faire courir les plis pour recevoir le moirage. Voici quels ont été mes moyens.

Au lieu de mettre l'étoffe dans un couil autour d'un cylindre pour la faire rouler entre deux plans droits, je la contiens au contraire entre deux couils sur une ligne droite pour la faire passer entre deux cylindres: le degré de compression qu'on donne à ces deux cylindres, produit l'effet du poids de la calandre, que l'on peut ici graduer à volonté; les tourillons du cylindre supérieur qui est de métal très-dur, sont appuyés sur des collets immobiles, fixés au bâti de la machine, & les tourillons du cylindre inférieur qui est de bois de gayac, portent sur des collets placés sur deux leviers mobiles, & à neuf pouces de distance de leur point d'appui; la queue de ces leviers qui sont de la seconde espèce, est prise chacune par un tirant de fer qui répond à la tête de deux autres leviers de la première espèce, pareillement mobiles, au bout desquels sont accrochés deux plateaux de balance: la seule pesanteur de ces derniers leviers produit un effort de six milliers au point de contact des deux cylindres; un poids de vingt-cinq livres mis dans chaque plateau, augmente cet effort de cinq milliers; on peut multiplier cet effort en mettant de nouveaux poids de vingt-cinq livres sur les plateaux, jusqu'à le rendre égal à celui de la grosse calandre angloise qui n'est que de quarante milliers, quoique la caisse soit chargée de quatre-vingts milliers pesant, par la raison que cette caisse se meut sur deux rouleaux, dont un seul est enveloppé de l'étoffe à moirer, & dont l'autre ne sert qu'à empêcher la caisse de basculer, & que le poids total se trouvant partagé sur chaque rouleau, l'étoffe n'y est

pressée que de la moitié de ce poids qui est de quarante milliers, comme elle ne l'est que d'un poids de dix milliers sous la petite calandre, quoique sa caisse soit chargée de vingt milliers.

On conçoit aisément par la facilité qu'il y a d'augmenter ou de diminuer la pression des deux cylindres, que cette nouvelle machine peut produire, non-seulement l'effet des deux calandres angloises, mais celui de plusieurs calandres intermédiaires qui seroient chargées graduellement.

On plie l'étoffe en zygzag comme à l'ordinaire, sur une toile de couil assez longue pour y pouvoir arranger deux ou trois pièces d'étoffe de suite, que l'on recouvre de l'autre partie de la toile : les deux extrémités de cette toile sont tirées par des poids, afin qu'elle se conserve toujours bien tendue en allant & revenant dessous les cylindres, au sortir desquels elle glisse sur une table qui est de niveau avec l'ouverture des deux cylindres ; on fait tourner les cylindres au moyen d'un cabestan auquel on peut appliquer des hommes ou un cheval ; lorsque la toile qui contient l'étoffe a passé d'un côté, une détente fait tourner les cylindres à contre-sens, & la toile revient au côté opposé : on continue ce mouvement alternatif une douzaine de fois, après quoi on lève un coin de la toile qui recouvre l'étoffe, & sans la déranger, on examine l'effet de la première impression qui n'a été faite qu'avec le poids seul des leviers, c'est-à-dire, avec six milliers de charge. On juge si elle est assez forte pour déterminer les ondes à sortir, ou bien on met un poids de vingt-cinq livres sur chaque plateau pour la seconde passée ; lorsque les ondes paroissent se bien décider, on fait courir les plis de l'étoffe, c'est-à-dire, qu'on les change de place pour recevoir le moirage, comme les autres parties de l'étoffe : on augmente peu à peu la charge par de nouveaux poids dans les plateaux, jusqu'à ce que l'on voye les ondes bien terminées par des filets très-déliés, ce qui arrive ordinairement après la cinquième ou la sixième passée, c'est-à-dire, après la cinquième ou la sixième charge.

J'ai été obligé de tâtonner long-temps dans les premiers essais, pour connoître la quantité de poids qu'il falloit donner pour chaque passée, & le nombre de révolutions que devoit faire



l'étoffe. Le résultat m'a appris que la charge doit toujours être proportionnée à la qualité de l'étoffe; que souvent une étoffe épaisse exige moins de poids & moins de temps pour être moirée qu'une étoffe plus mince, & que d'autres fois l'étoffe mince est moirée bien plus promptement & avec une moindre charge; mais j'ai reconnu que dans tous les cas, la charge doit être graduée pour opérer de belles ondes bien grandes & bien terminées; que l'étoffe se trouve toujours également bien moirée dans toutes les parties; que les plis ne se dérangent jamais; & qu'en général toute la manœuvre en est bien plus sûre, bien plus commode & bien plus expéditive. Je pourrois encore ajouter que cette machine exige beaucoup moins d'emplacement pour son service, que les deux calandres angloises, & que la construction en sera de moitié moins dispendieuse.

Cette première machine a été construite aux frais du Roi; pour la Fabrique de Tours; je souhaite qu'une expérience plus longue & plus suivie puisse confirmer tous les avantages que je me flatte avoir aperçus dans les premières épreuves qui ont été faites sous mes yeux.

J'attendrai cette confirmation avant de me déterminer à en publier la description par des planches gravées & par une explication plus détaillée. Les recherches en Mécanique qui ont pour objet la perfection des Arts, & qui sont présentées comme un modèle à suivre, ne doivent être mises au grand jour, qu'après avoir passé par la coupelle des plus rudes épreuves, & après avoir été portées au plus haut degré de perfection qu'il est possible à l'Auteur de leur donner. Il est rare qu'on parvienne à ce degré dans une première construction; très-souvent une seconde, une troisième même, ne suffisent pas pour y arriver, & les occasions de répéter ces constructions ne sont pas toujours bien fréquentes, lorsqu'il est principalement question de grandes machines qui exigent de grandes dépenses. Combien de nouveautés ont été dans leur naissance présentées au Public comme extrêmement avantageuses & utiles, & dont l'usage de quelques mois ou de quelques années a fait voir toute l'insuffisance & tous les défauts.

Les méprises en Mécanique sont de toute autre conséquence

que les méprises dans plusieurs autres Sciences. Il en coûte peu de changer d'opinion sur un système, ou sur un fait de Physique qu'on a cru vrais pendant long-temps, & qu'un Observateur parvient à démontrer faux; au lieu qu'il en coûte souvent la fortune à des Entrepreneurs pour avoir eu trop de confiance dans un Inventeur présomptueux qui n'a pas daigné soumettre assez long-temps ses premiers essais au tribunal de l'expérience.

Rien n'est plus capable de retarder la perfection des Arts, que de présenter trop souvent aux Artistes des moyens imparfaits de réforme; on se lasse de tenter des épreuves inutiles, & de faire des dépenses infructueuses: on se roidit contre toute nouveauté, & l'on finit par rejeter ce qui est bon comme ce qui est mauvais.

C'est ce qui me fait différer depuis long-temps la publication de plusieurs ouvrages de Mécanique, que j'ai imaginés pour perfectionner nos Fabriques de Soie. Quoique le succès qu'ils ont eu dans les premiers établissemens qui en ont été faits, ait paru assez avoué pour déterminer le Conseil à les adopter, je crois cependant, malgré tous les reproches que l'on m'a faits, ou qu'on pourroit me faire, devoir encore attendre l'occasion d'une seconde construction pour y faire quelques changemens & y ajouter des perfections que l'expérience m'a fait voir possibles, & même nécessaires. Lorsque par des épreuves suffisantes je me ferai assuré de la bonté de mes corrections, je pourrai alors avec plus de confiance & plus de satisfaction, présenter tous ces ouvrages au Public, qui voudra bien me pardonner mes retardemens en faveur de l'utilité plus prochaine, qu'il en pourra retirer.



## M É M O I R E

*Sur le mouvement d'ARCTURUS en ascension droite apparente, & de la vraie Longitude du Soleil pendant une suite d'Observations faites avant & après le Solstice d'été, pour en déduire l'erreur des Tables au temps de l'apogée & au 3 Juin 1769\*.*

\* & de 9]  
au ☉.

Par M. LE MONNIER.

23 Août  
1769.

**L**E mouvement particulier, & qui paroît sans aucune loi connue, propre aux Étoiles de la 1.<sup>re</sup> grandeur, s'est trouvé, il y a plus de trente ans, difficile à bien constater, à l'aide des observations astronomiques du dernier siècle; j'en ai assez averti dans le 1.<sup>er</sup> volume de l'*Histoire Céleste*, & aux années suivantes; sur-tout en 1746, à l'occasion du Catalogue particulier de ces Étoiles de la 1.<sup>re</sup> grandeur, inséré au chap. XIX des *Institutions Astronomiques*.

Ce mouvement propre des Étoiles est aujourd'hui l'un des plus importants à bien connoître, autrement l'on ne parviendroit qu'à des résultats indécis, soit dans la recherche du lieu du Soleil & des Planètes, soit dans la recherche des longitudes géographiques sur terre & sur mer, si on a soin de n'y employer que des quarts-de-cercle, mégamètres ou quelque occultations des quatre Étoiles de la 1.<sup>re</sup> grandeur qui sont au zodiaque.

Je ne parlerai guère ici que du mouvement qui paroît convenir à l'étoile *Arcturus*, laquelle a été censée jusqu'ici n'avoir aucun mouvement en longitude, mais un grand mouvement propre dans le sens de la latitude: je ferai voir enfin que celui qui concerne la longitude, diffère encore sensiblement, ou paroît moins rapide que celui qui convient à la précession moyenne de l'équinoxe; au reste, n'y eut-il pour *Arcturus* qu'un mouvement réel en latitude, il doit influencer sensiblement sur le mouvement en ascension droite, & jusqu'ici on auroit dû y avoir égard.

J'ai prouvé en 1765, dans nos Mémoires, qu'*Arcturus* varioit sa déclinaison de deux secondes par an, plus que selon les loix de la précession de l'équinoxe, & ceux qui ont eu égard à cet article, dans leurs ouvrages périodiques, n'ont pas fait attention que l'ascension droite d'*Arcturus* avoit pareillement besoin d'une correction essentielle, mais en sens contraire, puisque l'effet du mouvement en latitude décroissante, tend à ralentir le mouvement apparent en ascension droite; c'étoit-là le cas d'y insister le plus, mais le mouvement propre d'*Arcturus* en longitude, s'il a lieu, comme je vais le prouver, doit y influer aussi de quelques secondes.

Outre le grand mouvement d'*Arcturus*, qu'il s'agit de bien reconnoître & qui a mérité jusqu'ici qu'on s'y attachât avec la plus sérieuse attention, d'autres raisons m'ont engagé à choisir cette étoile pour la comparer au Soleil avant & après le solstice; à la vérité, l'étoile du grand Chien emploie alors le moindre intervalle de temps possible pour être comparée au Soleil avant ou après midi aux environs de son passage par l'apogée; & malgré l'excellence de mon horloge à pendule de Graham, je n'ai pas négligé, lorsque je l'ai pu voir au méridien, d'employer aussi cette comparaison pour vérifier les ascensions droites, mais j'ai eu la facilité de comparer les 22, 23 & 24 Mai, *Arcturus* au Soleil lorsqu'ils ont passé au méridien dans un même parallèle à l'équateur, & le 19 Juillet pareillement lorsque le Soleil a paru retourner à la même déclinaison ou hauteur méridienne: je parlerai ailleurs du mouvement qui est propre à *Sirius*, & des déviations qui conviennent au temps de l'apogée aux différens points de mon grand quart-de-cercle mural: voici les observations.

Le 22 Mai 1769, passage du Soleil en  $2^{\circ} 15''$  au quart-de-cercle mural & le centre à  $3^h 57' 55''$  de la pendule; *Arcturus* l'a suivi à  $14^h 05' 37'' \frac{1}{2}$ ; donc si l'ascension droite apparente d'*Arcturus* étoit, selon ma Table, de  $21^d 17' 49'' \frac{1}{2}$ , celle du Soleil sera  $59^d 25' 30''$ , & son vrai lieu H  $1^d 32' 45''$ , plus avancé de  $18'' \frac{1}{2}$  &  $19''$  que selon les Tables des Institutions, corrigées par l'équation du centre & par la précession inégale de l'équinoxe.

Le 23 Mai, passage du Soleil en  $2^{\circ} 15'' \frac{2}{3}$  & le centre à

116 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

4<sup>h</sup> 02' 27"  $\frac{1}{6}$  de la pendule: *Arcturus* l'a suivi, l'horloge à pendule marquant 14<sup>h</sup> 06' 08"  $\frac{1}{3}$ , ce qui donne l'ascension droite du Soleil à midi, de 60<sup>d</sup> 25' 42"  $\frac{1}{2}$ , & son lieu observé H 2<sup>d</sup> 30' 15"; mais si *Arcturus* a passé 10<sup>h</sup> 03' 28"  $\frac{2}{3}$  de temps corrigé, après le Soleil, comme on a lieu de le conjecturer, par d'autres passages à différens fils; le lieu observé du Soleil à midi, seroit H 2<sup>d</sup> 30' 20", c'est-à-dire 5 secondes plus grand; ainsi l'erreur des Tables seroit de 13 à 18 secondes dont elles ne donnent pas le lieu du Soleil assez avancé.

J'ai trouvé au contraire, par les observations du 24 Mai, qu'il falloit augmenter cette différence; ainsi l'on peut retenir pour lors 20 secondes pour l'erreur des Tables: voici les observations du 24 Mai. à 4<sup>h</sup> 08' 07"  $\frac{1}{4}$ , passage du 2.<sup>d</sup> bord du Soleil & à 14<sup>h</sup> 06' 37"  $\frac{1}{3}$ , *Arcturus* a passé au même fil de la lunette; ainsi l'ascension droite du Soleil à midi, a dû être de 61<sup>d</sup> 26' 22"  $\frac{1}{2}$  & le lieu observé en H 3<sup>d</sup> 28' 05". Les Tables de Desplaces donnent les mouvemens correspondans aux longitudes du Soleil; si on les veut réduire en ascension droite & déclinaison, pour en comparer les différences diurnes comme il suit.

*Selon les Tables de Flamsteed corrigées.*

	Différence.		Différence.	Déclin. boréale.	Différence.
H 1 <sup>d</sup> 32' 26"	} 57' 36"	Asc.	59 <sup>d</sup> 25' 03" $\frac{1}{2}$	20 <sup>d</sup> 30' 26"	} 11' 30" $\frac{1}{2}$
2. 30. 02			60. 25. 22	20. 41. 56" $\frac{1}{3}$	
3. 27. 36			61. 25. 48	20. 53. 06	

Pour comparer ceci aux observations, il faut savoir que le quart-de-cercle a donné les distances au zénit, corrigées comme il suit:

	Différence.		Différence.
Asc. dr. observées le 22 Mai 59 <sup>d</sup> 25' 30"	} 60' 17 <sup>½</sup>	bord supér.	28 <sup>d</sup> 05' 57 <sup>½</sup>
23... 60. 25. 47 <sup>½</sup>		du	27. 54. 25
24... 61. 26. 22 <sup>½</sup>		Soleil.	27. 43. 17 <sup>½</sup>
			} 11' 32 <sup>½</sup>
			} 11. 07 <sup>½</sup>
La distance apparente d' <i>Arcturus</i> au zénit. .... 28. 28. 05.			

Le 19 Juillet 1769, le 2.<sup>d</sup> bord du Soleil a passé au quart-de-cercle mural à 7<sup>h</sup> 54' 36"  $\frac{2}{3}$  & *Arcturus* au même fil à 14<sup>h</sup>

$14^h 02' 50'' \frac{1}{2}$ , la pendule de Graham avançoit alors de 27 secondes par jour sur la révolution des Étoiles fixes ; donc, si l'ascension droite apparente d'*Arcturus* étoit alors de  $211^d 17' 40'' \frac{1}{2}$ , celle du Soleil à midi a dû être  $118^d 59' 03''$ , & son lieu en  $\varpi$   $26^d 56' 08''$ , plus avancé de 13 secondes que selon les Tables corrigées ; le même jour le bord supérieur du Soleil, a paru distant du zénit de  $27^d 47' 57'' \frac{1}{2}$  & *Arcturus* de  $28^d 27' 52'' \frac{1}{2}$  ; or il suit de-là, que le centre du Soleil étoit, le 19 Juillet, plus près du zénit de  $0^d 6' 30''$  que le 23 Mai ; mais à cette différence en déclinaison observée, répond un mouvement en ascension droite de  $0^d 34' 59''$  que le Soleil a dû parcourir pour être à la même distance du colure des solstices qu'au 23 Mai ; ainsi son ascension droite devient pour lors  $119^d 34' 02''$  les deux complémens ou excès sur 90 degrés seront en Mai & Juillet  $29^d 34' 12'' \frac{1}{2}$  &  $29^d 34' 02''$ , ce qui fait voir que l'ascension droite d'*Arcturus* doit être augmentée de  $7'' \frac{1}{2}$  à  $5''$  & qu'elle est plus grande de toute cette quantité qu'on ne l'a supposée dans le calcul ; ici la difficulté consiste à pouvoir s'assurer des variations diurnes en déclinaison, puisqu'à une seconde de hauteur répondent pour lors 5 secondes  $\frac{1}{2}$  en ascension droite ; on ne doit donc pas être étonné de trouver une très-légère différence entre l'ascension droite observée & celle qui résulte de la Table des étoiles fixes ; cette différence est presque nulle sur un mouvement propre de l'étoile en cent années : au reste, j'ai cru devoir m'en tenir à l'ascension droite d'*Arcturus* que j'ai supposée, jusqu'à ce que j'aie réitéré les années suivantes les mêmes comparaisons d'*Arcturus* au Soleil, ou bien en la comparant immédiatement avec  $\alpha$  du petit Chien, ou bien à quelques étoiles d'Orion, comme je l'ai fait aux deux équinoxes, ce que je détaillerai plus au long dans la suite.

J'ai mesuré pareillement les 22 & 23 Mai, la distance de l'autre bord, ou inférieur du Soleil, au zénit, savoir de  $28^d 37' 35''$  ou  $37'' \frac{1}{2}$  & de  $28^d 26' 10''$ , en sorte que les variations diurnes du Soleil en déclinaison de ce bord inférieur, ne seroient, du 22 au 23 Mai, que de  $11' 25''$  à  $27'' \frac{1}{2}$ , mais c'est à ce bord qu'on s'attache le moins ordinairement, l'usage ayant introduit dans l'Astronomie de commencer par le bord supérieur,

Mém. 1769,

. G

Or de l'ascension droite moyenne d'*Arcturus* & de sa déclinaison observée cette année, on en déduit, en supposant l'obliquité moyenne de l'écliptique  $23^{\text{d}} 28' 15''$ , la longitude au 21 Juin  $21^{\text{d}} 00' 58''$ , & la latitude boréale  $30^{\text{d}} 53' 57''$ .

Sachant donc actuellement à quel degré de précision on peut connoître immédiatement l'ascension droite d'*Arcturus*, puisque l'on n'y peut errer au-delà de 5 secondes, voyons ce qui résulte d'observations semblables & très-bien suivies, faites il y a près de cent ans, lorsqu'on eut bâti l'Observatoire royal dans le dernier siècle.

Dès l'année 1669, *Arcturus* fut comparé au Soleil par M. Picard, en Mai & en Juillet; au jardin de la Bibliothèque du Roi, & les hauteurs méridiennes du bord supérieur du Soleil, furent soigneusement observées; on peut s'attacher, si l'on veut, à discuter les Observations des 18 & 19, comparées à celles des 16, 17 & 21 Juillet: je n'en ai trouvé que les résultats dans les registres originaux sur lesquels a été publié le I.<sup>er</sup> volume de l'Histoire céleste; ainsi je passe à celles de l'année 1675, qui sont parfaitement détaillées, & qu'on trouvera au même volume.

Le 24 Mai 1675, M. Picard a conclu le vrai midi à  $0^{\text{h}} 13' 00''$  par six hauteurs correspondantes du Soleil, à l'aide de son quart-de-cercle de 32 pouces de rayon, qu'il nomme *P*. On avoit arrêté dès le 22 Mai l'autre quart-de-cercle *D* de 3 pieds de rayon, dans le plan du méridien, & on avoit essayé d'y comparer déjà deux fois *Arcturus* avec le Soleil; l'étoile étoit alors plus élevée d'un demi-degré ou d'un quart, que le centre du Soleil dans le méridien: or le 24 Mai les passages des deux bords sont donnés; celui du centre du Soleil à  $0^{\text{h}} 13' 25''\frac{1}{2}$  de la pendule; d'ailleurs, lorsque deux astres passent au méridien à même hauteur; il importe peu que le fil vertical de la lunette immobile soit de 21 secondes de temps éloigné du vrai méridien, puisqu'il n'en résulte aucune erreur sur leur différence en ascension droite: *Arcturus* passa le soir au même fil du quart-de-cercle *D*, à  $10^{\text{h}} 08' 02''\frac{1}{2}$ , & puisque par les étoiles orientales dont on prenoit les hauteurs,  $23^{\text{h}} 56' 103''\frac{1}{2}$  de la pendule répondoient à 360 degrés, on aura leur différence en ascension droite  $149^{\text{d}} 04' 46''\frac{1}{2}$  pour l'instant de midi.

Les hauteurs du bord supérieur du Soleil, observées pour les jours qui précèdent & qui suivent, sont

	20 Mai 61 <sup>d</sup> 29' 20" <i>Différence.</i>	
<i>Acturus</i> le 29 Mai 62 <sup>d</sup> 04' 05". Les	22.... 61. 53. 50	} 11' 10"
	23.... 62. 05. 00	
	24.... 62. 16. 25	} 11. 25
	25.... 62. 27. 20	

Les Tables corrigées donnent la déclinaison du Soleil à midi,

Le 20 Mai 20 <sup>d</sup> 3' 14 <sup>"</sup> $\frac{1}{2}$ <i>Différence.</i>	
22.... 20. 27. 26	} 11' 36"
23.... 20. 39. 02	
24.... 20. 50. 15	} 11. 13
25.... 21. 01. 08	

On voit ainsi que les 24 & 25 Mai, la hauteur du bord du Soleil a été observée avec plus d'attention, & qu'ainsi il n'y a pas de correction à faire.

Les 18 & 19 Juillet 1675, on prit des hauteurs correspondantes du Soleil en très-grand nombre, sans doute pour s'assurer des effets de la chaleur plus particulièrement & indépendamment des étoiles, ou d'un midi à l'autre le quart-de-cercle *D* restoit immobile, & l'on trouva assez sensiblement la même différence entre les midis conclus à 0<sup>h</sup> 19' 52" & 0<sup>h</sup> 19' 53<sup>"</sup> $\frac{1}{2}$ , & les passages que l'on va rapporter ci-après; en effet, le 18 Juillet le passage du centre du Soleil déduit de celui de ses deux bords, étoit au fil du quart-de-cercle à 0<sup>h</sup> 19' 19", & celui d'*Acturus* à 6<sup>h</sup> 28' 26", ce qui donne pour midi la différence en ascension droite, entre le Soleil & l'Étoile de 92<sup>d</sup> 38' 02".

Le jour suivant 19 Juillet, le passage du centre du Soleil a été conclu de l'observation du 1.<sup>er</sup> bord ou occidental à 0<sup>h</sup> 19' 18<sup>"</sup> $\frac{1}{2}$ ; on prit ensuite avec le même instrument la hauteur méridienne du bord supérieur, parce que l'on croyoit nécessaire de la constater avec les deux quarts-de-cercle; pour cet effet il a fallu



## 20 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

remuer tant soit peu le quart-de-cercle *D*, qui resta ensuite immobile jusqu'au passage d'*Arcturus*; & comme le passage du 2.<sup>d</sup> bord du Soleil fut observé au fil vertical de cet instrument, on en a déduit le passage du centre à  $0^h 19' 20''\frac{1}{2}$ : cela indiquoit en même temps qu'il n'étoit pas possible de le remuer sur son genou horizontal, sans le déranger tant soit peu, comme on le voit ici, d'environ 2 secondes de temps; c'est aussi ce qui nous rend suspectes les observations de 1669 & celles des années suivantes: quoi qu'il en soit, *Arcturus* passa le 19 Juillet au soir au fil de la lunette à  $6^h 24' 27''$ ; on trouva enfin le 20 au soir par les hauteurs orientales de  $\epsilon$  de Pégase, que le pendule avoit retardé en deux jours sur le moyen mouvement de  $7' 59''$ , & que par conséquent  $23^h 56' 00''\frac{1}{2}$  répondoient à 360 degrés.

Enfin le 20 Juillet, le Soleil a passé en  $2' 15''\frac{1}{2}$  au fil de la lunette du quart-de-cercle immobile, & son centre à  $0^h 19' 19''\frac{1}{4}$  au soir; *Arcturus* y a passé à  $6^h 20' 26''$ , ainsi la différence en ascension droite apparente entre le Soleil & *Arcturus*, se trouve par-là de  $90^d 31' 44''$ , & le jour précédent de  $91^d 31' 50''$ : les hauteurs méridiennes du bord supérieur du Soleil, sont

		Difference.
<i>Arcturus</i> $62^d 04' 10''$ . Les	18 Juillet $62^d 28' 50''$ D & P	$10' 55''$ ou $50''$
	19 .... $62. 17. 55$ & $60''$	$11. 25. ... 20.$
	20 .... $62. 06. 35$ P.	$11. 15. ... 05.$
	21 .... $61. 55. 20$ & $30''$	

Soit supposé d'après les Éléments publiés dans l'Histoire céleste; l'ascension droite moyenne d'*Arcturus* au 21 Juin 1675, de  $210^d 13' 08''\frac{1}{2}$ ; on verra bientôt par les résultats des observations s'il faut augmenter ou diminuer cette ascension droite: or l'ascension droite apparente a dû être par conséquent au mois de Juillet  $210^d 13' 33''$ , & l'ascension droite du Soleil observée à midi

		Difference.
Les	18 Juillet $117^d 41' 25''$	$60' 18''$
	19 ..... $118. 41. 43$	$60. 06.$
	20 ..... $119. 41. 49$	

Les Tables corrigées, donnent l'ascension droite & la déclinaison comme il suit :

Les	18 Juillet	117 <sup>d</sup> 41' 55"	Différences.	21 <sup>d</sup> 2' 27"	Différences.
	19.....	118. 42. 09.	60' 14"	20. 51. 38	10' 49"
	20.....	119. 42. 17	60. 08	20. 40. 31	11. 07
	21.....			20. 29. 00 $\frac{1}{2}$	11. 30 $\frac{1}{2}$

Ainsi les observations paroissent assez conformes au mouvement diurne en ascension droite, tiré des Tables astronomiques, celle du 18 Juillet pouvant être diminuée, si l'on veut, de 3 secondes, mais aux hauteurs méridiennes, la correction du 20 à midi, paroît être plus importante, si on l'interpole pour rétablir la loi de progression; au reste, soit qu'on l'augmente ou non de 10 secondes, on pourra comparer immédiatement la hauteur du 24 Mai 1675 à midi, avec celle qui fut observée le 19 Juillet, & dans les deux cas la différence se trouve de 1' 35" dont le Soleil étoit plus bas le 24 Mai qu'au 19 Juillet.

On tire de ces observations l'ascension droite moyenne d'*Arcturus* au 21 Juin 1675, de 210<sup>d</sup> 13' 40": or de la déclinaison moyenne 20<sup>d</sup> 53' 33", & de l'obliquité moyenne de l'écliptique 23<sup>d</sup> 28' 50", l'on en déduit la longitude  $\approx$  19<sup>d</sup> 43' 02"  $\frac{1}{2}$  avec une latitude boréale de 30<sup>d</sup> 57' 47".

Ainsi en quatre-vingt-quatorze ans, *Arcturus* auroit parcouru en longitude 1<sup>d</sup> 17' 55"  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire 24"  $\frac{1}{2}$  de moins que selon la précession moyenne de l'équinoxe qu'on suppose vulgairement de 50 secondes par an, ou bien en cent ans de 1<sup>d</sup> 23' 20": mais les observations anciennes & modernes donnent au moins  $\frac{1}{3}$  de seconde d'accroissement annuel, ou bien 33"  $\frac{1}{3}$  de plus en cent ans; dans cette dernière supposition, qui est reçue comme plus vraisemblable que l'autre, *Arcturus* auroit rétrogradé contre l'ordre des signes, par son mouvement propre en longitude de 56 secondes, & par conséquent de 59"  $\frac{1}{2}$  à 60" en cent ans; à l'égard de la latitude, on trouve une variation de 3' 50" en quatre-vingt-quatorze ans, ce qui donne fort approchant de 4 minutes en cent ans.

*Du Mémoire du Docteur HALLEY.**Transactions Philosophiques n.° 355.*

AYANT eu depuis peu occasion d'examiner la quantité de la précession des points des Équinoxes, j'ai pris la peine de comparer la déclinaison des Étoiles fixes, délivrée par Ptolémée, au chapitre III du VII.<sup>e</sup> livre de son *Almageste*, comme observée par Thymocharis & Aristille, près de trois cents ans avant J. C. & par Hipparque, environ cent soixante-dix ans après ceux-ci; c'est-à-dire cent trente ans avant J. C; avec celle qu'on a établie en ces derniers temps, & par le résultat de quantité de calculs faits à ce dessein, j'ai conclu qu'en dix-huit cents ans, les Étoiles fixes s'étoient avancé quelque peu plus que 25 degrés en longitude; en un mot, que la précession des équinoxes étoit tant soit peu plus grande que 50 secondes par an; mais ce résultat est fondé sur quelque incertitude, à cause de l'imperfection des Observations anciennes, & c'est pour cela que je me suis déterminé dans mes Tables, à adhérer à la proportion exacte de 5 minutes en six ans, ce qui par d'autres principes nous paroît être assuré n'être pas loin de la vérité: Mais pendant que j'étois occupé de ces recherches, j'ai été surpris de trouver les latitudes de trois des principales étoiles qu'on voit au ciel, contredire à la supposition de la plus grande obliquité de l'écliptique, quoique cette plus grande obliquité paroisse confirmée par la plupart des autres étoiles qu'on trouve dans le vieux Catalogue, comme si le plan de l'orbite de la Terre avoit changé sa situation parmi les étoiles fixes, d'environ 20 minutes depuis le temps d'Hipparque: cela se voit particulièrement dans les étoiles des Gémeaux qui sont au nord de l'écliptique, qui ont une moindre latitude que nous ne la trouvons aujourd'hui; & au contraire, celles du sud de l'écliptique ont une plus grande latitude australe que nous ne la trouvons. Cependant trois étoiles, savoir *Palilicium* ou l'œil du Taureau, *Sirius* & *Arcturus*, contredisent directement à cette règle; car à l'égard de *Palilicium*, cette étoile étant au temps d'Hipparque vers 10 degrés du Taureau, a dû être environ à 15 minutes

plus sud qu'à présent, & *Sirius* étant alors vers 15 degrés des Gémeaux, auroit dû être 20 minutes plus sud qu'aujourd'hui; mais au contraire Ptolémée place la première 20 minutes, & l'autre 22 minutes plus nord en latitude que nous ne les trouvons; ce ne sont pas des erreurs de Copistes, car cela est prouvé devoir être exact par leur déclinaison que rapporte Ptolémée, lesquelles ont été observées par Thymocharis, Hipparque & par lui-même: or ces déclinaisons font voir que les latitudes de ces étoiles sont les mêmes que selon l'intention des susdits auteurs. Quant à *Arcturus*, cette étoile est trop proche du colure des équinoxes, pour en pouvoir tirer quelque argument contre le changement de l'obliquité de l'écliptique; mais Ptolémée nous donne sa position 33 minutes plus nord en latitude qu'on ne la trouve aujourd'hui, & on remarquera que cette plus grande latitude, est encore confirmée par les déclinaisons que nous ont laissées les mêmes Observateurs dont j'ai parlé.

Il est donc évident que ces trois étoiles se trouvent d'un demi-degré plus au sud actuellement, qu'elles ne l'ont paru aux temps des anciens Astronomes; tout au contraire, aux mêmes temps la brillance de l'épaule d'Orion, paroît dans Ptolémée, près d'un degré plus sud en latitude qu'on ne la trouve en ces années-ci; que peuvent donc signifier ces différences? il n'est pas possible de se figurer que les Anciens se soient si fort trompés dans une matière si facile à traiter, & sur-tout par trois Observateurs qui se sont confirmés l'un l'autre; d'ailleurs ces Étoiles sont des plus remarquables du Ciel, & il est bien probable qu'elles sont plus proches de la Terre que les autres, & que si elles ont par-devers elles quelques mouvemens particuliers, il est plus vraisemblable qu'on doit les apercevoir dans un aussi long espace de temps que dix-huit cents ans qui doit désigner l'altération dans leurs positions, que de recourir à quelque chose d'imperceptible que pourroit donner un intervalle d'environ cent ans.

Néanmoins quant à *Sirius*, il a été observé par Tycho près de 2 minutes plus nord que nous ne le trouvons aujourd'hui, lorsqu'au contraire il devroit être beaucoup plus sud à l'égard de l'écliptique que Tycho a supposée  $2\frac{1}{2}$  plus grande que nous ne la faisons, ce qui diffère en tout de 4 minutes. On peut bien rejeter la moitié de cette différence sur la réfraction à laquelle

*Temps vrai.*

1769, 18 Juin, 8<sup>h</sup> 27' 30" Imm. du 3.<sup>e</sup> Satellite, Ciel serein : on voit bien les bandes, mais il fait grand jour : lunette achromatique de 36 pouces, faite à Paris par M. Létan; elle a 27 lignes d'ouverture & grossit 65 fois.

10. 1. 9. Émerf. Même lunette, ciel serein, on voit bien les bandes.

25 Juin, 12. 24. 43. Immerf. ciel serein, Jupiter bien terminé, mais il est bas & on voit difficilement les bandes; même lunette.

12. 25. 0. Imm. M. Cassini, fils, lunette achromatique de Dollond, de 42 pouces.

On voit, par le détail de ces observations, que l'immersion du 18 Juin est arrivée 24 minutes seulement après le coucher du Soleil; il faisoit grand jour, qui diminuoit la lumière du Satellite : ainsi, quoique le ciel fût parfaitement serein, cette Observation peut n'être pas si exacte que si elle étoit arrivée dans la nuit close. Le 25 Juin, Jupiter étoit bas, & on voyoit difficilement les bandes, circonstances qui rendent les observations douteuses; cependant Jupiter étoit bien terminé, & les autres Satellites étoient brillans. M. Messier a marqué ces deux immersions plus de deux minutes plus tard que moi. Mais il s'est servi d'une excellente lunette acromatique de 36 pouces; faite à Paris par le même M. de Létan, qui a 39 lignes d'ouverture, & grossit cent dix fois; au lieu que la mienne, quoique de la même longueur, n'a que 27 lignes d'ouverture, & ne grossit que soixante-cinq fois.

Cependant M. Messier & moi, avons vu l'émerfion du 18 Juin presque en même temps, & même je l'ai vu 13 secondes plus tôt que lui, dont je suis extrêmement surpris, vu la grande différence qu'il y a entre nos observations des immersions. M. Messier m'a prié de communiquer à l'Académie les observations que voici :

*Temps vrai.*

1769, 18 Juin, 8<sup>h</sup> 29' 32" Immersion du 3.<sup>e</sup> Satellite; 8 minutes avant il avoit déjà sensiblement perdu de sa lumière; le ciel étoit beau; on voyoit très-bien les bandes, mais il faisoit grand jour.

*Temps vrai.*

1769, 18 Juin, 10<sup>h</sup> 1' 22" Émerf. du 3.<sup>e</sup> Satellite, le ciel également serein; les bandes ne se voyoient pas si bien que dans l'immersion; c'est une remarque que j'ai déjà faite, qu'on voit beaucoup mieux les bandes dans le crépuscule que dans une nuit obscure.

18 Juin, 10<sup>h</sup> 2' 53" Le Satellite n'a presque point augmenté de lumière.

10. 10. 7. La lumière du Satellite semble égaler celle du second.

10. 17. 0. Il paroît avoir toute sa lumière.

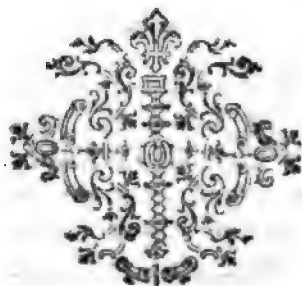
25 Juin, 12<sup>h</sup> 14' 0" Le 3.<sup>e</sup> Satellite semble perdre de sa lumière.

12. 26. 51. Je perds le Satellite de vue, il y avoit plus d'une minute & demie qu'il étoit très-petit.

12. 27. 36. Je le perds pour la seconde fois, après l'avoir revu pendant plusieurs secondes & d'une lumière extrêmement foible: dans cette observation Jupiter étoit bas, mais il faisoit beau, le ciel étoit pur, Jupiter assez bien terminé; on voyoit cependant difficilement les bandes, mais les Satellites étoient brillans.

Voyons maintenant le résultat de ces observations. La demi-durée de l'Éclipse du 18 Juin a été, suivant mes observations, de 0<sup>h</sup> 46' 49"  $\frac{1}{2}$ ; la longitude de Jupiter, vue du Soleil étoit de 7<sup>f</sup> 21<sup>d</sup> 19': je suppose celle du nœud ascendant de 10<sup>f</sup> 14<sup>d</sup> 0'; donc la distance de Jupiter au  $\Omega$  ascendant étoit de 9<sup>f</sup> 7<sup>d</sup> 19'; je suppose, comme en 1763, le demi-diamètre de la section de l'ombre de  $\Psi$  dans l'orbe du 3.<sup>e</sup> satellite de 3<sup>d</sup> 43' 16" que le Satellite parcourt en 1<sup>h</sup> 46' 40". Avec ces éléments, je trouve l'inclinaison de 3<sup>d</sup> 22' 23"; mais je l'ai trouvée, en 1763, de 3<sup>d</sup> 24' 42": donc elle est moindre cette année, qu'en 1763, & la différence est de 2' 19". Par les observations de M. Messier, on trouve cette inclinaison de 3<sup>d</sup> 23' 34", moindre de 1' 8" qu'en 1763. Comme j'avois quelque scrupule

sur mon Observation de l'immersion du 18 Juin, faite pendant le grand jour, qui m'a empêché mercredi dernier de communiquer les observations de cette Éclipse à l'Académie, j'ai calculé la demi-durée qui résulte de l'émergence observée le 18, & de l'immersion observée le 25, & je l'ai trouvée par mes observations de  $47' 15''$ , c'est-à-dire 26 secondes plus grande que celle qui a été observée immédiatement, ce qui prouve que mon Observation du 25 Juin, est moins bonne que celle du 18. Les observations de M. Messier donnent précisément la même demi-durée que celle qui a été observée, c'est-à-dire,  $45' 55''$ . Je dois avertir que je me suis servi dans le calcul de l'inclinaison du demi-diamètre de la section de l'ombre de  $3^d 43' 16''$ , pour faire voir la différence de l'inclinaison déterminée en 1763 de celle qui a été trouvée cette année; mais je le suppose dans mes Tables de  $3^d 41' 18''$ , que le Satellite parcourt dans  $1^h 47' 10''$ , parce qu'il s'accorde mieux au plus grand nombre des observations. Dans cette hypothèse, l'inclinaison a été de  $3^d 25' 41''$  en 1763, & de  $3^d 23' 33''$  en 1769.



# OCCULTATION DE $\mu$ DES GÉMEAUX, PAR LA LUNE,

*Le 11 Avril 1769;*

*Avec des Remarques sur la distance des Étoiles  $\alpha$  &  $\beta$   
des Gémeaux.*

Par M. LE MONNIER.

**M.** DE VERDUN, Lieutenant de Vaisseau, m'ayant fait <sup>12 Avril 1769.</sup> remettre un nouveau mégamètre qu'il a fait construire sur les principes de M. de Charnières; j'ai voulu mesurer, pour essayer cet instrument, quelques distances de la Lune aux Étoiles, aussitôt qu'on a pu les apercevoir dans le crépuscule.

Ayant jeté les yeux sur le zodiaque de d'Houlland, je me suis aperçu à 7 heures du soir que l'étoile  $\mu$  des Gémeaux, de la 3.<sup>e</sup> grandeur, étoit déjà éclipsée par le disque obscur de la Lune; j'ai donc attendu l'émergence avec d'autant plus de soin, que l'ouragan m'avoit fait manquer à 4 heures  $\frac{3}{4}$  le passage de la Lune par le méridien. L'émergence qui suit 10" à 12"  $\frac{1}{2}$  trop tard.

A 7<sup>h</sup> 46' 03", j'ai vu cette étoile avec ma lunette de 9 pieds, détachée du disque lumineux de la Lune, sa distance à la corne boréale étant de 12<sup>d</sup>  $\frac{1}{2}$  ou environ, ce qui est suffisant pour en conclure la longitude & la latitude de la Lune ce jour-là.

Je me sers pour cet effet, des Tables fort étendues, qui sont destinées à donner la hauteur & la distance au méridien du nonagésime degré, depuis l'équateur jusqu'au 60.<sup>e</sup> degré de latitude.

*Suite des Observations faites aux Étoiles pour vérifier le  
mégamètre.*

M. de Charnières propose dans la seconde partie de son ouvrage, publiée en 1768, la distance des deux étoiles  $\alpha$  &  $\beta$  du petit Chien; mais cette distance pour la suite, sera variable,



à cause que l'étoile  $\alpha$  ou *Procyon*, qui est de la 1.<sup>re</sup> grandeur; a un mouvement propre en latitude, lequel s'accroît à chaque siècle d'environ la moitié de celui d'*Arcturus*, ainsi qu'on l'a remarqué il y a plus de vingt ans, outre qu'il en est fait mention, page 398 des *Institutions Astronomiques*, ce qui a occasionné la correction dans la déclinaison boréale, telle qu'on la trouve à la page 75 du *Mémoire sur les Longitudes*, de M. de Charnières.

J'ai donc cherché deux étoiles éloignées de 4 à 5 degrés, dont la distance fût invariable pendant un siècle, & comme il falloit donner la préférence aux étoiles de même grandeur, j'ai trouvé enfin les deux étoiles Castor & Pollux, autrement  $\alpha$  &  $\beta$  des Gémeaux, dont je vais rapporter les observations.

Le 22 Avril 1769, entre  $\alpha$  &  $\beta$  des Gémeaux, temps écoulé au passage par le méridien  $0^h 11' 22''$ , qui valent  $2^d 50' 25''$ , en déclinaison  $3^d 48' 30''$ , ce qui en 1767 avoit été vérifié le 2 Mars au soir; or l'on tire, de ces observations, la distance apparente par une méthode différente de la règle vulgaire des Tables, laquelle est fautive pour deux côtés de l'angle compris, de  $4^d 31' 34''$ .

Flamsteed, en 1690, a trouvé  $0^h 11' 31''$  pour différence en ascension droite, &  $3^d 47' 15''$  pour différence en déclinaison, ce qui a été confirmé sept à huit fois les années suivantes jusqu'en 1696, lorsqu'on a trouvé, le 8 & le 14 Mars,  $0^h 11' 30'' \frac{1}{2}$  ou 30 secondes, & la déclinaison  $3^d 47' 30''$ . Supposant donc en comparant ces observations au Catalogue, la différence  $2^d 53' 10''$  en déclinaison &  $52^d 29' 00''$  au nord de l'équateur, on trouve la distance de  $4^d 31' 48''$ .



*EXAMEN DE LA QUESTION,*  
SI LES ESPÈCES CHANGENT PARMI LES PLANTES;  
*Nouvelles Expériences tentées à ce sujet.*

Par M. ADANSON.

UNE question des plus célèbres & des plus agitées depuis 15 Novemb. 1769. quelques années en Histoire Naturelle, & sur-tout en Botanique, est de savoir si les espèces sont constantes, ou si elles changent parmi les Plantes, c'est-à-dire, si, par la communication des sexes ou autrement, il se forme de nouvelles espèces qui se fixent à leur tour, & qui se reproduisent constamment sous cette nouvelle forme, sans reprendre celle des Plantes dont elles ont tiré leur origine.

Cette question fut proposée pour la première fois en 1719, par M. Marchant dans les Mémoires de l'Académie. Au mois de Juillet 1715, il aperçut dans son jardin une plante qu'il ne connoissoit pas, & qui s'éleva jusqu'à cinq ou six pouces; elle subsista jusqu'à la fin de Décembre, où elle se dessécha, & périt. Il crut ne pouvoir la rapporter qu'au genre de la Mercuriale; & comme elle étoit toute nouvelle, & n'avoit point encore été décrite par les Auteurs, il la nomma *Mercuriale à feuilles capillaires* (*Mercurialis foliis capillaceis*). \* Voy. Mém. de l'Acad. année 1719, p. 60, - planches 6 & 7.

L'année suivante 1716, au mois d'Avril, dans le même endroit où avoit été cette plante, il en vit paroître six autres, dont quatre étoient toutes semblables à l'ancienne, & deux autres assez différentes pour faire une autre espèce de Mercuriale qu'il nomma *Mercuriale à feuilles découpées & comme déchirées*, (*Mercurialis foliis in varias & inæquales lacinias quasi dilaceratis*); elle subsista aussi jusqu'à la fin de Décembre, en quoi ces deux espèces sont différentes de la Mercuriale vulgaire, qui, quoiqu'annuelle aussi bien qu'elles, ne dure pas aussi long-temps: ces deux plantes nouvelles se sont multipliées depuis dans l'espace de

7 ou 8 pieds de terrain; & ce qui est étonnant, jamais M. Marchant ne leur a pu découvrir aucune apparence de graine. Cependant la petite étendue où elles renaissent tous les ans, prouve assez qu'elles doivent être venues de semences qui y seront tombées des plantes précédentes; comme on a découvert les secrets dont plusieurs plantes se servent pour cacher leurs graines, il est plus merveilleux qu'il y en ait encore qui puissent réussir à les dérober.

« Par cette Observation, dit M. Marchant, il y auroit donc  
 » lieu de soupçonner que la Toute-puissance ayant une fois créé des  
 » individus de plantes pour modèle de chaque genre, faits de toute  
 » structure & caractères imaginables, propres à produire leurs sem-  
 » blables, & que ces modèles, dis-je, ou chefs de chaque genre  
 » en se perpétuant, auroient enfin produit des variétés, entre les-  
 » quelles celles qui sont demeurées constantes & permanentes, ont  
 » constitué des espèces qui, par succession des temps & de la même  
 » manière, ont fait d'autres différentes productions qui ont tant  
 » multiplié la Botanique dans certains genres, qu'il est constant  
 » qu'on connoît aujourd'hui dans quelques genres de plantes jusqu'à  
 » cent, cent cinquante, & même jusqu'à plus de deux cents espèces  
 » distinctes & constantes, appartenant à un seul genre de plante.  
 » La preuve de ce qu'on avance au sujet de la production des  
 » espèces, paroît d'autant mieux fondée, que l'on sait que les  
 » plus anciens Botanistes n'ont fait mention que d'environ quatre  
 » cents chefs de genres de plantes, auxquels ils ajoutent peu d'espèces,  
 » ce qui donne à penser que les espèces n'étoient pas encore fort  
 » nombreuses; au lieu que nous connoissons à présent plus de huit  
 » cents chefs de genres surchargés de treize à quatorze mille espèces  
 » ou davantage, entre lesquelles, à la vérité, plusieurs sont répétées,  
 » & d'autres ne sont que de simples variétés. »

Cette opinion resta dans l'oubli jusqu'à l'année 1744, où M. Linnæus après avoir regardé les espèces comme constantes en 1740, (*Fundamenta Bot.* n.<sup>o</sup> 157. *Edit. in-4.<sup>o</sup> 1740*) commença à en douter, & même à croire à la production de nouvelles espèces en parlant de la plante qu'il appelle *Peloria*; & après avoir cité les deux exemples de M. Marchant, il en rappelle six autres que nous allons rapporter.

La

La *Peloria* \*, c'est ainsi qu'il nomme cette nouvelle espèce, fut découverte pour la première fois en 1742, par M. Zioberg, dans une île située en mer, à environ sept milles d'Upsal vers la province de Roslagne, sur un terrain graveleux, tout couvert de Linaires, au milieu desquelles elle étoit en moindre quantité. On en a trouvé depuis dans plusieurs endroits de la Suède, selon M. Linnæus; & aux environs de Berlin, au rapport de M. Ludolfe: cette plante ressemble tellement à la Linaire commune, (*Linaria vulgaris lutea, flore majore. C. B.*) avant l'épanouissement de ses fleurs, qu'on n'y peut voir aucune différence; elle en a le port, la grandeur, l'odeur, la couleur, les feuilles, le calice, les étamines, le pistile, le fruit & les graines: mais la corolle est fort différente, au lieu du tube court de la Linaire, terminé par deux lèvres irrégulières à quatre crénelures, & armé en bas d'un éperon, la corolle de la *Peloria* a un tube fort long, terminé par un pavillon presque régulier à cinq crénelures, & entouré au bas de cinq éperons. Outre la ressemblance parfaite qu'a la *Peloria* avec la Linaire dans toutes ses autres parties, on a trouvé quelquefois sur une même tige des fleurs de la Linaire commune, ce qui prouve incontestablement que cette plante provient d'une Linaire par une fécondation étrangère, son stigmate ayant reçu la poussière d'une autre plante de la même famille, qu'on soupçonne être la Jusquiame ou le Tabac, dont la corolle a, à peu près, la forme de celle de la *Peloria*. Enfin ce qui établit cette plante pour une nouvelle espèce, c'est qu'elle donne des graines parfaites par lesquelles elle se reproduit depuis plusieurs générations, ce qui fait penser à M. Linnæus, qu'elle sera une espèce constante.

M. Linnæus cite encore deux métamorphoses semblables; il assure que tous les ans dans le Jardin d'Upsal, les graines du Chardon à tête velue (*Carduus capite rotundo, tomentosus. C. B.*) dégénérées, lui donnent le Chardon des Pyrénées à têtes velues & rassemblées (*Carduus tomentosus, Pyrenaicus, floribus purpureis glomeratis. Tournef.*) il ignore si cette variation provient des semences du disque ou de la couronne, ou de ces semences fécondées par la poussière d'une autre plante.

Mem. 1769.

E

\* V. Linnæus.  
Amœnitates  
Academicæ, vol.  
1.<sup>re</sup> Dissert. 3.  
de *Peloria*.

À l'égard de la cinquième espèce de transformation, voici ce que le même Auteur écrivoit en 1748, à Gmelin : « j'ai aujourd'hui une espèce mulâtre de Plante née de la grande Vervène d'Amérique à feuilles étroites (*Verbena Americana altissima, urticæ foliis angustis, floribus cæruleis*. Herm. Par. t. 242.) & de la petite Vervène d'Amérique à feuilles découpées, (*Verbena humilior foliis incis. Clavt. Virg. 8.*) que j'éleve depuis long-temps. Il en a paru cette année (1748) une nouvelle espèce qui a exactement les feuilles de la Vervène d'Europe (*Verbena communis cæruleo flore. G. B.*), & toutes les autres parties de la grande Vervène d'Amérique (*Verbena Americana, altissima*) citée ci-devant. Les deux Plantes en question ont eu la même couche; & je vous jure que je vois cette troisième pour la première fois, que personne ne me l'a donnée, & qu'on n'a semé aucune autre plante sur cette couche. »

Le sixième exemple de changemens semblables, sur lequel s'appuie M. Linnæus, est tiré de Gmelin qui dit (en 1749), que M. Haller lui a écrit, qu'on a trouvé près de Nuremberg, une Plante pareille à la Linaire à feuilles de nummulaire (*Linaria segetum nummularia, folio aurito & villoso*. Tournef.) mais avec une fleur toute semblable à celle de la *Peloria*, & qui paroît s'être transformée de même.

Le même Gmelin cite encore un septième exemple en 1749 : « j'ai, dit-il, fourni à M. Linnæus l'exemple du pied d'alouette de Sibérie, *Delphinium*, dont je n'ai observé dans ce pays-là que deux espèces distinctes, & dont j'ai compté, dans mon jardin de Pétersbourg, jusqu'à six espèces. Les principales différences consistoient dans les feuilles découpées plus ou moins profondément, plus ou moins fermes, droites ou pendantes, de couleur plus ou moins foncée; les fleurs étoient aussi plus ou moins grandes : ces différences laissoient l'Observateur incertain sur l'espèce à laquelle il falloit rapporter ces plantes; je pense qu'elles provenoient du mélange des deux espèces dont je viens de parler : cela est d'autant plus probable, que ces deux espèces réellement distinctes, étoient plantées l'une près de l'autre. »

En 1749 & en 1751, M. Linnæus (*Amænit. Acad. Vol. III,*

*dissert. 32, de Plantis hybridis*), a cru pouvoir prouver par des observations sûres, que la *Pimpinella agrimonoides* Mor. qui s'est reproduite de graines pendant plusieurs années à Upsal, est une nouvelle espèce de Plante née de la Pimprenelle commune, *Pimpinella sanguisorba minor, lævis. C. B.* fécondée par la poussière de l'aigremoine, *Agrimonia officinarum, C; B.* & il ajoute qu'il est probable, quoiqu'on ne soit point appuyé d'observations là-dessus, que plusieurs Plantes ont été formées ainsi: le *Nymphoides*, Tournef. paroît selon lui reconnoître pour père le *Menyanthe*, & pour mère le *Nymphæa*; le *Datisca* a eu de même pour père le *Chamvre*, & pour mère le *Reseda*; le *Tragopogon gramineis foliis hirsutis*, a eu pour père le *Lapsana*; l'*Hyoscyamus Physalodes*, Linn. a eu pour père l'*Alkekenge*; la *Saxifraga*, Fl. Suec. 358, reconnoît pour père la *Parnassia*, comme la *Cataria* est le père de la *Moldarica betonica folio, floribus minimis pallide cæruleis*, Amm. & comme la *Cortusa Matth.* est le père de la *Primula* & *Cortusoides*, Linn. Il prétend encore dans cette dissertation que tous les *Mesembryum* du cap de Bonne-espérance, ainsi que les Geranions, les Cierges, les Aloès, sont des dégénération d'une première espèce.

Enfin M. Linnæus paroît plus persuadé que jamais de la production de nouvelles espèces de Plantes, ainsi que Gmelin dans la Dissertation sur le sexe des Plantes, (*de sexu Plantarum 1760. in-4.º Petropoli*) où il dit pages 28 & 29. *Dubitari nequit quin Veronica spuria, Delphinium hybridum, Hieracium hybridum, Tragopogon hybridum, sint novæ species generatione hybridâ productæ. . . . . Et Gerania Botanicos facile adducent ut credant species ejusdem generis in vegetabilibus esse diversas plantas, quot in una specie florum commixtiones factæ sunt, & vicissim genera nihil aliud esse quam plantas, eadem matre & diversis patribus ortas.*

*Novus hic aperitur campus Botanicis, in quo diversarum plantarum polline diversis sæminis viduis factis inflemendo, novas tentent efficere species vegetabilium.*

Il est donc évident, par ces divers passages, que M. Linnæus après avoir dit, en 1740, que les espèces sont constantes parmi les Plantes, pense tout différemment en 1744; & qu'en 1749.

& en 1760 il admet, non-seulement la formation naturelle de nouvelles espèces, mais encore la possibilité d'augmenter artificiellement le nombre de ces nouvelles espèces.

Nous avons d'abord été autorisés à penser comme lui sur le récit de ces faits que nous supposons vrais, bien constatés, bien examinés; mais depuis que nous avons vu croître & multiplier sous nos yeux la plupart de ces prétendues nouvelles espèces, depuis que nous avons élevé, non-seulement la Pelore vivace de la Linare commune, envoyée par M. Linnæus; mais encore une Pelore annuelle qui s'est formée, par hasard en 1762, de la Linare d'Espagne appelée *Linare à feuilles menues & à fleur couleur de rouille* (*Linaria tenui folia, aruginei coloris*) semée sur les couches du Jardin royal: depuis que le même hasard nous a procuré en 1766, la deuxième Mercuriale que Marchant appelle Mercuriale à feuilles découpées & comme déchirées. (*Mercurialis foliis in varias & inæquales lacinias quasi dilaceratis*. Mém. Acad. 1719, Tab. 6 & 7) Depuis que nous avons vu d'autres Plantes nouvelles, telles que le fraiser à une feuille qui s'est formé en 1763, & le Sucrion quarré que nous avons vu naître en 1765; depuis que nous avons examiné par nous-mêmes, ces plantes annoncées comme de nouvelles espèces, nous avons cru devoir en porter un jugement bien différent.

Pour en juger, rapportons ces faits chacun à leur place, examinons-les avec des yeux plus attentifs, dépouillés des préjugés, & qualifions chacun du nom qui lui convient.

I.<sup>re</sup>  
EXPÉRIENCE.

La Mercuriale citée ci-dessus, & qui avoit été aperçue par M. Marchant dans son jardin en 1715 & 1716, a reparu pour la première fois depuis ce Botaniste dans les pots de semences de la Chine, faites en Avril 1766, sous les chassis du Jardin royal, par M. de Jussieu qui me confia cette Plante pour suivre les expériences que je vais rapporter.

La plante, quand elle me fut confiée le 11 Juin suivant, avoit quatre pouces de hauteur, & étoit en pleine fleur; c'étoit un individu mâle: ses cotyledons ou feuilles feminales étoient plus longs que dans la Mercuriale ordinaire, étant elliptiques une fois & demie plus longues que larges, au lieu que l'ordinaire les a

presqu'arrondies, de manière que leur longueur surpasse à peine de moitié leur largeur: ses feuilles inférieures ressembloient assez à celles du *Reseda* commun, déchiquetées ou ailées sur un rang, & comme rongées par des insectes, sans cependant en avoir reçu la plus légère atteinte; les supérieures étoient simples, presque linéaires, la plupart alternes, longues d'un pouce à un pouce  $\frac{1}{2}$ , d'un vert noir comme celles du *Reseda*, mais cependant mouchetées de petits points irréguliers, semblables à des boursofflures d'un vert plus clair, comparable à la jaunisse des feuilles malades, ou dont la sève est viciée, & l'organisation des vaisseaux dérangée: la tige verte, les stipules aux tiges, & les fleurs mâles en épi axillaire, porté sur un pédicule assez long, comme dans les Mercuriales ordinaires; le calice des fleurs a de même trois divisions, mais plus petit, & les étamines au nombre de trois à douze, mais avec des anthers vertes trois fois plus petites que dans la Mercuriale commune, & semblable à une vessie sphérique, vide de poussière féminale.

Le seul moyen de perpétuer cette Plante, bien reconnue pour mâle, étoit de féconder des pieds de Mercuriale femelle avec la poussière de ses étamines, (s'il étoit vrai qu'elles en continssent) & de semer les graines de ces Mercuriales ainsi fécondées par cette seule Mercuriale mâle. Pour remplir cet objet, je choisis dix pieds de Mercuriale femelle jeunes, qui n'avoient point encore fleuri, & les replantai avec soin dans plusieurs pots que je mis sur une des couches de ma melonnière, au-dessous de la Mercuriale de Marchant, dont je la saupoudrois trois ou quatre fois chaque jour, ayant eu soin de détruire dès-lors toutes les autres Mercuriales, soit mâles, soit femelles, à mesure qu'il en paroissoit dans mon jardin. Cette expérience ainsi continuée jusqu'au 25 Juillet où les premières graines de mes dix Mercuriales femelles parvinrent en maturité; je semai ces graines, mais aucune ne leva; je les resemai de quinze en quinze jours avec aussi peu de succès jusqu'au 1<sup>er</sup> Novembre où cette Mercuriale mâle périt par les premières gelées, ayant douze pouces de hauteur.

Au printemps de l'année suivante 1767, je resemai des mêmes graines, tant sur couches que dans des pots, & en pleine



terre; il en leva à peine cent sur mille, c'est-à-dire, environ un dixième, & toutes les Mercuriales qui en provinrent, furent des Mercuriales communes. Les graines que je donnai à M. de Jussieu pour répéter la même expérience au Jardin du Roi, ne donnèrent de même que des Mercuriales communes, ainsi que les graines que je recueillis depuis des plantes de la deuxième, troisième, quatrième & cinquième génération.

II.<sup>e</sup> & III.<sup>e</sup>  
EXPÉRIENCE.

Comme cette Mercuriale de M. Marchant avoit des feuilles découpées comme le *Reseda*, j'imaginai, pour me conformer aux idées de M. Linnæus, qu'originellement elle auroit pu être produite par la fécondation d'un pied de Mercuriale femelle par les étamines du *Reseda*, & peut-être par celles d'un chanvre mâle; pour m'en assurer, je transplantai dans deux autres pots, des pieds de mercuriale femelle, dont je plaçai l'un sous un *reseda*, & l'autre sous des pieds de chanvre mâle, tenant mes trois expériences éloignées de plus de 20 toises les unes des autres, sous des cloches, pour éviter les mélanges; les graines provenues de ces mercuriales, ne m'ont encore donné que des mercuriales communes.

Ces trois expériences ainsi variées & continuées pendant quatre ans sur plusieurs générations, sont suffisantes pour prouver que le petit nombre de graines fertiles qu'ont produit ces mercuriales femelles, avoient été fécondées par les poussières des mercuriales mâles des jardins voisins, transportées par le vent; elles infirment donc le sentiment de M. Linnæus sur le prétendu changement opéré dans les espèces par la fécondation étrangère, ou elles prouvent au moins qu'elle n'a pas lieu quand les plantes sont de familles différentes. Il sera facile de s'assurer par quelle voie mes pieds de mercuriale femelle, privés de l'approche de tout mâle analogue à leur espèce, ont produit un dixième de graines fertiles, en élevant de leurs jeunes pieds dans une chambre éloignée des jardins, au milieu d'une grande ville, & sous des cloches bien closes: si parmi les graines qui en proviendront il ne s'en trouve aucune de féconde, en supposant que ces Plantes n'aient point souffert de la jaunisse, mais qu'elles aient crû avec assez de vigueur; alors la mercuriale sera dans le cas de certains palmiers femelles

qui, comme le seul pied qui soit depuis plus de quarante ans sur l'île Saint-Louis du Sénégal, n'a jamais porté un seul de ses fruits à parfaite maturité, étant sévré de la poussière des mâles de son espèce, dont les plus proches se trouvent à dix ou onze lieues de distance, quoiqu'on trouve d'ailleurs des Palmiers-dattiers de diverses espèces, dont les jardins & les campagnes voisines sont parsemés; je parle ici de cet arbre que les Nègres Oualofes appellent *ronn*, les François *rondier*, les Indiens des îles Moluques *lontar*, ceux du Malabar *ampana* & *carimpana*, & qu'il a plu à M. Linnæus de nommer *borassus*, nom ancien par lequel les Grecs, selon Théophraste, désignèrent le régime des fleurs du Palmier; & il ne seroit pas étonnant qu'il fût un jour fécondé, au moins par intervalles, parce que les mâles de son espèce étant très-communs le long des rives du Niger, les poussières de leurs étamines pourroient y être apportées dans des temps favorables, soit sur les bois flottans & déracinés par le courant de ce fleuve, soit par les barques qui en descendent journellement & qui font cette route en moins d'une journée. Si les Mercuriales en question, quoique sévrées de la poussière des mâles fécondans par toutes les précautions susdites, venoient cependant à produire quelques graines fécondes ou même un dixième sur le total, comme il m'est arrivé dans l'expérience précédente; alors cette Plante sera dans le rang de tant d'autres qui font exception à la règle générale de la fécondation, & qui n'ont pas besoin du secours des étamines, telles que sont les Plantes des familles des byssus, des champignons, des fucus qui sont si nombreuses en espèces, & dont la plupart n'ont que des graines, sans aucune apparence d'étamines. Je suppose toujours ici qu'il ne se soit point montré sur les pieds femelles de la mercuriale quelques fleurs mâles, comme M. de Jussieu dit en avoir observé quelquefois, chose que je puis assurer qui n'est point arrivée dans aucune de mes expériences, chose qui est si facile à voir, qu'on ne pourroit manquer de s'en apercevoir, même en prêtant beaucoup moins d'attention que je n'en ai mise dans celles en question, chose enfin qui est si rare, qu'elle n'a encore été aperçue que par M. de Jussieu, qu'elle n'est citée dans aucun Auteur, que je sache, & qu'elle a échappée jusqu'ici à

toutes les recherches que je fais pour me procurer toutes sortes de monstruosités de ce genre, dont j'ai actuellement la suite la plus nombreuse qui fait partie de mon herbier. Au surplus, la configuration défectueuse des feuilles de la mercuriale déchiquetée, le vice dans l'organisation de leurs vaisseaux & de leurs nervures, celui de ses étamines vides de poussière séminale, & par-là stériles, la longue durée, tout cela annonce une monstruosité par défaut, & on ne peut guère douter que les deux mercuriales qui se sont montrées d'abord à M. Marchant en 1715, au nombre de sept individus seulement, & qui ont ensuite été suivies d'un plus grand nombre en 1716, dans un espace de 7 à 8 pieds de terrain, & dans lesquels il ne put apercevoir aucunes graines, ne fussent des individus monstrueux & viciés, comme celui du Jardin royal, que j'ai élevé & sur lequel j'ai fait mes expériences; ces mercuriales sont donc, non pas de nouvelles espèces, mais des mulets viciés dans leurs tiges, dans leurs feuilles & dans leurs fleurs, mais sur-tout dans les parties de la génération, comme le mulet parmi les animaux, n'est en apparence vicié que dans ces seules parties.

IV.<sup>e</sup> & V.<sup>e</sup>  
EXPÉRIENCE.

La Pelore que M. Linnæus avoit annoncée comme se reproduisant de graines, & comme conservant avec constance la régularité de ses fleurs, ne s'est point montrée telle, ni dans les pieds qu'il a envoyés ici de la Linaire vivace, *linaria vulgaris*, ni dans la Linaire annuelle rouillée d'Espagne, devenue de même *pelora*, au Jardin royal, comme je l'ai dit ci-dessus; il se trouve dans toutes deux, tantôt quelques fleurs pelores ou régulières, mêlées avec les fleurs naturelles à la linaire, sur le même pied; tantôt tous les pieds sont à fleurs irrégulières, c'est-à-dire naturelles; tantôt ils sont à fleurs régulières ou pelores: dans tous ces cas les fleurs pelores sont toutes stériles, il n'y a que les fleurs naturelles qui donnent des graines d'où naissent souvent parmi, des pieds de Linaire naturelle, d'autres pieds de Linaire pelore. Or ces Plantes pelores péchant par un vice de conformation dans leurs fleurs pelores, ne peuvent être regardées que comme des demi-mulets stériles en partie, & par conséquent comme des monstres par excès dans leur corolle & par défaut dans les organes de la génération.

génération, parce que, quoique les pelores vivaces se reproduisent aussi de bourgeons, la multiplication par graines est la voie la plus naturelle à ce genre de plante.

Voilà les faits les plus authentiques sur lesquels M. Linnæus a cru pouvoir établir la transmutation des espèces dans les Plantes; car pour les autres exemples cités, tant par M. Gmelin que par M. Linnæus, sur les plantes qu'il appelle *hybrides*, c'est-à-dire bâtardes, ils ne sont pas allégués comme des changemens opérés sous leurs yeux, en semant ces plantes avec les précautions que nous avons employées, & que nous jugeons nécessaires, mais seulement comme des conjectures fondées sur les faits des deux Mercuriales & de la Pelore, supposés bien appréciés; & l'exposé sur l'espèce mulâtre, née en 1748, des deux Verveines d'Amérique, n'est ni assez clair, ni assez détaillé, ni assez précis pour qu'on puisse sagement en rien inférer.

Passons actuellement à l'examen de deux faits plus récents, encore inconnus à M. Linnæus, & sur lesquels les partisans de son opinion pourroient se croire fondés à admettre la transmutation des espèces. Faits plus récents.

Le premier de ces faits regarde le fraisier commun, qui semé de graines, a donné, en 1763, un fraisier dont les feuilles sont la plupart simples, ou, pour parler plus exactement, à un seul lobe au lieu de trois lobes qu'ont les fraisiers ordinaires; ce fraisier à une feuille, multiplié de ses graines, donne des pieds à une feuille, des pieds à trois feuilles, & d'autres pieds qui ont de ces deux sortes de feuilles mêlées ensemble; les fouets ou bourgeons donnent aussi des pieds qui conservent pour l'ordinaire les particularités de ceux dont ils sont sortis. Cette conformation frappante de feuilles, a porté à conclure de faits variables comme on conclut de faits constants, on a cru que ce nouveau fraisier devoit résoudre la question tant agitée sur les espèces, & que ce changement se perpétuant dans la postérité, devoit prendre le nom de *race*; après cette conclusion, on a cru être en droit de changer les notions reçues parmi les Botanistes, en appelant du nom de races tout ce qui a été reconnu jusqu'ici pour être espèce dans les fraisiers, & en supposant que l'un d'eux a donné naissance à tous Le fraisier à une feuille.

Mém. 1769.

F

## 42 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

les autres qui n'en feroient pas des espèces, mais des races dégénérées; enfin de conclusions en conclusions, après avoir réduit tous les fraisiers à une seule espèce, on a été conduit à métamorphoser quatre genres de la famille du fraisier en autant d'espèces de fraisier. Mais non-seulement ce fraisier à un seul lobe aux feuilles, ne fait pas une race, c'est-à-dire une espèce, selon les Botanistes, puisqu'il n'est pas constant & qu'il varie dans la multiplication (au moins dans la multiplication par graines), mais même il ne fait pas ce que nous appelons *variété*: en examinant plus attentivement la structure de ses feuilles, on eut aperçu un vice de conformation dans les nervures, qui y occasionne une crispation, on eut vu que cette feuille ayant plus de surface que chacun des trois lobes du fraisier ordinaire, & moins que ces trois lobes ensemble, étoit un composé de ces trois lobes réunis; enfin une anastomofation ou bifurcation extraordinaire qui arrive à une ou deux de ses nervures, l'eut fait reconnoître pour une pure monstruosité par défaut: je communiquerai un jour à l'Académie les figures de ces plantes. En portant la même attention sur la fleur, on eut eu de nouvelles preuves de la monstruosité de cette plante, en remarquant que son calice & la corolle ont plus de parties que dans le fraisier commun, & que ses étamines, au contraire, en ont moins à proportion, & qu'elles sont monstrueuses ainsi que le fruit, qui est toujours cannelé ou rabougri & mal conformé. Ce fraisier est donc tout simplement un monstre dans toutes ses parties; monstre par excès dans le calice & la corolle; monstre par défaut dans les feuilles, les étamines & le fruit: or une monstruosité n'a jamais fait changer de nom à une espèce, elle n'en a jamais ébranlé l'immutabilité; tous les Botanistes consommés & conséquens, ont toujours su ranger ces monstruosités parmi les choses accidentelles, qui, quand elles se propageroient à un certain point par le moyen des bourgeons ou de la greffe, tendent toujours à rentrer dans l'ordre & dans la régularité de leur espèce primitive lorsqu'on les multiplie par la voie des graines, qui, de toutes celles de la multiplication est la plus naturelle & la plus constante pour déterminer les espèces. Je ne parle pas ici des autres inductions qu'on a voulu tirer de ce fait, inductions

tendantes à faire reconnoître la transmutation des espèces sous le nom de races: on sent assez quelle différence il y a entre une espèce & une monstruosité; une espèce est comparable à une autre espèce, mais un monstre ne peut être comparé qu'à un individu de l'espèce dont il est originaire. Cette réunion des trois lobes des feuilles de ce fraiser monstrueux, peut être absolument comparée aux monstres du cochon, qui ont les deux doigts ou fourchettes de la plupart de leurs pieds ou même de tous les pieds réunis en un seul, à peu près comme ils le sont dans le pied de l'âne ou du cheval, qui les ont recouverts d'un sabot ou d'un ongle qui leur est commun.

Le dernier fait que j'ai à citer, m'appartient, il regarde un changement que j'ai commencé à obtenir dans les expériences que je tente depuis l'année 1762 pour forcer la transmutation dans les espèces; ce changement regarde l'espèce d'orge qui quitte sa balle, que les Grecs nommoient pour cette raison, *gymnocrithon*, & qui est cultivé de temps immémorial, dans diverses provinces de la France, sous le nom de *sucrion* ou d'*orge nu*, *orge fromenté*; cet orge a, comme l'on sait, l'épi en queue d'hirondelle, c'est-à-dire formé de deux rangs de grains, & l'on n'en a point encore vu à quatre rangs, comme le scourgeon ou l'orge carré, quoiqu'on m'en ait envoyé sous ce nom, erreur que j'ai reconnue par ma propre expérience: en semant depuis sept ans tous les mois, ce grain, qui est le plus hâtif de tous ceux qui se cultivent dans ce pays, en le semant, dis-je, au milieu de trois cents cinquante autres espèces ou variétés de froment de tous les climats, j'aperçus dans les deux générations de la première année, un léger changement dans le haut de son épi, qui commençoit à devenir carré; je recueillis & semai avec précaution les grains de ce bout d'épi carré, & j'eus la satisfaction de recueillir ensuite plusieurs autres épis semblables; en continuant ainsi cette expérience, je suis parvenu à avoir des épis carrés en plus grand nombre, environ un sur cent épis simples, & qui sont devenus carrés de plus en plus, pendant cinq à six ans ou pendant dix à douze générations successives, & qui ensuite ont perdu presque tout-à-coup cette propriété pour rentrer dans leur espèce originaire. A voir

L'orge sucrion  
devenu carré.

#### 44 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

cette Plante, elle ne paroît nullement viciée, mais en l'examinant de près on s'aperçoit que quelques-unes de ses fleurs ont ou une bale à deux arêtes, ou deux bales, chacune avec leur arête, ou trois bales à arêtes, ou deux fleurs dans le même calice, ou deux ovaires dans une même corolle, ou enfin deux ovaires ou deux grains réunis ensemble, de manière qu'il y a deux germes pour chaque grain ou masse farineuse (on peut voir ces détails dans le Mémoire que je lus à l'Académie en 1765). Que de monstruosités! on n'en a peut-être jamais tant vu de rassemblées sur une même plante, & elles sont toutes, comme l'on voit, par excès.

*Le Froment  
de miracle,*

La Plante qui en apparence méritoit le plus le nom d'espèce nouvelle, & qui cependant n'est point citée par les auteurs de l'opinion de la transmutation des espèces, c'est sans doute le froment appelé *Blé de Miracle* ou *Blé de Smirne*, que M. Vaillant paroît citer comme une espèce, & dont M. Linnæus ne fait pas la moindre mention dans son *Species plantarum*; mais cette plante n'est encore qu'une monstruosité par excès, & quoique plus constante dans la multiplication que toutes celles qu'on a observées jusqu'ici, des expériences bien suivies m'ont appris qu'au milieu de ses épis rameux, on en voit environ un ou deux sur cinquante qui sont simples ou bien régulièrement conformés, & que, quand on le sème trop tard ou au printemps, ou dans une terre trop maigre ou trop sèche, il n'a presque pas d'épis rameux, & rentre ainsi dans l'espèce dont il est originaire: les mêmes expériences me l'ont fait reconnoître pour être le froment que l'on appelle *Grosset*, & qu'on cultive dans nos provinces méridionales.

Tels sont les faits les plus remarquables sur lesquels on s'est appuyé, ou qui se sont montrés jusqu'ici les plus favorables à l'opinion de la transmutation des espèces, & nous convenons que nous aurions resté long-temps dans cette opinion, si nous n'avions eu lieu de vérifier par nous-mêmes, & d'apprécier ces faits avec toutes les précautions & la méfiance même nécessaires.

Il n'est pas douteux qu'en variant les expériences de fécondations, on aura des variations, des monstruosités dans les individus, mais non pas des changemens réels d'espèces; & ces exemples

de variations opérées par des fécondations étrangères, se multiplieront à mesure qu'on sera plus attentif à les observer, ou qu'on voudra se les procurer en fécondant une plante femelle par une mâle d'espèce différente, par exemple, le chanvre par le houblon, l'ortie par le mûrier, le saule par le peuplier, le ricin par le titimale, pour savoir ce qui proviendrait de ces mélanges. Mais il est bon de prévenir que ces changemens ne réussissent guère qu'entre les individus de même espèce, ou entre deux espèces très-voisines, telles que le chou & le navet. L'observation & l'expérience peuvent seules nous instruire là-dessus; & nous ne cessons de répéter & de varier nos expériences sur ce sujet important, soit pour confirmer, soit pour infirmer les faits qui ont paru douteux. Il n'est personne qui ne sache qu'en coupant toutes les étamines d'une tulipe rouge avant l'émission de leur poussière, & qu'en poudrant le stigmate de cette même plante avec les étamines d'une autre tulipe blanche, les graines de cette tulipe rouge produisent des tulipes, dont les unes sont rouges, les autres blanches, d'autres blanches & rouges, de même que deux animaux de même espèce transmettent leurs couleurs différentes aux animaux qu'ils engendrent. Il y a encore bien des expériences à faire pour constater ce qui est variété ou espèce dans nombre de fleurs; nous nous sommes occupés jusqu'ici, & nous nous occupons encore plus particulièrement des plantes utiles, telles que les blés, les légumes & les plantes potagères; & quoique Morison ait annoncé que toutes les espèces & variétés de choux étant semées, dégénèrent les unes dans les autres, & passent successivement par divers états, nous nous sommes assurés que le chou-fleur que nous semons depuis plusieurs années, de graines que nous recueillons avec soin, en évitant les mélanges, ne devient pas chou-pomme, & que le chou-pomme ne devient pas chou-fleur, quoique l'un & l'autre soient sujets à dégénérer: ce sont certainement des espèces bien distinctes par la figure de leurs feuilles, par le temps & la manière de fleurir. Le chou-pomme est beaucoup plus sujet à changer & à donner des variétés plus ou moins frisées, plus ou moins aplaties ou alongées, plus ou moins vertes ou rouges. Le chou-vert fait pareillement une



#### 46 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

troisième espèce à feuilles longues & pointues du chou-fleur ; mais découpées. Enfin le chou-frisé fait une quatrième espèce à feuilles longues , mais très-arrondies au bout : il ne donne jamais que du chou découpé , mais il varie beaucoup , & dans les découpures plus ou moins frisées de ses feuilles , & dans les couleurs qui en font une plante d'ornement.

Il n'est pas aussi facile d'opérer de pareils changemens dans les arbres , ou de s'assurer si tant de fruitiers , par exemple , qu'on ne multiplie de tout temps que par la greffe , sont des espèces différentes , ou si ce ne sont que des variétés , comme M. Linnaeus le pense à l'égard du pommier & du poirier. M. du Hamel est le seul , que je sache , qui ait commencé des expériences (*Voy. Mémoires de l'Acad. année 1737*) pour s'assurer si les pepins de la pomme d'api , par exemple , étant semés , donnent constamment des apis , ou s'ils donnent indifféremment des pommiers de reinette , d'api , de fenouillet , &c. Mais la longueur du temps qu'il faut attendre pour voir le succès de ces tentatives , & l'assiduité qu'elles exigent , ont empêché de pouvoir rien décider sur ce sujet , & depuis lui , personne n'a entrepris de suivre ces expériences qui seroient très-instructives : en attendant , je crois qu'on peut soupçonner avec assez de fondement que les pepins de l'api ne donneront que des apis ou des variétés d'api , plus ou moins doux , plus ou moins savoureux , & non pas des reinettes ou des fenouillets , ou des calvilles , &c. & que ces sortes de pommiers ou poiriers qu'on ne multiplie guère que par la greffe , sont de vraies espèces , qui ne sont point un ouvrage de l'art , mais qui ont subsisté de tous les temps , comme cela paroît indiqué par les différences si notables & si multipliées qu'on remarque , non-seulement dans le fruit de ces arbres , mais encore dans leur bois , dans leur écorce , dans leurs boutons & bourgeons , dans leurs feuilles , dans leurs fleurs , dans le temps de leur feuillaison , fleuraison & maturité , enfin dans leur tempérament ou température , & dans toutes leurs parties.

Mais indépendamment des variations qu'on peut opérer artificiellement par la fécondation des deux individus différens , quoique de même espèce , la Nature nous indique d'autres moyens plus sûrs

& plus prompts d'opérer ces mutations dans les plantes qui se reproduisent de graines, soit par la culture, soit par le terrain, le climat, la sécheresse, l'humidité, l'ombre, le soleil, le chaud, le froid, &c. Ces changemens sont plus ou moins prompts, plus ou moins durables, disparaissent à chaque génération, ou se perpétuent pendant plusieurs générations, selon le nombre, la force, la durée des causes qui se réunissent pour les former, & selon la nature, la disposition & les mœurs, pour ainsi dire, de chaque plante: car il est de remarque que telle famille de plantes ne varie que par les racines, telle autre par les feuilles; d'autres par la grandeur, le velouté, la couleur, pendant que d'autres changeront plus facilement par leurs fleurs & leurs fruits.

On pourroit en citer nombre d'exemples que nous supprimons pour abréger; on fait jusqu'où peuvent aller ces changemens par la culture seule & par le choix des grains dans les plantes potagères & les fromens: telles plantes transportées dans les jardins ou d'un climat à l'autre, sont si différentes des sylvestres, que le Botaniste le plus exercé a peine à les reconnoître; c'est ainsi que le tabac, le ricin, & beaucoup d'autres qui forment des arbrisseaux vivaces en Afrique, ne sont qu'herbacés & annuels en Europe. Je dois cependant prévenir ici que je suis parvenu avec un peu de soin à faire passer l'hiver de 1768 à 1769 à cinq plantes de tabac que j'avois semé sur couches de mes vieilles graines du Sénégal; que ces pieds, après avoir passé deux étés & un hiver sur terre, promettent cette année 1770 de reproduire encore de nouvelles tiges sur l'ancienne souche, & d'être vivaces comme elles le sont dans leur pays natal.

Il paroît donc suffisamment prouvé par les faits, que l'art, la culture, & encore plus le hasard, c'est-à-dire, certaines circonstances inconnues, font naître tous les jours, non-seulement des variétés, soit dans les plantes communes, soit dans les fleurs curieuses, telles que les tulipes, les anémones, les renoncules, &c, mais encore des monstruosités qui ne méritent pas de changer les espèces.

Il suit donc de l'exposé ci-dessus, 1.<sup>o</sup> que tous les exemples cités jusqu'ici comme des changemens d'espèces, ou comme des

#### 48. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE.

formations de nouvelles races constantes, ne sont que des variétés ou des monstruosités qui ne se perpétuent pas constamment telles par la voie des graines ; 2.<sup>o</sup> que l'examen de ces sortes de changemens exige la plus grande attention & les connoissances les plus profondes pour être apprécié à sa juste valeur, & pour faire éviter les inconséquences, sources de tant d'opinions & d'erreurs ; car un fait mal apprécié, mal jugé, & le même fait mal vu, conduisent également à des conséquences fausses, puisque la Linnaire-pelore aperçue & nommée *monstrueuse* par M. Linnæus, l'a conduit à admettre la transmutation des espèces, comme le fraiser monstrueux à une feuille, apprécié comme une production régulière & constante, a conduit son Observateur à embrasser la même opinion sous un terme différent.

En conséquence, si la recherche de la vérité nous a exposés à admettre le changement des espèces, fondés, non pas sur la seule opinion d'un Savant distingué, mais sur des faits qu'il a cru vrais & constants dans les apparences ; si nous avons été trompés par le rapport d'autrui, l'esprit de vérité qui nous a guidé, après avoir vu par nous-mêmes & apprécié ces faits, doit nous faire tirer des conclusions directement opposées ; & nous porter à dire que *la transmutation des espèces n'a pas lieu dans les plantes, non plus que dans les animaux, & qu'on n'en a pas de preuve directe, même dans les minéraux, en suivant le principe reçu, que la constance est essentielle pour déterminer une espèce.*

À voir l'harmonie qui règne dans toutes les parties de l'Univers ; tout Philosophe raisonnable est d'abord porté à croire que ces écarts ont aussi leurs loix & leurs bornes : en effet, plus on observe, plus on se convainc que ces monstruosités & variations ont une certaine latitude, nécessaire sans doute pour l'équilibre des choses, après quoi elles rentrent dans l'ordre harmonique préétabli par la sagesse du Créateur.



MÉMOIRE

# M É M O I R E

## SUR LA COMÈTE DE 1769.

Par M. DE LA LANDE.

LA Comète observée en 1769, est la cinquante-sixième de notre Catalogue; elle fut aperçue pour la première fois par M. Messier, à l'Observatoire de la Marine, le 8 Août; peu de jours après elle fut assez lumineuse pour être aperçue dans toute l'Europe. M. Matheucci à Bologne, l'aperçut par hasard le 26 Août; M. le Gentil l'a observée à Pondichéri au commencement de Septembre, je l'observai moi-même à Bourg-en-Bresse, & j'y reçus des observations qu'avoit faites M. Messier, à Paris; depuis ce temps j'ai reçu celles que firent M. Darquier, à Toulouse; M.<sup>u</sup> de Saint-Jacques & Poitevin, à Marseille; le P. Audiffredi, Bibliothécaire de la Minerve, à Rome; le P. de la Grange, à Milan; M. Zanotti, à Bologne, le P. Mayer, à Pétersbourg; M. Liuntberg, à Gottingen; M. Tofigno, Commandant des Gardes-marine, à Cadix.

Novembre  
& Décembre  
1769.

Le 3 Septembre à  $14^h 14' 54''$  de temps vrai à Rome, suivant le P. Audiffredi, la Comète précédoit  $\gamma$  d'Orion en ascension droite de  $0^d 59' 50''$ , & la Comète étoit plus boréale que l'étoile de  $0^d 15' 10''$ .

Le 4 Septembre à  $16^h 9' 34''$ , la Comète suivoit A d'Orion de  $1^d 59' 31''$ , elle étoit au midi de l'étoile de  $0^d 26' 23''$ .

Le 8 Septembre à  $16^h 7' 19''$ , la Comète suivoit l'étoile  $\delta$  d'Orion de  $17^d 51' 25''$ , la Comète étoit plus méridionale que l'étoile de  $0^d 27' 19''$ .

M. Liuntberg ayant observé la conjonction de cette Comète avec  $\gamma$  d'Orion, à l'Observatoire royal de Gottingen, m'a envoyé le résultat de ses calculs: le 3 Septembre à  $19^h 47' 1''$ , temps vrai, la longitude étoit  $2^f 17^d 44' 11''$ , & la latitude australe  $16^d 56' 44''$ , cette observation a été faite avec le plus grand soin.

*Mém. 1769.*

G

# 30 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Voici encore quelques observations choisies de M. Messier; que j'ai employées pour calculer les élémens de cette Comète; je ne les rapporte pas toutes, parce que M. Messier les a réservées pour les Mémoires de l'Académie de Berlin, dans laquelle le Roi de Prusse lui a donné une place à l'occasion de ces mêmes observations.

DATE des Observat.	TEMPS MOYEN.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS.	LONGITUDE.	LATITUDE.	LIEU du SOLEIL.	LOGARIT. de la dist. u SOLEIL.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.	
8 Août	11. 5. 7	33. 44. 00	11. 59. 00 B.	1. 5. 32. 00	1. 29. 00 A.	4. 16. 30. 14	0,005699
14. ....	12. 34. 12	38. 35. 2	11. 49. 32 B.	1. 9. 58. 47	3. 9. 36 A.	4. 22. 20. 40	0,005199
21. ....	13. 4. 55	46. 15. 25	11. 16. 48 B.	1. 17. 1. 30	5. 53. 49	4. 29. 6. 25	0,004575
28. ....	15. 59. 48	59. 9. 26	9. 35. 25 B.	1. 29. 2. 50	10. 37. 19	5. 5. 59. 30	0,003882
3 Sept.	13. 35. 47	77. 15. 20	6. 13. 18 B.	2. 16. 46. 0	16. 39. 48	5. 11. 42. 52	0,003242
9. ....	16. 14. 58	106. 12. 4	0. 22. 27 A.	3. 11. 32. 0	22. 6. 55	5. 16. 40. 59	0,002646
15. ....	16. 41. 40	135. 56. 26	6. 58. 38 A.	4. 20. 39. 17	22. 43. 34	5. 23. 31. 27	0,001809
24 Oct.	6. 4. 42	232. 28. 14	1. 7. 54 A.	7. 20. 21. 35	17. 19. 0 B.	7. 1. 37. 13	9,997086
27. ....	6. 0. 0	237. 43. 22	0. 57. 13 A.	7. 25. 40. 37	18. 44. 52 B.	7. 4. 37. 24	9,996743
4 Nov.	5. 39. 1	249. 32. 27	0. 14. 6 A.	8. 7. 58. 40	21. 13. 57 B.	7. 12. 37. 55	9,995849
20. ....	5. 43. 44	266. 49. 41	0. 13. 35 A.	8. 26. 32. 55	23. 12. 24 B.	7. 28. 45. 47	9,994362
27. ....	6. 22. 42	272. 34. 59	0. 1. 45 A.	9. 2. 48. 55	23. 24. 53 B.	8. 5. 52. 58	9,993830
28. ....	5. 37. 54	273. 19. 29	0. 1. 10 B.	9. 3. 37. 27	23. 26. 48 B.	8. 6. 51. 57	9,993754
1 Déc.	5. 38. 22	275. 30. 4	0. 7. 22 B.	9. 5. 59. 58	23. 28. 38 B.	8. 9. 54. 42	9,993555

J'ajouterai que suivant l'observation de M. Maraldi, faite le 1.<sup>er</sup> Décembre, qui fut pour nous le dernier jour de son apparition, la Comète à 5<sup>h</sup> 59' 53" de temps vrai, avoit 275<sup>d</sup> 30' 13" d'ascension droite, & 9' 59" de déclinaison boréale.

Dans la première observation je n'ai point mis de secondes, à cause de l'incertitude dont cette observation est susceptible: les observations du 14 Août, du 3 & du 15 Septembre, sont du nombre de celles que M. Messier a marquées comme étant les plus exactes.

J'avois choisi d'abord les observations du 14 Août & du 8 Septembre, pour trouver différentes paraboles qui satisfissent à ces deux observations; & celle du 28 Août m'a servi pour

trouver entre ces différentes hypothèses, celle qui étoit la véritable.

Soient  $A, B, C$ , les lieux de la Terre; les 14 & 28 Août, Figure 1. & le 8 Septembre; je supposois alors les élongations observées  $3^{\circ} 12' 22'' 24''$ ;  $3^{\circ} 6' 56' 40''$ ;  $2^{\circ} 5' 8' 36''$ ; les logarithmes des distances du Soleil à la Terre 0,005199; 0,003882; 0,002645.

Les lignes  $AG, BH, CK$ , tirées suivant les élongations observées, il s'agit de trouver les longueurs de ces lignes, c'est-à-dire, les points  $G, H$  &  $K$ ; il faut pour cela avoir recours aux règles de fausses positions, dont j'ai donné le détail & les préceptes en 1759 à la suite de la Cométographie de Halley, & en 1764 dans mon Astronomie. Je suppose que la distance  $SG$  de la Comète au Soleil, réduite au plan de l'écliptique, soit de 1,3; celle du Soleil à la Terre étant prise pour unité: dans cette première hypothèse, je suis obligé de supposer pour l'autre distance  $SK$ , diverses valeurs, jusqu'à ce que j'en aie trouvé une qui soit telle, que les deux distances  $SG, SK$ , appartiennent à une parabole dans laquelle l'intervalle  $GK$ , réduit en jours, soit de  $25^j 153$ .

Je trouve qu'en supposant la distance  $SK$ , de 0,913, l'intervalle est à peu près tel, le mouvement héliocentrique de la Comète étant de  $2^{\circ} 1' 36''$ , le lieu du périhélie de  $2^{\circ} 15'$ , le lieu du nœud descendant de  $11^{\circ} 16'$ , l'inclinaison  $24^{\circ}$ , & le passage par le périhélie le 10 Octobre; mais ayant calculé dans cette hypothèse l'observation intermédiaire du 28 Août, je trouvais une longitude trop grande de  $10^d \frac{3}{4}$ .

En supposant la première distance de 1,2, je trouve qu'il faudroit supposer la seconde 0,913 pour avoir l'intervalle de  $25^j 15$ , tel qu'il est par observation; mais dans cette hypothèse on trouve pour le 28 Août une longitude trop grande de  $12^d \frac{1}{8}$ .

Cette Comète est du nombre de celles où il ne suffit pas d'avoir égard aux distances, si l'on ne fait pas attention à la nature de l'angle à la Comète ou de la parallaxe annuelle, cet angle est aigu dans la première Observation, & obtus dans la seconde, en sorte que pour former mes différentes hypothèses,

Au mois de Septembre, cette Comète paroïssoit à la vue, aussi je préférois de prendre la distance  $AG$  avec le mouvement héliocentrique  $GK$ , réduit à l'écliptique. Je trouvai pour troisième hypothèse que la distance 1,45, avec un mouvement de  $8^d 7'$ , satisfaisoit à l'intervalle des deux Observations, mais que la longitude pour le 28 Août étoit trop grande de  $1^d 8'$ .

Pour quatrième hypothèse, je trouvai que la distance 1,48 avec un mouvement de  $3^d 24'$ , donnoit pour le 28 Août deux degrés de moins que l'Observation.

Cinquième hypothèse, la distance  $SG$  étant supposée de 1,461, & le mouvement du Soleil dans l'intervalle des deux Observations  $6^d 34' 59''$ , je trouve en mettant plus de précision dans le calcul, que l'intervalle de temps est 251 157 au lieu de 251 153 qu'il y avoit suivant l'Observation; la différence est trop peu sensible pour s'y arrêter. Dans cette hypothèse, le passage de la Comète par son périhélie, arrive le 7 Octobre à  $8^h 50'$ , temps moyen au méridien de Paris; le lieu du périhélie est à  $4^f 25^d 24' 34''$ , le lieu du nœud ascendant à  $5^f 25^d 9' 51''$ , l'inclinaison de  $41^d 0' 21''$ , & la distance périhélie 0,11586; ces premiers élémens ne renferment qu'un espace de vingt-cinq jours d'Observation, ainsi l'on ne peut en attendre une extrême précision: cependant l'observation du 28 Août, calculée dans cette hypothèse, donne  $1^f 29^d 3' 14''$  de longitude, c'est-à-dire seulement 24 secondes de plus que par l'Observation; cette erreur est assez petite pour que ces élémens puissent représenter à peu près toutes les Observations des deux premiers mois, & l'Observation du 15 Septembre, quoiqu'éloignée de 33 degrés de celle du 9 Septembre, n'a différé de mon calcul que de quelques minutes.

Les élémens de cette orbite font voir que la Comète de 1769, ne ressemble à aucune des cinquante-cinq Comètes qui ont été calculées jusqu'ici; celle-ci est la cinquante-sixième, en ne comptant que pour une, toutes les apparitions de chacune des trois Comètes; dont les périodes sont connues, c'est-à-dire; premièrement, les Comètes de 1531, 1607, 1682 & 1759; secondement, celles de 1532 & de 1661; troisièmement, celles de 1264 & de 1566. Lorsque la Comète de 1769 fut

Premiers  
élémens de  
l'orbite.

observée pour la première fois le 8 Août, elle étoit éloignée de la Terre de 1,03, c'est-à-dire, plus que le Soleil d'un trente-troisième ou d'un million de lieues, & éloignée du Soleil de 1,578.

Le 9 Septembre elle étoit le plus près de la Terre, la distance étoit seulement de 0,32 ou presque le tiers de celle du Soleil; mais elle auroit été trois fois plus près de nous, ou neuf fois plus près que le Soleil, si elle eût passé en *K* vingt-deux jours plus tard, c'est-à-dire, le 29 Septembre, au lieu d'y passer le 7; elle ne sauroit s'approcher davantage de la Terre dans aucun cas, mais si elle eût été aussi près elle n'auroit été visible que pour les pays méridionaux de la Terre, parce que la partie *PKHG* de son orbite, étant toute au midi de l'écliptique, la Comète auroit paru répondre au pôle austral de l'écliptique dans le moment où elle auroit passé en *K*, perpendiculairement au-dessous de la Terre.

De-là il suit que cette Comète n'est point de celles qui, par leur proximité à la Terre, pourroient y produire des révolutions ou des phénomènes sensibles, si toutefois il y en a qui soient dans ce cas-là. Pour qu'une Comète pût rencontrer la Terre, ou nuire à ses habitans, il faudroit qu'un des points *N* & *O*, dans lesquels la circonférence coupe le plan de l'écliptique, se rencontrât précisément sur la circonférence de l'orbite terrestre, & que la Comète & la Terre passassent ensemble au même point d'intersection; cet assemblage de circonstances est trop singulier pour que l'on doive s'en alarmer.

J'avois cru que, lorsque la Comète repasseroit à pareille distance de l'autre côté du périhélie au point *D*, le 6 Novembre, la Terre étant en *T* seroit trop éloignée de la Comète pour qu'on pût espérer de la voir: cette Comète sembloit être de nature à n'être sensible pour nous, que quand elle est à peu près à une distance égale à celle du Soleil, à en juger par la manière dont elle paroissoit le 8 Août, lorsqu'elle fut vue pour la première fois; cependant elle a reparu d'une manière très-sensible, comme nous allons le rapporter.



grande qu'une étoile de la 1.<sup>re</sup> grandeur; dans un télescope, son diamètre en comprenant l'atmosphère, n'a été pour l'ordinaire que d'environ  $1' \frac{1}{2}$ : cependant le 1.<sup>er</sup> Septembre, elle a paru un peu plus grande au P. de la Grange à Milan. Sa queue avoit près de 40 degrés de longueur le 14 Septembre, lorsque M. Poitevin l'observa à Marseille, la Comète étoit alors à 27 degrés & demi de *Sirius*, & à 17 degrés de Procyon, & la queue s'étendoit jusqu'à la ceinture d'Orion; M. Zanotti trouva même le 5 & le 12 Septembre, à Bologne, que cette queue s'étendoit jusqu'à 70 degrés de distance. Celles de 1618. & de 1680, sont les seules qui l'aient égalé; le corps de cette Comète vu dans un télescope, paroissoit très-petit: c'étoit un point blanc & brillant, noyé dans un vaste brouillard.

M. Pingré étant sur mer entre Ténériffe & Cadix, observa le 11 Septembre 1769, que cette queue avoit 90 degrés de longueur, mais elle étoit si foible que le lever de Vénus fut suffisant pour en faire disparoître plusieurs degrés.

La Comète ayant reparu après son périhélie, M. Messier l'observa le 24 Octobre; & le P. de la Grange à Milan le 25 à 7 heures du soir, à droite des Étoiles  $\epsilon$  &  $\delta$  d'*Ophiucus*, la queue étoit foible & à peine sensible, mais le noyau avoit une lumière plus vive qu'avant la conjonction; je reconnus que les élémens que j'avois déterminés par les observations faites au mois d'Août & jusqu'au 8 Septembre, ne représentoient qu'à un degré près les Observations faites dans la seconde branche de l'orbite, soit que cela vint de l'imperfection des Observations, relativement à la grande étendue du mouvement de  $6^{\circ} 28^d$  qu'il avoit fallu en conclure, soit que l'erreur fut celle de l'hypothèse parabolique, relativement au mouvement réel de la Comète: il a donc fallu calculer de nouveaux élémens en conséquence des nouvelles Observations; j'ai choisi les Observations du 14 Août, du 15 Septembre & du 4 Novembre: voici les lieux & les distances du Soleil que j'ai supposés.

14 Août..... 4<sup>r</sup> 22<sup>d</sup> 20' 40" 0,005199.

15 Septembre... 5. 23. 31. 27. 0,001809.

4 Novembre... 7. 12. 37. 55. 9,995849.

Les élémens que j'en ai tirés, différent des précédens, je les ai rapportés néanmoins, parce qu'ils pourront servir à connoître l'effet de l'ellipticité de cette orbite, car je ne doute pas que leur différence ne vienne principalement de l'erreur de l'hypothèse parabolique.

Lieu du Nœud..... 5<sup>r</sup> 25<sup>d</sup> 0' 43".

Inclinaison..... 40. 37. 33.

Lieu du périhélie..... 4. 24. 5. 54.

Distance du périhélie..... 0,12376.

Passage au périhélie le 7 Octobre 12<sup>h</sup> 30', temps moyen au méridien de Paris.

Dans l'observation du 3 Septembre, le calcul donne 7 secondes de plus que l'observation; pour celle du 27 Octobre, le calcul donne 25 secondes de moins, pour celle du 24 Octobre le calcul donne 14 secondes de plus: il est vrai que dans l'observation du 8 Septembre le calcul donne 1' 52" de plus, mais l'observation étoit marquée douteuse; d'ailleurs la difficulté de bien déterminer le centre du noyau de cette Comète, l'incertitude sur la position des petites étoiles auxquelles on étoit obligé de la comparer, fait qu'on ne peut pas espérer d'avoir des élémens qui représentent toutes ces observations à la minute; il y en a aussi quelques-unes qui paroissent suspectes, à en juger par celles qui précèdent & qui suivent, par exemple, celle du 28 Novembre.

Le P. Asclepi, Astronome du Collège Romain, a publié un Mémoire sur le calcul des Comètes, dans lequel il y a quatre déterminations différentes de cette orbite; mais voyant que les paraboles qui s'approchoient le plus des observations de Novembre, s'éloignoient de celles de Septembre, il m'en a envoyé une cinquième où il a eu pour objet de tenir le milieu entre les observations qui ont précédé le périhélie & celles qui l'ont suivi; pour que les erreurs fussent moindres que dans les autres paraboles, il y a réussi, mais les erreurs vont souvent à trois ou quatre

56 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

minutes, soit en longitude, soit en latitude dans cette cinquième détermination.

M. Wargentini qui avoit observé cette Comète à Stockholm jusqu'au 3 Décembre, m'a envoyé les élémens qui suivent.

Nœud.....  $5^{\circ} 25' 6'' 32''$ .  
 Inclinaison.....  $40. 48. 49.$   
 Périhélie.....  $4. 24. 11. 7.$   
 Distance périhélie.....  $0,1227225.$   
 Passage au périhélie le 7 Octobre  $1^h 58' 40''$ .

J'avois engagé M. Wallot à calculer encore cette orbite, en y employant l'observation du 1<sup>er</sup> Décembre, comparée avec celles du 14 Août & du 15 Septembre; mais ces deux Observations n'étoient pas tout-à-fait réduites de la même manière que dans la Table qui est au commencement de ce Mémoire, il a trouvé les élémens suivans.

Nœud.....  $5^{\circ} 25' 2' 25''$   
 Inclinaison.....  $40. 42. 38.$   
 Périhélie.....  $4. 24. 14. 22.$   
 Distance périhélie.....  $0,12298.$   
 Passage au périhélie le 7 Octobre  $12^h 26' 17''$ .

On voit par-là que plus les Observations qu'on emploie, s'éloignent du périhélie, plus les élémens qu'on en tire, sont différens des premiers; ce qui me persuade qu'en mettant un grand soin dans le calcul des Observations que nous avons, on pourroit prédire le retour de cette Comète par cette seule apparition: M. Euler l'a essayé, mais j'ignore encore le résultat de ses recherches; on y parviendroit aisément en déterminant le lieu & la distance du périhélie par les Observations qui en sont peu éloignées, & cherchant ensuite entre différentes ellipses décrites sur cette même distance, celle qui peut satisfaire à l'Observation la plus éloignée, j'ai reconnu par des calculs faits sur la Comète de 1759, qu'on auroit pu facilement calculer son retour à quatre à cinq ans près, par les seules Observations de 1759.

On

On a continué d'observer cette Comète, comme je l'ai dit, jusqu'au 1.<sup>er</sup> Décembre; M. Maraldi & M. Messier l'ont encore vue ce jour-là, après quoi le mauvais temps & ensuite son grand éloignement l'ont fait perdre de vue: elle étoit éloignée de nous le 1.<sup>er</sup> Décembre, de 2,18, ou deux fois & un sixième la distance du Soleil à la Terre; mes seconds élémens donnent pour ce jour-là une longitude plus petite de  $11^{\circ} 7'$  que l'Observation: cette différence me paroît venir de l'erreur de l'hypothèse parabolique; mais j'ai cru qu'il étoit inutile de chercher dans cette hypothèse des élémens qui fussent d'accord avec des Observations aussi éloignées du périhélie; c'est en supposant différentes ellipses, qu'il faudra tenter de trouver les véritables élémens, & peut-être même la révolution.

Suivant le calcul de M. Zanotti, supposant que la queue de la Comète étoit directement opposée au Soleil, & qu'elle paroîssoit de  $74^{\circ}$  le 12 de Septembre, la distance de la Comète à la Terre étant de 0,2639, on trouve que la longueur de la queue devoit être 0,3803, c'est-à-dire, plus de douze millions de lieues. Son Mémoire fut lû à l'Académie de Bologne le 23 Novembre, mais ses élémens diffèrent beaucoup de ceux que je viens d'établir; cependant il étoit très-facile de les trouver exactement d'après ceux que j'avois publiés dans la Gazette de France du 2 Octobre, & qui diffèrent peu de ceux que j'ai trouvés ensuite par les calculs d'une plus longue suite d'Observations.

On a lû dans quelques papiers publics, soit en France, soit en Angleterre, que M. Dunn, Astronome de Londres, avoit annoncé que cette Comète approchoit beaucoup de Vénus; j'ai voulu savoir jusqu'à quel point les circonférences de ces deux orbites pouvoient être rapprochées. Soit  $\gamma V$  (Fig. 2) l'écliptique;  $COX$  l'orbite de Vénus inclinée en  $C$  de  $40^{\circ} 38'$ , le noeud descendant étant à  $11^{\circ} 25^d 0' 43''$ ;  $V$ , le noeud ascendant de Vénus à  $2^{\circ} 14^d 35' 45''$ , c'est-à-dire,  $79^d 35'$  plus avancé, & l'angle  $V$  de  $3^d 23' 20''$ : ayant abaissé la perpendiculaire  $VX$ , pour résoudre le triangle  $CVO$ , j'ai trouvé  $CO$  de  $5^d 2'$ , en sorte que le noeud de l'orbite de la Comète sur celle de Vénus, est à  $0^{\circ} 0^d 3'$  de longitude; ainsi la Comète

dans ce nœud-là avoit  $4^{\text{f}} 24^{\text{d}} 3'$  d'anomalie, & dans le nœud opposé elle en avoit  $1^{\text{f}} 5^{\text{d}} 57'$ ; ainsi quand elle a traversé le plan de l'orbite de Vénus du nord au sud, au mois d'Août, elle étoit éloignée du Soleil de 1,299, tandis que Vénus ne sauroit l'être plus que de 0,728; & quand la Comète a repassé dans le plan de l'orbite de Vénus au mois d'Octobre, elle n'étoit éloignée que de 0,1368, tandis que Vénus l'est au moins de 0,7183 dans ses moindres distances au Soleil. Il s'en faut donc beaucoup que la Comète ait pu rencontrer le globe de Vénus, ni même s'en approcher sensiblement dans cette apparition, à quel endroit que Vénus se fut trouvée sur son orbite, & je ne vois aucun fondement à la menace qu'on sembloit faire à l'Univers d'une étonnante révolution dans le système planétaire.



Fig. 1

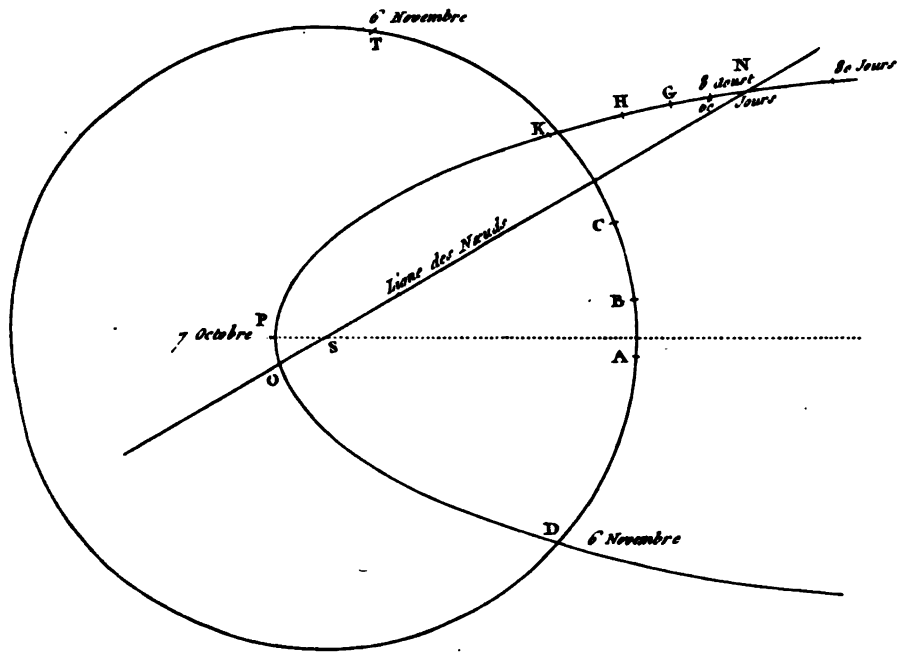
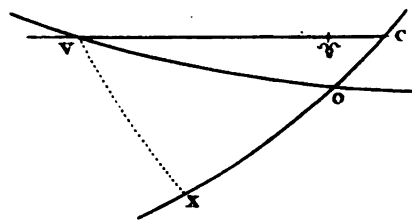


Fig. 2



1

# OBSERVATIONS DE DEUX ÉCLIPSES DE LUNE

DE CETTE ANNÉE 1768.

*Des 30 Juin au matin & 23 Décembre au soir.*

Par M. MARALDI.

J'AI fait ces Observations avec une Lunette de 7 pieds, garnie d'un micromètre composé de treize fils, également éloignés les uns des autres, de sorte qu'ils comprennent douze espaces égaux. 24 Decemb  
1768.

Le ciel s'étant couvert la nuit du 29 au 30 Juin vers les onze heures du soir, on ne put voir la Lune que vers les trois heures du matin du 30 Juin, & j'ai fait les Observations suivantes.

- À 3<sup>h</sup> 2' 0" temps vrai, j'ai jugé l'éclipse de huit doigts.
- 3. 6. 0 l'Éclipse est de neuf doigts.
- 3. 17. 0 elle est de onze doigts.
- 3. 23. 56 immersion totale.
- 3. 26. 0 on ne voyoit plus du tout la Lune à la vue simple ; l'émerſion n'a pas été viſible à Paris, parce que la Lune étoit ſous l'horizon & il faisoit jour.

Le 23 Décembre, les vapeurs de l'horizon ne nous ont permis de voir les bords de la Lune & de l'ombre de la Terre un peu terminés, que 25 minutes après le lever de la Lune.

- À 4<sup>h</sup> 27' 44" du soir, temps vrai, Copernic est sorti de l'ombre.
- 4. 32. 20 je juge l'éclipse de sept doigts : le micromètre n'est pas encore bien disposé.
- 4. 35. 40 l'Éclipse est de six doigts.
- 4. 39. 20 *Manilius* hors de l'ombre.
- 4. 41. 26 *Menelaüs* hors de l'ombre.
- 4. 43. 0 l'Éclipse est de cinq doigts : le micromètre est mieux ajusté.



# 60 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

- λ 4<sup>h</sup> 46' 30" *Plinius* hors de l'ombre.
- 4. 47. 55 *Mare serenitatis* toute hors de l'ombre.
- 4. 49. 30 ... trois doigts.
- 4. 50. 25 *Promontorius acutum* hors de l'ombre.
- 4. 53. 55 ... deux doigts.
- 4. 55. 55 *Proclus* hors de l'ombre.
- 4. 58. 16 ... un doigt.
- λ 5<sup>h</sup> 0. 50 *Mare orifum* hors de l'ombre.
- 5. 3. 9 on commence à voir le bord de la Lune terminé,  
quoique fort obscur.
- 5. 4. 53 fin de l'Éclipse.
- 5. 5. 20 fin plus certaine.



SUR UNE  
ÉCLIPSE HORIZONTALE DE LA LUNE,  
VUE À CHÂTILLON

*Dans la Tour de M. le Duc de Croy, le 23  
Décembre 1768, au soir.*

Par M. LE MONNIER.

CETTE Éclipse a été vue à son émerſion & au moment de 21 Janvier  
1769 la fin, avec une lunette achromatique de 3 pieds & demi, qui redreſſoit les objets: elle appartient à M. le Duc de Croy, qui l'avoit fait apporter à ſa Tour; les temps ont été marqués avec ma montre de Graham que j'ai vérifiée à Paris avant l'Éclipse, & à mon retour.

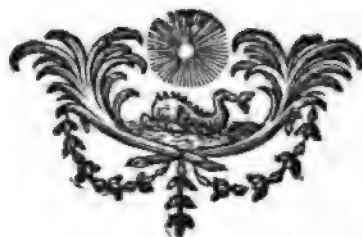
Entre la face australe de l'Observatoire royal & la Tour, la différence en latitude est 2303,31 toises ou 2' 25", ce qui donne la latitude de la Tour de 48<sup>d</sup> 47' 50", & la Tour fait au ſud-oueft de l'Observatoire, un angle de 43<sup>d</sup> 55' 10". Suppoſant donc le degré de longitude ſous ce parallèle de 38000 toises, à proportion pour 2218,3 toises, qui est la différence en longitude, on auroit 3' 30"<sup>1</sup>/<sub>8</sub>, qui valent en minutes d'heures; 14 ſecondes de différence en longitude occidentale; c'est pourquoi aux phases ſuivantes il faudroit ajouter conſtamment un quart de minute, ou 14 ſecondes pour réduire le temps vrai au méridien de Paris, ſi ce n'est que l'heure de la montre étoit corrigée, non ſur le lieu même, mais par une pendule réglée au méridien même de Paris. Quoique le ciel fut fort ſerein, principalement du côté de l'eſt, nous ne pumes observer l'heure du coucher du Soleil ni ſon amplitude, à cauſe de quelques nuages opaques qui bardoient l'horizon du côté de l'oueft.

## 62 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

À 4<sup>h</sup> 14' 20" le *Palus Maraotis* tout découvert, ce qui donne l'émerfion à 4<sup>h</sup> 12' 20".

- 4. 21. 30 *Ætna* forti de l'ombre.
- 4. 28. 40 *Sinaï* forti de l'ombre.
- 4. 29. 40 tout le grand lac noir.
- 4. 38. 52½ l'île *Caloline* ou *insula Beshicus Propontidis*.
- 4. 40. 55 Bizance.
- 4. 45. 30 File d'*Achille* ou *insula Macra*.
- 4. 50. 35 le Promontoire aigu d'*Héraclée*.
- 4. 59. 20 le *Palus Maotis* entièrement forti.
- 5. 01. 20 fin de l'Éclipse.

Cette Éclipse est arrivée dix-huit ans & neuf jours & demi après l'Éclipse totale du 13 Décembre au matin, que nous avons observée à Paris, & qui est rapportée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'année 1750*.



# OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE DE LUNE

*Du 23 Décembre 1768,  
ET DE LA LUNE DANS LE MÉRIDIEŒ.*

Par M. DE LA LANDE.

LA Lune s'est levée si peu de temps avant l'émerſion, qu'il n'a pas été poſſible de l'observer avec quelque précision; je n'ai commencé qu'à 4<sup>h</sup> 26' à observer des phases, c'est-à-dire à meſurer la grandeur de la partie éclairée, avec un micromètre appliqué à une lunette de 9 pieds.

<i>Temps vrai.</i>	<i>Partie éclairée.</i>	<i>Temps vrai.</i>	<i>Partie éclairée.</i>
à 4 <sup>h</sup> 26' 40"	995.	à 4 <sup>h</sup> 41' 10"	2770.
4. 30. 40.	1460.	4. 45. 40.	3169.
4. 33. 40.	1864.	4. 47. 25.	3289.
4. 35. 40.	2219.	4. 52. 10.	3747.
4. 38. 40.	2487.	5. 0. 38, sortie de <i>Mare Crifum.</i>	

à 5<sup>h</sup> 3' 22" fin de l'Éclipse, le bord ſupérieur ſe diſtinguant nettement dans ma lunette de 9 pieds.

5. 4. 40. La pénombre n'eſt plus ſenſible dans la lunette de 9 pieds.

5. 8. 10, fin de la pénombre dans une petite lunette achromatique de 6 pouces, les deux bords paroiffant auſſi lumineux l'un que l'autre.

5. 17. 00. Diamètre de la Lune en déclinaifon 4958.

La même nuit, M. l'abbé Marie, Profefſeur de Mathématiques au Collège Mazarin, qui a ſuccédé à M. l'abbé de la Caille & occupe le même Obſervatoire, obſerva la Lune au méridien; à 12<sup>h</sup> 26' 43" de la pendule le ſecond bord de la Lune paſſa à la lunette méridienne, le bord ſupérieur étant à 26<sup>d</sup> 47' 24."

# 64 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

du zénith; *Procyon* passa au méridien à  $13^h 18' 1''$ , & le Soleil le lendemain à  $0^h 3' 31''$ ; de-là je conclus que le 23 à  $12^h 30' 12''$  de temps moyen, l'ascension droite du centre de la Lune, étoit de  $81^d 17' 58''$ , & sa déclinaison de  $22^d 46' 30''$ . Sa longitude  $3^f 8^d 1' 4''$ , & sa latitude  $27' 10''$ . Par les Tables de M. Mayer, je trouve la longitude plus grande de 53 secondes, & la latitude plus petite de 23 secondes; l'erreur en longitude fait voir la cause de la différence de 2 minutes qui s'est trouvée entre la fin de l'Éclipse observée, & celle que j'avois annoncée dans la *Connoissance des Temps* pour  $5^h 5' 32''$ .



**OBSERVATION**

## OBSERVATION

DE

QUELQUES PHASES DE L'ÉCLIPSE DE LUNE

Du 23 Décembre 1768.

Par M. DE FOUCHY.

LA Lune devoit se lever totalement éclipfée au coucher du 18 Janvier  
Soleil; des bâtimens placés au nord-est de l'endroit où 1769.  
j'observe, m'ont caché tout le commencement du recouvrement  
de lumière, & je n'ai vu la Lune que très-peu avant la fin de  
l'Éclipse; voici les deux seules phases que j'ai pu observer, réduites  
au temps vrai.

4<sup>h</sup> 59' 55" *Mare Crisum* tout-à-fait hors de l'ombre.

5. 4. 48. Je juge l'Éclipse finie.

5. 0. Fin certaine.

Ces phases ont été observées avec une lunette de 8 pieds.



**NOUVELLES RECHERCHES**  
**POUR SERVIR À DÉTERMINER**  
**LA NATURE DE LA BILE.**

Par M. CADET.

15 Novemb.  
1769.

**L**ES expériences dont j'ai exposé les détails à l'Académie en 1767, m'avoient donné sur la nature de la bile toutes les lumières que je croyois pouvoir en attendre; cependant une Thèse de M. Reederer sur la même matière, soutenue à Strasbourg, & annoncée avec éloge dans le *Journal des Savans*, m'a engagé à y revenir, & m'a fait entreprendre des expériences nouvelles, qui donnent un nouveau degré de certitude à ce que j'ai établi dans mon premier Mémoire.

Ce qui m'a le plus frappé dans l'Ouvrage que je viens de citer, c'est d'y trouver ces deux assertions: que la bile contient un principe acide, & qu'elle coagule le lait. Si cela est, la bile n'est plus un vrai savon, comme je l'avois établi, ou du moins c'est un savon d'une nature toute différente, dont la partie saline est plutôt un acide qu'un alkali.

Il faut avouer cependant que M. Reederer n'a pas osé tirer des conséquences aussi formelles; il adopte mon sentiment sur les différens principes que j'ai reconnus dans la bile, & il suspend son jugement avec une réserve bien digne d'éloges.

Mais mes premières expériences m'ont forcé à prononcer avec plus de confiance que M. Reederer. J'ai dit que la bile est un véritable savon composé d'une huile animale, de la base alkaline du sel marin, du sel marin lui-même, d'un sel de la nature du sucre de lait & d'une terre calcaire qui participe légèrement du fer: les cendres que j'ai retirées de la bile, paroissent exactement semblables à la soude qu'on emploie dans le commerce; elles m'ont donné par la lessive une très-grande quantité

de cristaux de sel alkali de soude, semblable à celui qu'on emploie à former le savon.

J'ai donc cru, d'après de pareils résultats, être bien autorisé à dire que la bile est un véritable savon; d'ailleurs sa propriété savonneuse est déjà assez connue, puisqu'on dégraisse avec la bile des matières que le savon peut à peine dégraisser.

M. Roederer reconnoît avec moi dans la bile, une substance animale gélatineuse, mais je crois être un des premiers qui l'ait démontré aussi sensiblement, puisque de six livres de bile, j'ai séparé plus de quatre gros de cette substance gélatineuse. M. Buquet, Médecin de la Faculté de Paris, qui n'avoit aucune connoissance de mes premières expériences sur la bile, en a tenté depuis plusieurs sur cette liqueur animale; elles l'ont conduit à y reconnoître le même principe gélatineux, ainsi que la base alkalinale du sel marin. On peut voir les observations intéressantes de M. Buquet, sur cette matière, dans une Thèse qu'il a soutenue à la Faculté le 25 Janvier de l'année dernière.

L'acide que M. Roederer prétend avoir reconnu dans la bile, m'a paru mériter toute mon attention; prêt à renoncer à mon sentiment, si les expériences de M. Roederer y étoient contraires, j'ai fait de nouvelles expériences sur la bile, & j'ai voulu surtout examiner si ce principe acide n'étoit pas plutôt l'ouvrage d'un commencement de fermentation acide que pourroit éprouver la bile avant de passer à la putréfaction. J'espère que les expériences suivantes suffiront pour ne laisser aucun doute sur le sentiment que les premières m'avoient fait adopter: quoique ces expériences détruisent quelques-unes de celles de M. Roederer, je ne prétends pas déprimer son Ouvrage, qui contient beaucoup de faits intéressans.

1.<sup>o</sup> J'ai pris deux onces de bile tirée d'un bœuf qui venoit d'être tué; elle étoit encore chaude, & ne pouvoit avoir souffert aucune altération: je les ai mises avec une chopine de lait de vache, trait depuis plus de quatorze heures; j'ai agité le mélange, & après l'avoir laissé reposer plusieurs heures, je n'ai rien vu qui annonçât la moindre décomposition du lait.

2.<sup>o</sup> J'ai fait bouillir une chopine du même lait, j'y ai mis



deux onces de bile, j'ai fait faire encore deux ou trois bouillons; il n'a paru aucune coagulation; les parties du mélange en étoient bien liées, le lait paroïssoit seulement plus crèmeux qu'il n'étoit auparavant, ce qui venoit de la viscosité & de la partie grasse de la bile.

J'ai exposé ces deux mélanges dans une cuvette d'eau de puits; fraîchement tirée; la température du lieu étoit à 10 degrés du Thermomètre de M. de Reaumur. Le premier mélange est resté plus de quatorze heures sans se séparer; sur le deuxième mélange, j'ai aperçu, au bout de trois ou quatre heures, se former une crème bien lisse sans grumeaux: mais la simple agitation a remis sur le champ le lait dans son premier état; la même chose arrive au lait pur, lorsqu'il est en repos.

3.° J'ai fait tourner du lait avec quelques gouttes de vinaigre distillé, j'ai voulu examiner ce qu'opéreroit la bile sur ce lait caillé; après trois ou quatre bouillons, j'ai observé que la bile avoit rétabli ou régénéré quelques portions du lait, que ce mélange étoit devenu laiteux, & que la partie restante du caillé, qui n'avoit pu être régénérée, s'y étoit entièrement précipitée.

J'attribuai ce commencement de régénération du lait au principe de l'alkali marin que j'ai démontré si sensiblement dans la bile: cette réflexion me donna lieu de répéter quelques expériences momentanées que j'avois faites anciennement pour rétablir du lait qui s'étoit caillé de lui-même sur le feu; je pris pour cet effet, un lait de même qualité, je veux dire qui étoit aigre; j'y jetai quelques grains d'alkali marin, produit des cendres de la bile, au lieu d'alkali marin ordinaire dont je m'étois servi en pareil cas: le lait qui avoit tourné sur le feu fut aussi-tôt rétabli par le moyen de cet alkali, & se trouva de bonne qualité.

4.° Sur un même lait caillé, j'ai jeté quelques gouttes d'alkali volatil; j'ai eu le même résultat comme avec l'huile de tartre par défaillance.

Ces moyens pourroient être tentés, & seroient sûrs dans les temps de chaleur & d'orages, pour empêcher le lait de tourner aussi aisément à l'aigre. On avoit observé que les Eaux minérales qui contiennent un principe alkalin, ont la propriété de

conserver le lait en l'empêchant de tourner à l'aigre, & de se cailler.

D'après ces expériences, il est bien constant que la bile ne contient point d'acide développé; ses effets avec le lait, prouvent au contraire qu'elle est d'une nature alcaline comme le savon. On n'ignore point que l'acide est un des principes constitutifs des huiles & des graisses, & par conséquent du principe huileux de la bile, ainsi que du savon; ce n'est pas cet acide élémentaire dont veut parler M. Roederer, mais un autre acide qu'il soupçonne combiné avec la partie huileuse de cette substance animale, & qui lui fait considérer la bile comme un savon acide: mais mes expériences sont tout-à-fait contraires à cette opinion; j'avois regardé la bile avec les plus savans Chimistes, comme étant une liqueur savonneuse: cependant afin d'en faire une exacte comparaison avec le savon lui-même, j'ai voulu voir quels effets le savon produiroit avec le lait.

5.<sup>o</sup> J'ai fait dissoudre quatre gros de savon blanc dans quatre onces d'eau, j'ai laissé refroidir la dissolution, je l'ai mêlée ensuite avec une chopine de lait; cette liqueur savonneuse, de même que la bile, n'a pas opéré la moindre décomposition.

6.<sup>o</sup> J'ai pris une même dissolution de savon, que j'ai versée dans une chopine de lait bouillant; j'ai donné trois ou quatre bouillons, j'ai observé un commencement de décomposition du lait, qui s'est fait remarquer par une portion de lait caillé assez considérable que j'en ai séparée, ce que ne produit point la bile de bœuf dans la même expérience.

Je dirai pourtant que malgré cette portion de caillé, le lait s'est soutenu, & n'a point tourné; étant mis à reposer, il s'en est séparé comme dans les expériences avec la bile, une crème bien lisse & sans grumeaux, que la simple agitation mêle de nouveau avec la liqueur. Quant à la partie décomposée, je ne doute pas qu'elle ne vienne de quelque partie d'huile rance que le savon ordinaire peut contenir, aussi n'ai-je rien vu de semblable en employant un savon nouvellement préparé.

On sait qu'il y a peu de matières animales qui fournissent de l'acide bien développé; les fourmis, les abeilles, sont presque

les seules desquelles on en retire: nous en devons l'Observation à M.<sup>rs</sup> *Hulse, Fisher, Langham*; M. de Montigny a même observé que l'acide des fourmis est si subtil & si développé, que, lorsqu'on irrite ces insectes dans leurs fourmillières, il s'en échappe aussi-tôt une vapeur qui rougit le papier bleu, comme si on l'avoit trempé dans une liqueur acide; elle fait aussi sur les mains l'impression d'un acide très-concentré. Si les autres substances animales sont reconnues pour ne point contenir d'acide, il y avoit tout lieu de présumer d'abord que la bile de bœuf, qui contient beaucoup de principe alkalin, devoit être moins soupçonnée qu'aucune autre matière animale, de contenir l'acide que M. Roederer prétend y avoir reconnu. Il est facile de le démontrer par une expérience très-simple & préférable, ce me semble, à la plupart des combinaisons qu'on a tentées avec le lait; il suffit de prendre de la bile de bœuf bien fraîche, de l'étendre dans trois ou quatre parties d'eau, d'essayer ensuite cette liqueur sur du fin papier bleu: cette expérience, au lieu de faire passer la couleur bleue au rouge, comme elle le feroit, si effectivement la bile participoit de l'acide, lui donne au contraire un oeil verdâtre. On m'objectera peut-être que la cause de cette couleur peut venir plutôt de la couleur jaune de la bile, que du sel alkali qui constitue ce savon animal, puisque dans le mélange des couleurs, le jaune & le bleu donnent toujours du vert; mais je répondrai que si la bile que j'ai employée, quoique jaune, avoit contenu quelqu'atome d'acide, elle n'en auroit pas moins changé en rouge la couleur bleue du papier. Une seule goutte d'huile de vitriol sur huit onces de cette dissolution de fiel de bœuf, a suffi pour faire passer la couleur bleue du papier au rouge.

Mais, selon moi, rien ne prouve davantage la nature alkalinie de la bile, que l'altération qu'elle éprouve par les acides; en effet, les acides coagulent la bile, & en séparent la partie huileuse, comme ils font à l'égard du savon, qui se décompose de même par les acides.

Autorisé par ces nouvelles expériences, je persiste à soutenir que la bile est alkalinie, comme le savon est alkalin. L'acide que M. Roederer a cru y apercevoir, pourroit être l'effet d'une

fermentation acide spontanée; la bile passe si aisément à la putréfaction, sur-tout dans les temps de chaleur, qu'il pourroit bien arriver que ce principe acide s'y manifestât promptement, puisque c'est ordinairement la fermentation acide qui précède la putride: cette prompte fermentation est peut-être dûe aussi à la partie gélatineuse de la bile que j'y ai observée.

Malgré ces réflexions, que je ne hasarde qu'à raison de l'acide que M. Roederer dit avoir reconnu dans la bile, je ne dissimulerai pas que d'après quelques expériences qui me sont propres, je suis plutôt disposé à croire que la bile n'est pas susceptible de la fermentation acide, mais qu'elle passe d'abord à la fermentation putride. J'ai multiplié à cet effet les observations sur la bile, pour tâcher de saisir le moment où elle deviendrait acide; je l'ai examinée avec le papier bleu de quart-d'heure en quart-d'heure jusqu'à la putréfaction, & je n'ai aperçu aucun instant où cette liqueur pût être soupçonnée acide.

Si dans l'expérience de M. Roederer, le lait mêlé avec la bile s'est coagulé; je pense que cette coagulation n'a eu lieu que parce que le lait employé étoit déjà disposé à l'aigre; ou peut-être aussi parce que la bile étoit altérée\*.

Effectivement, s'il est naturel de penser que la bile d'un corps humain bien saine, & conservant sa couleur jaune, doit être aussi alkaline, & produire avec le lait les mêmes effets que la bile de bœuf: on pourroit de même soupçonner qu'une bile verte venue d'une personne mal saine & sujette à des aigreurs, ne devroit cette couleur verte qu'au développement & à la présence d'un acide étranger, & qu'à cet égard, elle seroit dans le cas de faire cailler le lait; mais on conviendra que la propriété & les effets d'une bile ainsi dégénérée, ne devroient être

\* M. Tronchin est bien de mon sentiment sur les principes constituans de cette substance animale, car dans tous les cas où la bile manque d'énergie & où l'acide abonde dans les premières voies, il a recours avec le

plus grand succès, à la bile épaissie, *felli taurino inspissato*, & dans ce cas ce célèbre Médecin m'a assuré ne connoître aucun remède qui dompte plus sûrement l'acide.

72 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

considérés que comme un fait isolé & particulier, d'où on ne peut tirer aucune induction générale sur les principes constitutifs de la bile, telle qu'elle est composée & combinée par la Nature; quand ses opérations ne sont point troublées, ni altérées pour l'élaboration des liqueurs animales: par conséquent, ces faits particuliers ne prouvent rien, ce me semble, contre mon sentiment; appuyé des preuves que j'ai avancées dans mon premier Mémoire & dans celui-ci.



*RECHERCHES*

# RECHERCHES SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

Par M. D'ALEMBERT.

Ces Recherches contiendront principalement la démonstration des Théorèmes imprimés dans le *Volume de 1767*, que je suppose qu'on ait ici sous les yeux; je joindrai à ces démonstrations, plusieurs autres propositions & méthodes qui en résultent, pour l'intégration d'un grand nombre de quantités ou d'équations différentielles: mais je rejetterai ces propositions & ces méthodes dans des Notes, que je renverrai par des chiffres à la fin du Mémoire, pour ne pas occuper trop de place dans ce Volume.

Juillet  
1769.

S. I.<sup>er</sup>

*LEMMEs pour la démonstration des Théorèmes suivans.*

(1.) LEMME I.<sup>er</sup> On sait que  $\cos. ma + \sin. ma \sqrt{-1} = (\cos. a + \sin. a \times \sqrt{-1})^m$ , & que  $\cos. ma - \sin. ma \sqrt{-1} = (\cos. a - \sin. a \times \sqrt{-1})^m$ ; d'où l'on a  $\cos. ma = \frac{(\cos. a + \sin. a \times \sqrt{-1})^m + (\cos. a - \sin. a \times \sqrt{-1})^m}{2}$ ; &  $\sin. ma = \frac{(\cos. a + \sin. a \times \sqrt{-1})^m - (\cos. a - \sin. a \times \sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}$ : De-là

il s'ensuit 1.<sup>o</sup> que si  $m$  est un nombre entier positif, & qu'on fasse  $\sin. a = x$ , &  $\cos. a = \sqrt{1 - xx}$ ,  $\cos. ma$  &  $\sin. ma$  seront exprimées par une fonction sans diviseur, qui ne contiendra d'autre radical que  $\sqrt{1 - xx}$ . 2.<sup>o</sup> Que la même chose aura lieu, si  $m$  est un nombre entier négatif, puisque  $\cos. -ma = \cos. ma$ , &  $\sin. -ma = -\sin. ma$ . 3.<sup>o</sup> Que si  $m$  est pair,  $\cos. ma$  ne renfermera que des puissances paires de  $x$ , avec un terme tout constant sans  $x$ , qu'on pourra supposer  $Ax^0$ . 4.<sup>o</sup> Que dans le même cas  $\sin. ma$  sera  $= x X \sqrt{1 - xx}$ ,  $X$  ne renfermant que des termes de la forme  $Ax^0$ ,  $Bx^2$ ,  $Cx^4$ , &c.

*Mém. 1769.*

K

# 74 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

5.° Que si  $m$  est impair,  $\cos. ma$  sera  $\equiv X' \sqrt{1 - xx}$ ,  $X'$  étant de la même forme que  $X$  dans le cas précédent ; & que  $\sin. ma$  sera  $\equiv x X''$ ,  $X''$  étant aussi de la même forme que  $X$  &  $X'$  (1).

(2.) Donc si on appelle  $v$  l'angle dont le sinus est  $x$ , & que  $m$  soit un nombre pair,  $\sin. mv \times dv$  sera composé de termes de cette forme,  $A x^p dx$ ,  $p$  étant un nombre entier impair. Il en sera de même de  $dv \cos. mv$ , si  $m$  est un nombre impair, avec cette différence qu'alors  $p$  sera un nombre pair, dans lequel zéro pourra être compris. Par la même raison, si  $m$  est un nombre impair,  $dv \sin. mv$  sera composé de termes de cette forme  $\frac{A x^p dx}{\sqrt{1 - xx}}$ ,  $p$  étant un impair ; & si  $m$  est un nombre pair,  $dv \cos. mv$  sera composé de termes de cette forme  $\frac{A x^p dx}{\sqrt{1 - xx}}$ ,  $p$  étant un nombre pair.

(3.) Puisque  $\sin. (ma + A) = \sin. A \cos. ma + \sin. ma \cos. A$ , & que  $\cos. (ma + A) = \cos. ma \cos. A - \sin. ma \sin. A$  ; il est évident que  $m$  étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif,  $\sin. (ma + A)$  &  $\cos. (ma + A)$  seront exprimés par une fonction sans dénominateur qui ne contiendra d'autre radical que  $\sqrt{1 - xx}$ .

(4.) LEMME II. Toute quantité  $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + c$  ( $a, b, c$ , étant réels ou imaginaires, &  $m$  un nombre entier positif) peut toujours se réduire en facteurs de la forme  $x + M + N\sqrt{-1}$ ,  $M$  &  $N$  étant réels. J'ai démontré le premier cette proposition dans les *Mémoires de Berlin* de 1746, pour le cas où  $a, b, c$ , &c. sont réels ; pour la démontrer en général, soit  $x = p + q$ ,  $p$  &  $q$  étant deux quantités indéterminées, & soit  $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + c = 0$ , on aura une équation formée de  $p$  &  $q$ , qu'on pourra séparer en deux autres à volonté ; à cause que  $p$  &  $q$  sont indéterminés l'un & l'autre. On pourra donc former une équation dans l'une desquelles les imaginaires ne se trouvent pas (après avoir réduit toutes ces imaginaires à la forme  $P + Q\sqrt{-1}$ , ce qui est

toujours possible, ainsi que je l'ai démontré autrefois); l'autre équation contiendra tous les termes imaginaires ou multipliés par  $\sqrt{-1}$ ; & en divisant par  $\sqrt{-1}$ , on aura deux équations sans imaginaires, en  $p$  &  $q$ , qui peuvent se changer par les méthodes connues en deux autres, l'une simplement en  $p$ , l'autre en  $q$ . Donc on aura  $p = R + S\sqrt{-1}$ , &  $q = T + V\sqrt{-1}$ ; donc  $x = R + T + (V + S)(\sqrt{-1})$ ; donc, &c.

(5.) LEMME III. Toute quantité de cette forme  $\frac{(g + f\sqrt{-1})dx}{x + a + b\sqrt{-1}}$ ; se change, en multipliant le haut & le bas par  $x + a - b\sqrt{-1}$ , en  $\frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} \times [g(x+a) + fb + (\sqrt{-1})(fx + fa - gb)]$ , d'où il est aisé de voir que les différens termes de cette quantité sont toujours réductibles à une fraction rationnelle multipliée par  $A$  ou par  $A\sqrt{-1}$ ,  $A$  étant une quantité réelle.

§. II.

*Démonstration des Théorèmes énoncés dans les Mémoires de 1767, page 573.*

*Démonstration du Théorème I.<sup>er</sup>.*

(6.) Les quantités  $p, q, r$ , &c. étant par l'hypothèse en rapport rationnel, peuvent se réduire à  $\frac{mA}{n}, \frac{n'A}{n}, \frac{m''A}{n}$ , &c.  $A$  étant une quantité quelconque,  $m, n', m''$ , &c. des nombres entiers positifs ou négatifs, &  $n$  un nombre entier positif. Faisant donc  $\frac{Av}{n} = z$ , la transformée sera de cette forme  $Z dz$ ,  $Z$  ne contenant que des sinus & cosinus de  $az, bz$ , &c.  $a$  &  $b$  &c. étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Donc faisant  $\sin. z = x$ , la nouvelle transformée en  $x$  ne contiendra (*Art. 1 & 3*) que le radical  $\sqrt{(1 - xx)}$ . Faisant donc évanouir ce radical par les méthodes connues, en supposant  $\sqrt{(1 - xx)} = (1 - x)t$ , on n'aura plus qu'une fraction rationnelle en  $t$  &  $dt$ . Donc, &c.



*Démonstration du Théorème II.*

(7.) 1.° Toute quantité de cette forme  $a^{p^v + a}$  peut se changer en  $a^a a^{p^v} = A' a^{p^v}$ ; 2.° Ayant donné aux quantités  $p, q$ , &c. la forme  $\frac{m A}{n}$ ,  $\frac{n' A}{n}$ , & supposé  $\frac{A^v}{n} = v'$ , on aura une quantité qui ne contiendra plus que des exponentielles  $a^{S v'}$ ,  $S$  étant un nombre entier; donc faisant  $a^{v'} = t$ , ce qui donne  $d v' = \frac{d t}{t \log. a}$ , on n'aura plus qu'une fraction rationnelle, qui pourra à la vérité contenir des imaginaires, mais qui pourra (art. 4.) se développer en plusieurs termes de la forme de l'art. 5. Donc, &c. (2)

*Démonstration du Théorème III.*

(8.) Toute quantité de cette forme  $a^{p^v} \times c^{r^v} = (d^p c^r)^v = A^v$ ; Donc tous les termes de  $V d v$  se réduiront à  $C v^m A^v d v$ ;  $m$  étant positif, & s'intégreront par les méthodes connues,

*Démonstration du Théorème IV.*

(9.) Le sinus de  $p v + a$ , est, comme l'on fait, égal à  $\frac{e^{(p v + a) \sqrt{-1}} - e^{-(p v + a) \sqrt{-1}}}{2 \sqrt{-1}}$  & le cosinus du même angle est  $= \frac{e^{(p v + a) \sqrt{-1}} + e^{-(p v + a) \sqrt{-1}}}{2}$ . Donc le théorème à démontrer est une suite du précédent.

*Démonstration du Théorème V.*

(10.) Soit  $m = \frac{1}{p}$ ,  $v^{\frac{1}{p}} = z$ , on aura  $v = z^p$ , &c.

les différens termes  $V dv$  seront de cette forme  $\frac{Bz^m dz c^{sz+a}}{(z+a)^m}$ ,  
 $a$  étant réel ou imaginaire; & la difficulté se réduira, comme  
 il est aisé de le voir, à intégrer  $\frac{dz c^{sz}}{z+a}$  (3); ou en faisant  
 $z+a = t$ , à intégrer  $\frac{d t c^{st} - s a}{t} = \frac{D dt}{t} c^{st}$ , ou  
 (en faisant  $c^{st} = s$ )  $\frac{E ds}{\log. s}$  (4).

En faisant  $v^m = z$ , l'expression  $\frac{c^{sv^m} dv}{v}$  devient de la  
 forme  $\frac{A c^{sz} dz}{z}$ . Donc, &c. (5).

\* *Démonstration du Théorème VII.*

\* Le Théorème  
 VI porte avec lui  
 sa démonstration;

(11.) 1.° En faisant sin.  $v = x$ , &  $xx = z$ , la proposée se transformera en  $\frac{Z dz (a + bz)^{\frac{m}{2}}}{Z'(c + fz)^{\frac{n}{2}} + Z''(g + hz)^{\frac{l}{2}}}$  qu'on fait être  
 réductible aux fractions rationnelles. (Voyez les *Mém. de Berlin*;  
 1746, page 197, n.° V).

2.° Il en sera de même dans le second cas, où  $U dv$  sera  
 réductible en termes de cette forme  $\frac{x^{2m+1} dx}{\sqrt{1-xx}}$  &  $U'$ ,  $U''$  en  
 termes de la forme  $x^{2p} \sqrt{1-xx}$ .

3.° Dans le troisième cas, où  $U dv$  est composée de termes  
 de la forme  $\frac{x^{2m} dx}{\sqrt{1-xx}}$ , &  $U'$ ,  $U''$ , de termes de la forme  
 $x^{2p+1} \sqrt{1-xx}$ , il n'y aura qu'à multiplier le haut & le bas  
 par  $x$ , & faire ensuite  $xx = z$ .

4.° Il en sera de même dans le quatrième cas, où les termes  
 de  $U dv$  seront de la forme  $x^{2m} dx$  & ceux de  $U'$ ,  $U''$  de la  
 forme  $x^{2p+1}$ .

*Démonstration du Théorème VIII.*

(12.) 1.<sup>o</sup>  $U dv$  ne contient dans le premier cas que des termes de la forme  $x^r dx$ , &  $U, U''$  que des termes de la forme  $x^p dx$ ,  $r$  &  $p$  étant des nombres entiers positifs. Donc, &c. (*Voy. les Mémoires de Berlin, 1746, p. 198, n.<sup>o</sup> VII.*)

2.<sup>o</sup>  $U dv$  ne contient dans le second cas que des termes de la forme  $\frac{x^r dx}{\sqrt{1-xx}}$ , &  $U, U''$  que des termes de la forme  $x^p \sqrt{1-xx}$ ; Donc, &c.

3.<sup>o</sup> Dans le troisième cas il n'y a qu'à faire simplement  $xx = z$ , & la transformée se réduira aisément aux fractions rationnelles comme dans le premier cas.

4.<sup>o</sup> Dans le quatrième cas, si  $U$  &  $U''$  contiennent des sinus, il faudra multiplier le haut & le bas par  $x$ , & faire ensuite  $xx = z$ ; & si  $U, U''$  contiennent des cosinus, il faudra faire  $xx = z$ , & la transformée sera composée de termes de cette forme  $\frac{Z dz}{Z' \sqrt{az + bz^2} + Z'' \sqrt{cz + dz^2}}$ ;  $Z, Z', Z''$  étant des quantités rationnelles; elle sera donc réductible aux fractions rationnelles. (*Mém. de Berlin, 1746, p. 198, n.<sup>o</sup> VII.*)

*Démonstration du Théorème IX.*

(13.) En faisant  $\sin. v = x$ , la transformée sera de cette forme  $\frac{X dx}{X' + X''(a + bz)^{\frac{1}{2}} + X'''(c + dz)^{\frac{1}{2}}}$ ,  $X, X', X''$  étant rationnelles. Donc, &c. (*Voy. Mém. de Berlin, 1746, p. 197, n.<sup>o</sup> VI.*)

*Démonstration du Théorème X.*

(14.) On fait 1.<sup>o</sup> que toute quantité de cette forme  $\frac{dx}{(a + bx)^\mu \sqrt{1-xx}}$  est intégrable par logarithmes, si  $\mu$  est un

nombre entier positif, & si  $b^2$  est  $< 1$ ; cela est évident en faisant  $x + b = z$ , &  $z = u^{-1}$ .

2.<sup>o</sup> Il est aisé de voir que  $A \cos. rv + B$  ou  $A \sin. rv + B$ ; si  $A^2$  est  $=$  ou  $> B^2$ , & qu'on fasse  $\cos. v$  ou  $\sin. v = x$ , sera réductible en facteurs réels,  $x + a$ ,  $x + b$ ,  $x + c$ , &c. dans lesquels  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ , &c. seront égaux ou  $< 1$ ;  $r$  étant supposé un nombre entier pair ou impair. C'est une suite des théorèmes connus sur la division des arcs de cercle. Car en faisant, par exemple,  $\sin. (rv) + k = 0$ , si  $r$  est impair; & en mettant pour  $\sin. rv$  sa valeur en  $x$ , toutes les racines seront réelles, & ne surpasseront pas l'unité, pourvu que  $k^2$  soit  $=$  ou  $< 1$ .

De-là il s'ensuit que si on a une quantité de cette forme

$$\frac{V dv}{(A \cos. (rv) + B)^\mu}, \quad V \text{ étant } = a \sin. p v + q \cos. s v, \text{ \&c.}$$

$p$  étant impair &  $s$  pair, &  $p$  &  $s$  étant  $< \mu r$ , cette quantité sera intégrable par logarithmes; car chaque terme de la transformée sera de la forme  $\gamma x^{p-q} dx$  ou  $\gamma' x^{s-q} dx$  divisé par  $(A' x^r + B x^r + \text{\&c.})^\mu \times \sqrt{(1 - x x)}$ , ( $q$  étant un nombre entier  $=$  ou  $< p$  &  $s$ ); & par conséquent (à cause de  $p$  &  $s < \mu r$ ) chaque terme sera réductible à des termes de la forme  $\frac{dx}{(x + b)^\mu \sqrt{(1 - x x)}}$  (6). Donc, &c. (7).

### Démonstration du Théorème XI.

(15.) La quantité  $A + B \sin. (a + v) + C \cos. (c + v) + D \sin. (g + v) + F \cos. (l + v)$  &c. à l'infini, se change en  $A + M \sin. v + N \cos. v = A + R \sin. (a + v)$ . Soit  $a + v = x$ , &  $\sin. x = z$ , les termes les plus composés de la transformée seront de cette forme  $\frac{z dz}{(A + R z^{\frac{n}{2}} \sqrt{(1 - z z)})}$ , & par conséquent réductibles à des arcs de sections coniques. (Voy. *Mém. de Berlin*, 1746, p. 219, art. XL.)

*Démonstration du Théorème XII.*

(16.) La transformée sera, en faisant  $\sin. v = z$ ,  $Z dz \times (a + bz)^{\frac{m}{2}} \times (C + Dz + Ez^2)^{\frac{n}{2}}$ ,  $Z$  étant une fonction rationnelle de  $z$  sans radical ni diviseur. Donc, &c. *Voy. (Mém. de Berlin, ibidem.)*

*Démonstration du Théorème XIII.*

(17.) En faisant  $\sin. v = x$ , &  $xx = z$ , les termes les plus composés de la transformée, dans le cas où  $U$  renferme des cosinus, seront de cette forme  $Z dz \times z^{\pm \frac{1}{2}} (a + bz)^{\frac{m}{2}} \times (g + hz)^{\frac{n}{2}}$ ,  $Z$  étant de même espèce que dans le cas précédent; & par conséquent ces différens termes seront réducibles à des arcs de sections coniques; & dans le cas où  $U$  renferme des sinus, les termes de la transformée seront de cette forme  $\frac{Z dz}{\sqrt{1-z}} \times (a + bz)^{\frac{m}{2}} \times (g + hz)^{\frac{n}{2}}$ . Donc, &c. *(Voy. Mém. de Berlin, 1746, p. 219, n.º XL.)*

*Démonstration du Théorème XIV.*

(18.) Soit  $\sin. v = x$ , &  $xx = z$ , & on aura une transformée de cette forme  $Z dz (a + bz)^{\frac{m}{2}} \times (g + hz)^{\frac{n}{2}} \times (e + fz)^{\frac{r}{2}}$ ,  $Z$  étant de la même forme que dans les cas précédens. Donc, &c.

*Démonstration du Théorème XV.*

(19.) Il suffit de faire  $\sin. v = x$ , & la différentielle se transformera en une autre réductible à des arcs de sections coniques. *(Voy. Mém. de Berlin, 1746, page 219, art. XLI; & page 221, art. XLVIII.)*

*Démonstration*

*Démonstration du Théorème XVI.*

(20.) Soit  $zz = u$ , &  $= \frac{t}{r}$ , la différentielle se transformera

en  $\frac{-\frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\lambda + \omega + \sigma}{2} - 2}{(ft + g)^{\frac{\omega}{2}} (pt + q)^{\frac{\lambda}{2}} (lt + r)^{\frac{\sigma}{2}}}$ , réductible aux arcs

de sections coniques, si  $-\frac{0}{2} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{\lambda + \omega + \sigma}{2}$  est  $= 0$  ou un nombre entier positif. Donc, &c.

*Démonstration du Théorème XVII.*

(21.) Soit, par exemple,  $U = C \cos. 3v + D \cos. v = (Ax^2 + B)\sqrt{(1 - xx)}$ , ce qui donne  $U dv = (Ax^2 + B)dx$ ; & soient  $m, n, s$ , des nombres entiers négatifs & impairs; la transformée sera, en faisant  $xx = z$ , de la forme

$\frac{(Az + B)dz}{\sqrt{(a+bz)^{\frac{m}{2}}(c+gz)^{\frac{n}{2}}(g+hz)^{\frac{s}{2}}}}$ , qui sera réductible aux arcs de

sections coniques, en faisant  $z = \frac{1}{u}$ , pourvu qu'un seul ou plusieurs à volonté des exposans  $m, n, s$ , soient  $> 1$ .

*Démonstration de la 1.<sup>re</sup> partie du Théorème XVIII.*

(22.) Soit  $a + bx = z$ , on aura  $z^{m-\omega}$  au lieu de  $x^m$  dans les différens termes de la transformée,  $\omega$  étant un nombre entier  $=$  ou  $< m$ ; & en faisant  $z = t^{-1}$ , les différens termes

de la transformée seront de la forme  $\frac{-m + \omega - 2 + s + \frac{q+p}{2}}{(t-1)^{\frac{1}{2}}(at+b)^{\frac{p}{2}}} dt$ ,

réductible aux arcs de sections coniques si l'exposant de  $t$  dans le numérateur est zéro ou un entier positif. Or si  $-m - 2 +$

$s + \frac{p+q}{2}$  est un tel nombre, à plus forte raison  $m - 2 + u + s + \frac{q+p}{2}$  en fera un aussi. Donc, &c.

*Démonstration de la 2.<sup>e</sup> partie du Théorème XVIII.*

(23.) Soit, par exemple,  $U = 1$ , &  $n, l$  négatifs, on aura la transformée  $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a+bx)^{\frac{n}{2}}(c+fx)^{\frac{l}{2}}}}$ ; faisant ensuite  $a+bx = z$ , &  $z = t^{-1}$ , on aura pour transformée une quantité de cette forme  $\frac{Adt \times t^{\frac{n+l}{2}-1}}{\sqrt{(a+bt+ct)(d+u)^{\frac{l}{2}}}}$  qui est réductible à des arcs de sections coniques. (*Mémoires de Berlin*, 1746, page 219, article XI.)

(24.) Il en sera de même si  $U = A \sin. pv + B \cos. qv$ ,  $p$  étant impair &  $q$  pair, & que  $-p - 2 + 1 + \frac{n+l}{2}$  &  $-q - 2 + 1 + \frac{n+l}{2}$  soient  $=$  ou  $> 0$  (8).

*Démonstration du Théorème XIX.*

(25.) Soient  $y$  &  $x$  les coordonnées de la courbe, & soit supposé  $y = xz$ , on aura l'élément  $y dx$  de l'aire de la courbe  $= z x dx$ , dont l'intégrale est  $\frac{zx^2}{2} = \int \frac{xx dz}{2}$ . Donc la quadrature de la courbe sera réductible aux fractions rationnelles, si  $xx dz$  y est réductible. Or c'est ce qui aura lieu dans l'équation proposée en mettant  $xz$  pour  $y$ , & tirant de l'équation la valeur de  $xx$  en  $z$ .

*Démonstration du Théorème XX.*

(26.) Elle est la même que celle du Théorème précédent (9).

*Démonstration du Théorème XXI.*

(27.) Soit  $z + dz$ , la valeur de  $z$  qui répond à  $y + dy$ ,  $x$  étant supposé constant;  $z + dz + d^2z$  la valeur de  $z$  qui répond à  $x + dx$  & à  $y + dy$ ; on aura évidemment  $dz = \omega dy$ ;  $d^2z = dx(p + \frac{dp}{dy} dy)$ ; & par conséquent  $z + dz + d^2z = z + \omega dy + dx(p + \frac{dp}{dy} dy)$ ; soit à présent  $z + \partial z$  la valeur de  $z$  qui répond à  $x + dx$  en prenant  $y$  constant; &  $z + \partial z + \delta z$  la valeur de  $z$  qui répond à  $x + dx$  & à  $y + dy$ ; on aura  $\partial z = p dx$ ,  $\delta z = dy(\omega + \frac{d\omega}{dx} dx)$ ; donc  $z + \partial z + \delta z = z + p dx + dy(\omega + \frac{d\omega}{dx} dx)$ . Or il est évident que  $z + dz + d^2z$  doit être la même que  $z + \partial z + \delta z$ . Donc  $\frac{dp}{dy}$  doit être  $= \frac{d\omega}{dx}$ . Donc, &c.

L'équation  $A$  donne la valeur de  $\omega$  en  $x, y, z$ , en prenant  $x$  pour paramètre, & la différentiation de cette équation donne la valeur de  $d\omega$  en faisant varier le paramètre  $x$ , & en prenant  $y$  constant. Il en est de même de l'équation  $B$  & de sa différentielle, dans lesquelles on prend d'abord  $y$  pour paramètre, & ensuite  $x$  constant, en faisant varier le paramètre (10).

*Démonstration du Théorème XXII.*

(28.) Pour que  $N = 0$ , ou en général  $N - a = 0$  satisfasse à l'équation  $dx - Mdy = 0$ ; il faut 1.° que  $dx \frac{dN}{dx} + dy \frac{dN}{dy} = 0$ ; 2.° qu'en mettant dans cette équation, au lieu de  $dx$  la valeur  $Mdy$ , l'équation finie qui en résultera  $M \frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dy} = 0$ , s'accorde avec l'intégrale supposée  $N - a = 0$ .



Or c'est ce qui résulte en effet de la supposition que  $z = 0$  rende  $u - a = 0$ .

*Démonstration du Théorème XXIII.*

(29.) Supposant  $P + Q = a$ , différentiant, & mettant pour  $dx$  &  $dy$  leurs proportionnelles  $N$  &  $M$ , on aura  $\frac{NdP}{dx} + \frac{MdP}{dy} + \frac{NdQ}{dx} + \frac{MdQ}{dy} = 0$ . Or si  $z = 0$ , donne  $u = 0$  ou  $= a$ ; cette dernière équation s'accordera avec l'équation supposée  $P + Q = a$ . Donc, &c. (11)

*Démonstration du Théorème XXIV.*

(30.) Une équation différentielle quelconque, étant donnée, on peut toujours aisément la transformer en une autre  $du + p dt = 0$ , dans laquelle  $t = 0$ , donne  $u = 0$ . Il en seroit de même si les différentielles étoient élevées dans l'équation à telles puissances qu'on voudroit.

En effet, 1.<sup>o</sup> supposons que  $u = a$  donne  $t = b$ , il n'y a qu'à supposer  $u - a = u'$ ,  $t - b = t'$ , & mettre dans l'équation  $u' + a$  au lieu de  $u$ ,  $du'$  au lieu de  $du$ ,  $t' + b$  au lieu de  $t$ , &  $dt'$  au lieu de  $dt$ . 2.<sup>o</sup> Si  $u$  ou  $t$ , ou toutes deux sont infinies à la fois, il n'y a qu'à faire  $u = \frac{1}{u'}$  &  $t = \frac{1}{t'}$ , & substituer à la place de  $u$ ,  $du$ ,  $t$ ,  $dt$ , leurs valeurs en  $u'$ ,  $du'$ ,  $t'$ ,  $dt'$ . Il est donc visible que dans une équation différentielle on peut toujours supposer  $u = 0$  lorsque  $t = 0$ .

(31.) On demande maintenant dans quel cas  $t = 0$  donnera  $u = 0$  à tout ce qu'on voudra. Après avoir pensé à ce problème & trouvé une méthode pour le résoudre, j'ai reçu le premier volume du *Calcul intégral* de M. Euler, & j'ai vu que ce grand Géomètre y avoit donné les principes nécessaires pour cet objet, & m'avoit ainsi prévenu en grande partie; mais il me semble qu'on peut, à plusieurs égards, étendre & perfectionner son travail.

(32.) M. Euler remarque d'abord, avec raison, que si on a, par exemple,  $du = \frac{dt}{\sqrt{t-a}}$  ou plus simplement  $du = \frac{dt}{\sqrt{t}}$ ; on aura, en supposant que  $t$  soit toujours  $= 0$ , & par conséquent  $dt = 0$ , une équation identique, & que cependant la supposition de  $t = 0$  ne satisfait pas réellement à l'équation différentielle proposée, quel que soit  $u$ , puisqu'on a en intégrant  $u = 2\sqrt{t} + C$ ,  $C$  étant une constante arbitraire, ce qui donne lorsque  $t = 0$ ,  $u = C$ , & par conséquent  $C = 0$ , puisque (*hyp.*)  $u = 0$  quand  $t = 0$ . Donc  $t = 0$  ne donne que  $u = 0$ , & non pas  $u$  de valeur quelconque. Mais M. Euler n'a pas, ce me semble, donné la raison de ce paradoxe. La voici, si je ne me trompe.

(33.) Soit  $t = z^2$ , on aura  $z = 0$ , & en substituant & réduisant  $du = 2dz$ , équation dans laquelle la supposition de  $t = 0$ , ou, ce qui est la même chose,  $z = 0$ , ne donne plus une valeur arbitraire à  $u$ . Cette équation provient de celle-ci,  $zdu = 2zdz$ , dont les deux membres sont multipliés par  $z$ , & doivent être divisés par cette quantité pour avoir la vraie valeur de  $du$ . C'est ainsi que l'équation  $uz = za$ , paroît se réduire à  $0 = 0$  quand  $z = 0$ ; cependant elle donne réellement  $u = a$ , & non pas  $u$  d'une valeur arbitraire.

(34.) M. Euler considère ensuite une équation de cette forme  $du = \frac{dt}{t^n}$ ,  $n$  étant  $> 1$ , & il remarque que l'intégrale est  $u = \frac{1}{(n-1)t^{n-1}}$ , plus  $C$  constante arbitraire. Il ajoute qu'en faisant  $t = 0$  &  $C$  infinie,  $u$  est alors *indéterminée*. C'est ce qui ne se voit pas clairement, ce me semble. Car soit (comme nous le supposons toujours)  $u = 0$  lorsque  $t = 0$ ,  $C$  sera  $= \frac{1}{0^{n-1}}$ , & en faisant  $t = 0$ ,  $u$  semble devoir rester toujours égale à zéro.

(35.) La seule manière de faire voir que  $u$  peut être ici supposée tout ce qu'on voudra, c'est de remarquer 1.<sup>o</sup> que  $u$  étant

$= 0$  (*hyp.*) lorsque  $t = 0$ ,  $C$  doit nécessairement être infinie.  
 2.<sup>o</sup> que  $C$  étant infinie,  $u$  est nécessairement infinie lorsque  $t$  est finie, quelque petite qu'on la prenne. Donc  $u$  qui est  $= 0$  lorsque  $t = 0$ , devient infini lorsque  $t$  est finie, quelque petite qu'on la suppose. Donc  $u$  a toutes les valeurs possibles entre  $t = 0$ , &  $t$  fini & très-petit. Donc  $t$  supposé infiniment petit ou (ce qui en Géométrie revient au même) égal à zéro, donne pour  $u$  toutes les valeurs possibles.

(36.) Mais comme ce raisonnement, quoique démonstratif, pourroit encore souffrir quelques difficultés auprès de certains Lecteurs, soit  $t^n du = dt$ ,  $n$  étant  $> 1$ , & je remarque,  
 1.<sup>o</sup> que si on fait  $t = z^m$ ,  $m$  étant une quantité positive,  $t = 0$  donnera  $z = 0$ ; 2.<sup>o</sup> que pour lors on aura  $z^{mn} du = m z^{m-1} dz$ , & qu'on ne peut jamais donner à l'équation cette forme  $du = A z^k dz$ ,  $k$  étant 0 ou positif, puisque  $n$  étant  $>$  ou même simplement  $= 1$ ,  $m - mn - 1$  est nécessairement négatif. Donc en ce cas l'équation sera nécessairement de cette forme  $z^r du = A dz$ , dans laquelle  $r$  est positif; donc alors  $z = 0$ , donne  $0 = 0$ , & par conséquent  $u$  de valeur quelconque.

(37.) Il faut donc pour que  $t = 0$  rende  $u$  de valeur quelconque, que l'équation différentielle entre  $u$ ,  $t$ ,  $du$ ,  $dt$  soit telle qu'en faisant  $t = z^n$ , &  $n$  étant positif, on ne puisse jamais supposer à  $n$  une telle valeur que  $z$  disparoisse du coefficient de  $du$ . D'où l'on tire cette règle:

(38.) L'équation entre  $u$ ,  $t$ ,  $du$ ,  $dt$  étant donnée telle qu'on voudra, de manière même que  $dt$  &  $du$  y soient mêlées entre elles & élevées à des puissances quelconques, on fera d'abord disparoître les radicaux & les fractions, & on ordonnera l'équation par rapport à  $du$ . On examinera ensuite le coefficient  $A t^m + B u^n t^p + C u^r t^s$ , &c. de la plus haute puissance de  $du$  que j'appelle  $du^h$ ; on verra si dans tous les termes de ce coefficient l'exposant  $m$ ,  $p$ ,  $s$ , de la puissance de  $t$  est  $=$  ou plus grand que la somme des exposants  $q + \sigma$  de  $t$  & de  $dt$  dans tout autre terme  $t^q dt^\sigma \times u^k du^{h-\sigma}$ ; je dis qu'en ce cas  $t = 0$  donnera  $u =$  à tout ce qu'on voudra.

(39.) En effet, puisque  $m$ , par exemple, est  $=$  ou  $> p + \sigma$ , on aura beau supposer  $t = z^n$ , on ne parviendra jamais (*art. précédent*) à délivrer de la quantité  $z$  le coefficient de la plus haute puissance de  $du$ ; tous les termes contiendront donc nécessairement ou  $z$  ou  $dz$ , de sorte qu'en faisant  $z = 0$ , ce qui donne  $dz = 0$ , l'équation se réduira à  $0 = 0$ , & par conséquent  $u$  pourra être supposée tout ce que l'on voudra.

(40.) Mais quand dans tous les termes dont il s'agit, c'est-à-dire qui multiplient  $du^A$ , l'exposant de  $t$  sera  $< p + \sigma$ , ou quand cela arrivera même dans un seul de ces termes, alors en supposant  $t = z^n$ , & divisant par  $z^{m-n}$  si  $m$  est le plus petit exposant de  $t$  dans le coefficient dont il s'agit, on aura nécessairement un terme où ne se trouveront ni  $z$  ni  $dz$ ; & par conséquent la supposition de  $t$  &  $dt = 0$ , ne donnera pas  $0 = 0$ .

(41.) En effet, puisqu'il y a un des termes du coefficient de  $du^A$  où l'exposant de  $t$  est  $< p + \sigma$ , soit  $m$  le plus petit des exposants de  $t$ , & on aura nécessairement  $m < p + \sigma$ . Cela posé, soit  $t = z^n$ , ce qui donne  $t^p dt^\sigma = n^\sigma z^{pn} + \sigma n - \sigma dz^\sigma$ ; & si  $p = m$ , on n'a qu'à supposer  $n = 1$ , & diviser par  $z^m$  ou  $z^p$ , on aura un terme où  $du^A$  n'aura point  $z$  pour multiplicateur; & un autre terme où il n'y aura point de  $z$  non plus, mais seulement  $dz^\sigma$ . Donc alors en faisant  $z = 0$  &  $dz = 0$ , on n'aura pas  $0 = 0$ , &  $u$  ne pourra être supposée de valeur quelconque. Si  $p$  est  $> m$ , alors divisant par  $z^{m-n}$ , on aura un terme où  $du^A$  sera sans  $z$ , & d'autres termes où l'exposant  $p n + \sigma n - m n \sigma$ , de  $z$  sera toujours positif ou zéro, pourvu qu'on prenne  $n = \frac{\sigma}{p + \sigma - m}$ ; donc en supposant  $n =$  ou  $>$  que la plus grande des valeurs de  $\frac{\sigma}{p + \sigma - m}$ , on aura toujours  $p n + \sigma n - m n - \sigma =$  ou  $> 0$ , quel que soit  $p$  &  $\sigma$ . Donc  $z$  &  $dz = 0$  ne donneront pas  $0 = 0$ , ni par conséquent  $u$  de valeur quelconque (12).

(42.) On peut conclure de ce qui précède, que si on exprime  $u$  par une série de puissances de  $t$  suivant les méthodes

connues, & que  $u = At^n$  soit la 1.<sup>re</sup> valeur de  $u$  en  $t$ , la supposition de  $t = 0$ , donnera  $u$  telle qu'on voudra dans les cas suivans.

1.<sup>o</sup> Si  $A$  est arbitraire,  $n$  étant positif ou négatif; en effet  $n$  étant positif, &  $A = \infty$  ou  $\frac{1}{A} = 0$ ,  $t$  sera  $= 0$ , quel que soit  $u$ ; &  $n$  étant négatif, &  $A = 0$ , on aura  $t^{-n} = \frac{0}{n}$ , &  $t$  sera encore  $= 0$ , quel que soit  $u$ .

2.<sup>o</sup> Si  $A$  étant finie & donnée,  $n$  est négatif. Car pour que  $u$  soit égal à zéro, il faut que la valeur de  $u$  contienne un autre terme  $Bt^k$ , dans lequel puisque  $k$  est nécessairement  $< n$ , il s'ensuit que  $B$  doit être infinie, &  $= -A \cdot 0^{n-k}$ . Donc  $t$  finie & très-petite donnera  $u$  infinie. Donc, &c.

3.<sup>o</sup> Dans le 1.<sup>er</sup> cas  $t$  sera aussi tout ce qu'on voudra;  $u$  étant  $= 0$ ; car il n'y a qu'à supposer  $A = 0$ , ce qui est permis, puisque  $A$  est arbitraire. Mais si on avoit  $u = At^n$ ,  $A$  étant donnée &  $n$  positif, alors on ne pourroit rien conclure par cette voie sur la valeur de  $u$ , lorsque  $t = 0$ , ni sur celle de  $t$ , lorsque  $u = 0$ ; car l'équation  $u = At^n$ , par exemple, peut venir également de l'équation  $du = A dt$ , ou de  $\frac{A dt}{u^n} = \frac{dt}{t^n}$ , dont la première ne donne point, & ne sauroit jamais donner  $u$  de valeur quelconque,  $t$  étant  $= 0$ , & dont la seconde au contraire peut donner  $t = 0$ ,  $u$  étant tout ce qu'on voudra, & réciproquement.

(43). Soit maintenant donnée une équation entre  $t$ ,  $u$ ;  $dt$ ,  $du$ . Après avoir fait évanouir les radicaux, s'il y en a, on la disposera sur le triangle analytique, en mettant les termes  $t^m u^p dt^k du^r$  dans les mêmes cases où seroient les termes  $t^{m+k} u^{p+r}$ , si l'équation étoit finie. On cherchera ensuite, par les méthodes connues, le premier terme de la valeur de  $u$  en  $t$ , lorsque  $t$  est 0 ou infiniment petite, & le premier terme de la valeur de  $t$  en  $u$ , lorsque  $u$  est 0 ou infiniment petite; & par les valeurs de  $A$  & de  $n$ , on trouvera aisément dans les cas énoncés

énoncés ci-dessus (*art. précéd.*) si  $t = 0$  donne  $u =$  à tout ce qu'on voudra, & réciproquement.

Cette méthode est fondée 1.<sup>o</sup> sur les propriétés connues du triangle analytique, 2.<sup>o</sup> sur cette considération, que si dans la quantité  $t^m u^p dt^k du^r$ , on met  $At^n$  pour  $u$ , on aura une quantité de même dimension qu'en faisant la même substitution dans  $t^{m+k} u^{p+r}$ . Au reste, la méthode proposée ici, ne doit être employée que dans les cas où l'on n'auroit pas pour premier terme de la valeur de  $u$ ,  $u = At^n$ ,  $A$  étant donnée &  $n$  positif. Dans ces cas-là il faudroit avoir recours à la méthode générale donnée ci-dessus, qui d'ailleurs est plus simple dans tous les cas que celle du triangle analytique; mais j'ai cru qu'on ne seroit pas fâché de voir de quel usage le triangle analytique ou le parallélogramme de Newton, peut être dans cette recherche. On peut remarquer en passant, que plusieurs termes peuvent ici se trouver à la fois dans la même case du triangle analytique; par exemple, les termes où seroient  $u dt$  &  $t du$ , lesquels se trouvent dans la case où seroit le terme  $tu$  de l'équation finie. On voit aussi comment le coefficient  $A$ , qui n'est jamais arbitraire quand l'équation entre  $u$  &  $t$  est finie, peut l'être quand elle renferme les différentielles  $du$ ,  $dt$ ; par exemple, si on avoit  $t du - nudt = 0$ , on auroit par le triangle analytique, en faisant  $u = At^k$ , l'équation  $-nA + kA = 0$ , d'où  $k = n$ , &  $A$  tout ce qu'on voudra (13).

(44.) Il n'est pas difficile de voir que les méthodes précédentes s'étendent au cas où l'équation entre  $u$ ,  $t$ , contiendrait des différences secondes, troisièmes, &c. & que  $t = 0$  donnera  $u$  de valeur quelconque, si l'exposant  $m$  de  $t$  dans chacun des termes  $At^m u^k dt^h dd u^r$ , (ou  $dt$  ni ses différences ne se trouvent pas) est  $=$  ou  $>$  que la somme des exposans  $\rho + \sigma + \mu$  de  $t$  & de ses différences dans les termes  $B t^\rho dt^\sigma dd t^\mu \times u^\rho du^\sigma dd u^\mu$ . C'est une suite de ce qui a été démontré ci-dessus.

(45.) Voici maintenant l'usage de ces méthodes, pour trouver des intégrales particulières & algébriques d'une équation, sans

avoir recours aux opérations du Calcul intégral, & pour ainsi dire, par la seule inspection de la transformée.

(46.) Soit  $dx + a dy = 0$ , & ayant pris tant d'indéterminées nouvelles qu'on voudra,  $z, u, t$ , &c. en nombre  $n$ , soient formées  $n$  équations algébriques entre  $x, y, z, u, t$ , &c. & soit  $du + g dt = 0$ , la nouvelle équation différentielle transformée qui résulte de ces équations. Soit cherchée, par le moyens des équations algébriques, l'équation entre  $x, y, u$ , & celle entre  $x, y, t$ ; soit fait  $u = 0$  dans la 1.<sup>re</sup>; je dis que si l'équation  $du + g dt = 0$  est telle que  $u$  y soit  $= 0$  quel que soit  $t$ , l'équation en  $x$  & en  $y$  résultante de  $u = 0$  fera une équation intégrale algébrique de la proposée; ce qui est évident, puisque  $u$  (*hyp.*) est toujours égale à zéro. Il en sera de même de l'autre équation entre  $x, y, t$ , en y faisant  $t = 0$ , si  $du + g dt = 0$  donne  $t = 0$ , quel que soit  $u$  (14).

#### Démonstration du Théorème XXV.

(47.) 1.<sup>o</sup> En faisant  $y = c p^d$ , & supposant  $dx$  constante; on aura  $ddp + (3 + b) p dp dx + (a + b + 1) p^3 dx^2 = 0$ , qui se réduit à l'homogénéité, en faisant  $dx = u dp$ , &  $u = p t$ ,  $t$  étant égal à  $-3$ .

2.<sup>o</sup> L'équation  $d(y^2 ddy) + a dy^3 + b y dy ddy = 0$  se change en  $y^2 d^3 y + (b + 2) y dy ddy + a dy^3 = 0$ , qui se réduit au cas précédent.

3.<sup>o</sup> L'équation  $A y^p ddy + B y^{p-1} dy^2 + C dx^2 = 0$ , donne, étant différenciée,  $y^2 d^3 y + (p + \frac{2B}{A}) y dy ddy + \frac{B(p-1) dy^3}{A} = 0$ , qui se réduit au premier cas.

4.<sup>o</sup> Il en est de même de  $A d(y^p dy) + D y^{p-1} dy^2 + C dx^2 = 0$  qui se réduit évidemment au cas précédent (15).

*Démonstration du Théorème XXVI.*

(48.) On suppose  $k + 2p + q$  constant, afin que les quantités infiniment petites soient du même ordre dans l'équation. Maintenant puisque  $n + k + p$  est constant, on aura, en faisant  $y = c^{t dx}$ , une quantité d'où les exponentielles disparaîtront, & qui ne contenant que  $t, dt$  &  $dx$  pourra s'intégrer sans peine.

*Démonstration du Théorème XXVII.*

(49.) Soit  $dx = u dp$ , on aura  $ddp = -\frac{du dp}{u}$ ; & l'équation transformée aura pour premier terme  $-\frac{du}{u}$ , & pour chacun des autres une quantité de cette forme  $Bp^q u^{2-r} dp$ . Soit  $u = pz^t$ , on aura  $-\frac{dp}{p} - \frac{t dz}{z} + Bp^{q+2-r} \times z^{2-r} dp$ , &c.  $= 0$ . Or il est visible que cette équation sera réductible à l'homogénéité, & par conséquent intégrable, si  $q + 2 - r + (2 - r)t = -1$ , c'est-à-dire, si  $\frac{q+3-r}{2-r}$  est constante dans chaque terme & égale à l'indéterminée  $t$ . Donc, &c. (16).

*Démonstration du Théorème XXVIII.*

(50.) En supposant  $y = c^{sq dx}$ , il est facile de voir que si la 2.<sup>e</sup> équation a lieu, la transformée sera de la forme  $ddq + dq dx \phi q = 0$ , qui s'intègre aisément en faisant  $dx = u dq$ , ce qui donne  $-\frac{du}{u^2} + dq \phi q = 0$ ; & si la 1.<sup>re</sup> équation a lieu, on aura pour transformée  $ddq + dx^2 \phi q = 0$  qui s'intégrera de même.

Il est aisé de voir que la 1.<sup>re</sup> équation aura lieu; 1.<sup>o</sup> si

M ij



92 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

$B = 0, C = 0, D = 0, F = 0$ , & si  $3A + E = 0$ , &  $k = 1$ ; ou 2.<sup>o</sup> si  $A = 0, C = 0, E = 0, F = 0$ , & si  $3B + D = 0$ , &  $p = -1$ ; ou 3.<sup>o</sup> si  $A = 0, D = 0, 3B + E = 0, k = p + 1, 3C + F = 0, l = r + 1$ , &c. On trouvera de même les conditions nécessaires pour que la 2.<sup>e</sup> équation ait lieu.

*Démonstration du Théorème XXIX.*

(51.) Faisant  $y = csp^{dx}$ , & multipliant par  $x^2$ , la transformée est  $x^2 dp + (1 + a)x^2 p p dx + bxp dx + Cdx + ep^m x^m dx + fp^k x^k dx + \&c. = 0$ ; & supposant  $px = z$ , on aura  $x dz + (1 + a)z^2 dx + (b - 1)z dx + Cdx + ez^m dx + fz^k dx, \&c. = 0$ , équation qui est évidemment toute séparée (17).

*Démonstration du Théorème XXX.*

(52.) Soit  $y = csp^{dx}, p = Fz x^n = -\frac{H}{x} z x^n$ , on aura la transformée  $Fx^k dz + x^{2n} dx \times [(1 + a)F^2 z^2 + Gz + B] = 0$ ; équation toute séparée (18).

*Démonstration du Théorème XXXI.*

(53.) Soit multipliée l'équation par  $u^{a+1}$ , elle deviendra  $d(u^a du) + \xi u^a du dx + \frac{X u^{\omega + a + 1} dx^p}{dx^p - 2} = 0$ ; or il est aisé de voir que cette équation est intégrable si  $\omega + a + 1 = ap$ , c'est-à-dire, si  $a = \frac{\omega + 1}{p - 1}$ ; car en faisant  $u^a du = z dx$ , elle devient  $dz + \xi z dx + X z^p dx = 0$ .

*Démonstration du Théorème XXXII.*

(54.) Soit  $y = zu$ , & l'équation  $ddy + yXdx^2 + \frac{Edx^2}{y^3} = 0$  se changera en  $uddz + 2dudz + zddu + Xzudx^2 + \frac{Edx^2}{z^3u^3} = 0$ ; ou (à cause de  $ddz + Xzdx^2 = 0$  (hyp.)) en  $2dudz + zddu + \frac{Edx^2}{z^3u^3} = 0$ ; donc en multipliant par  $z$ , on aura  $d(zzdu) + \frac{Edx^2}{z^2u^3} = 0$ , ou  $z^2du d(zzdu) + \frac{Edudx^2}{u^3} = 0$ ; ce qui donne  $\frac{z^2du}{2} + Edx^2(A - \frac{1}{2u^2}) = 0$ ;  $A$  étant une constante. Donc  $\frac{-du}{A - \frac{1}{2u^2}} = \frac{Edx^2}{z^2}$ ; & comme  $z$  est connu

en  $x$  (hyp.), on aura donc  $u$ , & par conséquent  $y$ .

*Démonstration du Théorème XXXIII.*

(55.) Soit multipliée l'équation  $yddz + Adydz + Ey - 2A + 1z^qdx^2 = 0$  par  $y^A - 1$ , on aura  $d(y^Adz) + Ey - A z^qdx^2 = 0$ , ou  $y^Adzd(y^Adz) + Ez^qdzdx^2 = 0$ ; donc  $\frac{y^{2A}dz^2}{2} + Edx^2(\frac{z^{q+1}}{q+1} - C) = 0$ .  
Donc, &c.

*Démonstration du Théorème XXXIV.*

(56.) Soit multipliée l'équation  $yzzddz + Cydz^2 + Azdzdy + Ey - 2A + 1z^qdx^2 = 0$  par  $z^{C-1}y^A - 1$ ; on aura  $d(y^Az^Cdz) + Ey - Az^{q+C-1}dx^2 = 0$ , ou  $y^Az^Cdzd(y^Az^Cdz) + Ez^{q+C-1}dzdx^2 = 0$ ; d'où  $\frac{y^{2A}z^{2C}dz^2}{2} + Edx^2(\frac{z^{q+C}}{q+C} - B) = 0$ .  
Donc, &c.

*Démonstration du Théorème XXXV.*

(57.) Si on met l'équation  $\frac{ddy}{y} + \frac{Edx^2}{y^2} + Xdx^2 = 0$  sous la forme  $d\left(\frac{dy}{y}\right) + \frac{dy^2}{y^2} + \frac{Edx^2}{y^2} + Xdx^2 = 0$ , & qu'on fasse  $y = Au^p$ , on aura  $\frac{ddu}{u} + \frac{(p-1)dx^2}{u^2} + E \times A^{-2} u^{-2p} dx^2 + Xdx^2 = 0$ , ou  $\frac{ddu}{u} + \frac{adu^2}{u^2} + Du^{-2a-2} dx^2 + Xdx^2 = 0$ , qui sera par conséquent intégrable dans les cas où  $ddy + yXdx^2 = 0$  le sera (19).

*Démonstration du Théorème XXXVI.*

(58.) Soit mise l'équation sous cette forme  $\frac{ddy}{dy} + \zeta dy + \frac{\sigma dx^k}{dy^{k-1}} = 0$ , & soit mis  $\frac{dY}{Y}$  pour  $\zeta dy$ , ce qui est toujours possible, en faisant  $Y = e^{\int \zeta dy}$ , on aura  $d \log. \left(\frac{Ydy}{dx}\right) + \frac{\sigma dx^k}{dy^{k-1}} = 0$ , & faisant  $\frac{Ydy}{dx} = p$ , on aura  $\frac{dp}{p} + \sigma Y^k p^{-k} dy = 0$ , qui est évidemment intégrable.

*Démonstration du Théorème XXXVII.*

(59.) On aura (art. précéd.)  $\frac{ddy}{dy} + \frac{dY}{Y} + \frac{pdx}{x} + \frac{x^\omega dx^k}{dy^{k-1}} = 0$ , ou  $d \log. \left(\frac{Yx^p dy}{dx}\right) + \frac{x^\omega dx^k}{dy^{k-1}} = 0$ . Faisant donc  $\frac{Yx^p dy}{dx} = p$ , on aura  $\frac{dp}{p} + \sigma x^{\omega+kp} p^{-k} \times Y^k dy = 0$ , équation intégrable, si  $\omega + kp = 0$ . (20)

*Démonstration du Théorème XXXVIII.*

(60.) Toute équation de cette forme  $dp + dx \phi \left( \frac{p}{x} \right) = 0$  ou  $dp + dx \phi \left( \frac{x}{p} \right) = 0$  est intégrable; donc en l'écrivant ainsi  $\frac{dp}{p} + \frac{dx}{p} \phi \left( \frac{p}{x} \right) = 0$ , & mettant pour  $p$  la valeur  $\frac{Y \times X dx^m}{dy^n}$ , on aura  $\frac{m ddx}{dx} - \frac{m ddy}{dy} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{\frac{Y \times X dx^m}{dy^n}}{\frac{X \times Y dx^{m-1}}{dy^{n-1}}} \phi \left( \frac{X \times Y dx^m}{x dy^n} \right) = 0$ . Faisant successivement  $ddx = 0$  &  $ddy = 0$ , on aura les équations énoncées dans le théorème dont il s'agit ici (21).

*Démonstration du Théorème XXXIX.*

(61.) Soit mise l'équation sous cette forme  $\frac{ddt}{t} + \frac{\xi dt dx}{t} + \frac{\zeta dt^2}{t^2} + X dx^2 = 0$ ; & faisant  $t = Az^q$ , on aura pour transformée  $\frac{q d d \zeta}{\zeta} + \frac{q \times (q-1) d \zeta^2}{\zeta^2} + \frac{\zeta q^2 d \zeta^2}{\zeta^2} + \frac{\xi q d \zeta dx}{\zeta} + X dx^2 = 0$ ; & supposant  $q(q-1) + \xi q^2 = 0$  ou  $q-1 + \xi q = 0$ , on aura la transformée  $q d d \zeta + \xi q d \zeta dx + X \zeta dx^2 = 0$ . Or s'il y a une seule valeur de  $\zeta$  qui satisfasse à cette équation, on pourra intégrer en général l'équation  $q d d \zeta + \xi q d \zeta dx + X \zeta dx^2 + X' dx^2 = 0$  ou  $\frac{q d d \zeta}{\zeta} + \frac{\xi q d \zeta dx}{\zeta} + X dx^2 + \frac{X' dx^2}{\zeta} = 0$ , ou  $\frac{ddt}{t} + \frac{\xi dt dx}{t} + \frac{\zeta dt^2}{t^2} + X dx^2 + \frac{X' dx^2}{A^{-\frac{1}{q}}} \times t^{-\frac{1}{q}} = 0$ , ou enfin  $t d d t + \xi t dt dx + \zeta dt^2 + X t^2 dx^2 + X' dx^2 \times t^{\frac{1}{q}-1}$ , en multipliant par  $t^2$  & mettant pour  $q$  la valeur  $\frac{1}{1+\xi}$ .

*Démonstration du Théorème XL.*

(62.) Soient  $\theta', \theta'', \theta''', \&c.$  les  $n$  valeurs de  $\theta$ , on aura  $n$  équations de la forme  $d^n \theta + Z d^{n-1} \theta dz + \dots \xi dz^n = 0$ , & en retranchant ces équations les unes des autres, on aura  $n - 1$  équations de la forme  $d^n \vartheta + \dots + Z' \vartheta dz^n = 0$ , dans lesquelles  $\vartheta$  sera connue, & aura  $n - 1$  valeurs, puisqu'il y a  $n - 1$  valeurs différentes de  $\theta' - \theta'', \theta' - \theta''', \theta'' - \theta''' \&c.$  Donc, comme M. de la Grange & moi l'avons fait voir ailleurs, (*Mém. de Turin, tom. III.*) on aura l'intégrale de la proposée (22).

*Démonstration du Théorème XLI.*

(63.) Si on a l'intégrale générale de l'équation  $d^n \theta + Z d^{n-1} \theta dz + \dots + \xi dz^n = 0$ , on aura celle de la même équation en mettant pour  $\xi$  telle autre fonction de  $z$  qu'on voudra; puisque l'intégrale générale supposée renferme  $n$  constantes, d'où l'on peut tirer  $n$  valeurs particulières de  $\theta$ . Donc, &c. (23)

*Démonstration du Théorème XLII.*

(64.) En effet, si l'équation étoit, par exemple, du troisième ordre, & que  $A\theta'$ , &  $B\theta'$ , fussent les deux valeurs données, on trouveroit en faisant par notre méthode  $\theta = A\theta'z$ , que  $z$  seroit constant, en sorte que  $dz, d^2z, \& d^3z$ , seroient égaux à zéro, & la transformée se réduiroit à  $0 = 0$ , équation d'où l'on ne pourroit tirer aucune nouvelle valeur de  $z$ . Sur quoi on observera que toutes les fois qu'on a une valeur  $\theta'$  qui satisfait à l'équation privée de son dernier terme  $\xi dz^n$ , la quantité  $A\theta'$  y satisfera de même,  $A$  étant une constante quelconque; d'où il s'ensuit que  $\theta', A\theta', B\theta', \&c.$  n'indiquent réellement qu'une seule & même valeur. Il faut donc non-seulement que la valeur de  $\theta'$  soit différente dans les expressions données de  $\theta$ , mais que ces valeurs ne soient pas entr'elles en raison constante.

*Démonstration*

*Démonstration du Théorème XLIII.*

(65.) Soit d'abord  $dp + \sigma p dx = 0$ , &  $p'$  une valeur de  $p$  qui y satisfasse; en faisant  $p = p' k$ , substituant & réduisant, on aura  $p' dk = 0$ , ou  $k$  constant. Donc la valeur générale & complète de  $p$  est  $Ap'$ .

(66.) Soit maintenant  $ddu + \xi d u dx + X u dx^2 = 0$ ; & soient  $u', u''$  deux valeurs qui y satisfassent; en faisant  $u = u' z$ , on aura une transformée  $ddz + X' dz dx = 0$ , dans laquelle une des valeurs de  $z$  fera  $\frac{u''}{u'}$ ; donc une des valeurs de  $\frac{dz}{dx}$

est  $\frac{d(\frac{u''}{u'})}{dx}$ ; donc (art. précéd.) la valeur générale de  $\frac{dz}{dx}$

est  $A \frac{d(\frac{u''}{u'})}{dx}$ ; donc en général  $z = \frac{A u''}{u'} + B$ ; donc  $u = A u'' + B u'$ .

(67.) De même si on a  $d^3u + \xi d d u dx + \zeta d u dx^2 + X u dx^3 = 0$ , qu'on ait trois valeurs de  $u$ , savoir  $u', u'', u'''$ , & qu'on fasse  $u = u' z$ , on aura (Mém. de Turin, tome III, p. 381) une transformée  $d^3z + \xi' dz^2 dx + \zeta' dz dx^2 = 0$ , dans laquelle  $z$  a deux valeurs connues  $\frac{u''}{u'}$ ,  $\frac{u'''}{u'}$ ; & par con-

séquent  $\frac{dz}{dx}$ , deux valeurs connues  $\frac{d(\frac{u''}{u'})}{dx}$ ,  $\frac{d(\frac{u'''}{u'})}{dx}$ . Donc

la valeur générale de  $\frac{dz}{dx}$  fera  $A \frac{d(\frac{u''}{u'})}{dx} + B \frac{d(\frac{u'''}{u'})}{dx}$ ;

donc  $z = \frac{A u''}{u'} + \frac{B u'''}{u'} + C$ . Donc  $u = A u'' + B u''' + C u'$ .

Mém. 1769.

N

(68.) Il est visible que cette démonstration s'étend aux équations supérieures. Donc, &c.

*Démonstration du Théorème XLIV.*

(69.) Soit  $\theta = \vartheta + \omega$ , on aura évidemment  $n$  valeurs de  $\omega$  qui satisferont à l'équation privée de son dernier terme, & ces valeurs seront évidemment  $\theta' - \vartheta$ ,  $\theta'' - \vartheta$ , &c. Donc la valeur générale de  $\omega$  sera  $A(\theta' - \vartheta) + B(\theta'' - \vartheta) + C(\theta''' - \vartheta)$ , &c. Donc, &c.

*Démonstration du Théorème XLV.*

(70.) Il est clair qu'on aura  $m - 1 + p - 1 + q - 1 + r - 1$ , &c. valeurs qui satisferont à l'équation privée de son dernier terme. Donc, puisque ces valeurs doivent être au nombre de  $n - 1$ , au moins pour rendre l'intégration générale possible dans le cas proposé (*Mém. de Turin, tome III*); il s'ensuit évidemment que si  $s$  est le nombre des quantités  $m, p, q, r$ , &c. on doit avoir  $m + p + q + r + \dots = n + s - 1$ . Donc, &c. (24)

*Démonstration du Théorème XLVI.*

(71.) La valeur générale de  $u$  dans l'équation  $du + uZdz + \xi Z' dz = 0$  est donnée par l'équation  $ucfZdz + f\xi \times Z'cfZdz = B$ ; donc la valeur générale de  $u$ , en supposant  $\xi = 0$ , est  $A'c - fZdz$ ; or cette valeur générale est  $B' \vartheta$ . Donc,  $cfZdz = \frac{A}{\vartheta}$ . Donc, &c.

*Démonstration du Théorème XLVII.*

(72.) Soient  $\theta', \theta''$  les deux valeurs qui satisfont à l'équation  $d\theta + Z\theta dz + \xi\theta dz^2 = 0$ , & soit  $\theta = \theta' \omega$ , nous aurons pour transformée (*Mém. de Turin, tome III, p. 381.*)  $2d\theta'd\omega + \theta'dd\omega + Z\theta'd\omega dx + \xi dz^2 = 0$ , ou  $dd\omega + d\omega \left( \frac{2d\theta'}{\theta'} + Zdx \right) + \frac{\xi dz^2}{\theta'} = 0$ ; donc,

puisque  $\frac{\theta''}{\theta}$  est une valeur de  $\omega$ , & par conséquent  $\frac{d(\frac{\theta''}{\theta})}{dz}$  une valeur de  $\frac{d\omega}{dz}$ , la valeur générale de  $\frac{d\omega}{dz}$  sera (*art. précéd.*)

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{D d(\frac{\theta''}{\theta})}{dz} - \frac{d(\frac{\theta''}{\theta})}{dz} \int \frac{\xi dz}{\theta d(\frac{\theta''}{\theta})}; \text{ donc l'inté-}$$

grale complete est  $\omega = A + \frac{D\theta''}{\theta} - \frac{\theta''}{\theta} \int \frac{\xi \theta' dz^2}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$   $+ \int \frac{\xi \theta'' dz^2}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$ ; donc la valeur générale & complete de  $\theta$  est  $A\theta' + D\theta'' - \theta' \int \frac{\theta \xi dz^2}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$   $+ \theta' \int \frac{\xi \theta'' dz^2}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$ . On peut même supprimer les deux premiers termes, en supposant que les quantités qui sont sous le signe  $\int$  ne soient pas  $= 0$ , quand  $z = 0$ , mais renferment chacune une constante arbitraire (25).

#### Démonstration du Théorème XLVIII.

(73.) Soit  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{bx^q dy}{dx} + \frac{ady}{x dx} + eyx^{q-1} = 0$ , & soit supposé  $y = Ax^r + Bx^{r+p} + Cx^{r+2p}$ , &c. on aura la transformée  $[Ar \times (r-1) + Aar] x^{r-2} + [B(r+p)(r+p-1) + Ba(r+p)] x^{r+p-2} + [C(r+2p)(r+2p-1) + Ca(r+2p)] \times x^{r+2p-2}$ , &c.  $+ (Abx^r + Aex^{q-1}) + [Bb(r+p) + Be] x^{r+p+q-1} + [Cb(r+2p) + Ce] \times x^{r+2p+q-1}$ , &c.  $= 0$ . Équation dans laquelle on peut faire différentes suppositions.

(74.) On peut supposer en premier lieu que le 1.<sup>er</sup> terme de la seconde partie réponde au 1.<sup>er</sup> terme de la première, ce qui ne pourra arriver que dans le seul cas de  $q = -1$ ; d'où l'on tire pour ce cas particulier  $r(r-1) + ar +$



$b r + e = 0$ , &  $(r + p) (r + p - 1) + b (r + p) + e = 0$ . Donc, on aura deux valeurs de  $r$ , que j'exprime ainsi  $P \pm \sqrt{Q}$ , & deux valeurs de  $r + p$  qui seront les mêmes, & que j'exprime aussi par  $P \pm \sqrt{Q}$ ; d'ailleurs  $A$  &  $B$  seront ce qu'on voudra, & les autres coefficients  $C, D$ , &c. à l'infini, devront être supposés égaux à zéro. Donc  $y = Ax^P + \sqrt{Q} + Bx^P - \sqrt{Q}$ ; de-là il est aisé de conclure que  $y = A'x^P + \sqrt{Q} + B'x^P - \sqrt{Q}$  est la valeur générale & complète de  $y$ , puisque  $x^P + \sqrt{Q}$  &  $x^P - \sqrt{Q}$  en sont deux valeurs particulières.

(75.) Ce cas est celui de l'équation  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{f dy}{x dx} + \frac{ey}{x^2} = 0$ , qui en faisant  $y = e^{\int p dx}$ , se change en  $dp + p p dx + \frac{f p dx}{x} + \frac{e dx}{x^2} = 0$ , laquelle devient homogène en faisant  $u = z^{-1}$ , & par conséquent intégrable. Nous ne nous arrêtons donc pas au cas de  $q = -1$ .

(76.) Supposons en second lieu que le 1.<sup>er</sup> terme de la seconde partie soit mis sous le 2.<sup>d</sup> terme de la première, & on trouvera 1.<sup>o</sup>  $p - 2 = q - 1$ , ou  $p = q + 1$ . 2.<sup>o</sup> Le coefficient  $A$  sera tel qu'on voudra dans l'équation  $Aar + Ar(r - 1) = 0$ , qui donne ou  $r = 0$ , ou  $r - 1 + a = 0$ , c'est-à-dire,  $r = 1 - a$ . 3.<sup>o</sup> Il est aisé de voir que le coefficient d'un terme quelconque du rang  $k$  sera égal au précédent pris avec un signe contraire, & multiplié par . . . .

$\frac{b[r + p(k - 2)] + e}{(r + pk - p)(r + pk - p - 1 + a)}$ . D'où il est évident que la série sera finie si  $br + pb(k - 2) + e = 0$ ; c'est-à-dire, si  $\frac{-e - br}{bp}$  est = à un nombre entier positif  $k - 2$  en  $y$  comprenant zéro, car  $k$  ne sauroit être supposé  $< 2$ . Or nous avons 1.<sup>o</sup>  $p = q \pm 1$ ;

2.<sup>o</sup>  $r = 0$ , ou  $r = 1 - a$ ; donc il faudra, si on prend  $r = 0$ , que  $-\frac{e}{b(q+1)}$  soit un nombre entier positif; & si on prend  $r = 1 - a$ , que  $\frac{-e - b + ba}{b(q+1)}$  soit égal à un nombre entier positif.

(77.) Faisons en troisième lieu égal à zéro le 1.<sup>er</sup> terme de la seconde partie seul, & mettons le 2.<sup>d</sup> terme de cette seconde partie sous le 1.<sup>er</sup> de la première; & ainsi de suite, on aura 1.<sup>o</sup>  $A =$  à tout ce qu'on voudra; 2.<sup>o</sup>  $br + e = 0$ , &  $r = -\frac{e}{b}$ ; 3.<sup>o</sup>  $p + q = -1$  ou  $p = -q - 1$ ; 4.<sup>o</sup> un coefficient quelconque sera égal au précédent, pris négativement, & multiplié par  $\frac{[r+p(k-2)][r+p(k-2)-1+a]}{b[r+p(k-1)]+e}$ , ou (à cause de  $br + e = 0$ ) par  $\frac{[r+p(k-2)][r+p(k-2)-1+a]}{bp(k-1)}$ . Donc à cause de  $p = -q - 1$ , chaque coefficient sera = au précédent, multiplié par  $\frac{[r+p(k-2)][r+p(k-2)-1+a]}{b(q+1)(k-1)}$ .

Dans le cas de  $q = -1$ , cette formule ne peut servir, le dénominateur devenant infini, mais nous avons donné plus haut l'analyse de ce cas. Dans les autres, la formule se terminera si  $\frac{r}{p}$  est = à un nombre entier négatif  $-k + 2$ , en y comprenant zéro, ou si  $\frac{r-1+a}{p}$  est égal à  $-k + 2$ ; d'où l'on tire  $\frac{-e}{b(q+1)}$ , ou bien  $\frac{-e - b + ba}{b(q+1)}$  égal à un nombre entier positif, en y comprenant zéro. Or il est clair que ces conditions sont les mêmes que celles du cas précédent. (art. 76).

(78.) De plus il n'est pas difficile de voir que les séries seront les mêmes dans les deux cas, lorsqu'elles sont finies, avec cette seule différence, qu'elles seront à contre-sens l'une de

l'autre, c'est-à-dire, que le 1.<sup>er</sup> terme de la série dans le premier cas sera le dernier dans le second, &c. En effet, si dans le premier cas on suppose, par exemple,  $r = 0$ , le 1.<sup>er</sup> terme de la série sera  $Ax^0 = A$ ; & dans le second cas, si on suppose  $\frac{-e}{b(q+1)} =$  à un nombre entier positif  $k$ , on aura pour dernier terme de la série  $Mx - \frac{e}{b} + p^k$ , ou bien  $Mx - \frac{e}{b} - k(q+1) = Mx^0 = M$ . Et si on suppose dans le premier cas  $r = 1 - a$ , &  $\frac{-e-b+ba}{k(q+1)} =$  à un nombre entier positif  $k$ , le 1.<sup>er</sup> terme sera  $Ax^1 = a$ , & dans le second cas, le dernier terme sera toujours  $Mx - \frac{e}{b} - kp$ , ou bien  $Mx - \frac{e}{b} - k(q+1) = Mx^1 = a$ . Donc, &c. (26)

*Démonstration du Théorème XLIX.*

(79.) On la trouvera dans le §. III qui suit.

§. III.

*Contenant quelques autres recherches sur l'intégration des équations différentielles.*

Il nous reste encore à démontrer le Théor. XLIX des *Mém. de 1767*. Nous donnerons cette démonstration à la fin du présent paragraphe, que nous destinons à des recherches encore plus générales que les précédentes sur l'intégration des équations différentielles.

(80.) Soit l'équation différentielle  $dx + a dy = 0$ , & supposons que l'équation  $\phi(x, y) = 0$  y satisfasse; je dis que si on prend la différentielle  $Mdx + Ndy$  de cette fonction  $\phi(x, y)$ , & que  $-Ma + N$  soit telle que tout s'y détruise, l'intégrale générale & complete sera  $\phi(x, y) = C$  constante

quelconque. En effet, cette dernière équation donne  $Mdx + Ndy = 0$ ; &  $Ma = N$  est une équation identique. Donc  $Mdx + Mady$  est une différentielle complète, dont l'intégrale complète est  $\phi(x, y) = C$ . La différence des intégrales particulières aux intégrales absolues & complètes, c'est qu'en différentiant les premières, & substituant au lieu de  $dx$  la valeur  $-ady$ , on a une équation qui peut n'être pas identique, mais qui doit s'accorder avec l'intégrale supposée; au lieu que dans le cas de l'intégrale générale, l'équation qu'on a après la substitution de  $-ady$  au lieu de  $dx$  dans les différentielles, doit être identique. En effet, cette équation (qui ne renferme point la constante  $C$ ) doit être aussi générale que l'intégrale  $\phi(x, y) = C$ , c'est-à-dire, qu'elle doit être vraie quel que soit  $C$ ; ce qui ne peut être qu'en la supposant identique.

(81.) Toute équation  $\phi(x, y) = 0$ , dans laquelle il se trouvera une constante de plus que dans l'équation différentielle  $dx + a dy$ , & qui satisfera à cette équation, en fera l'intégrale absolue & complète.

Cela se voit aisément par l'article précédent, lorsque l'intégrale est de cette forme  $\phi(x, y) - C = 0$ , & que la constante  $C$  se trouve seule dans un terme; mais, lorsqu'elle est mêlée avec d'autres termes, & qu'il est difficile, ou même souvent impossible de la dégager, on différentiera l'équation, & on y mettra pour  $dx$  la valeur  $-ady$ , ce qui donnera une équation entre  $C, x, y, a$ ; cette équation & l'intégrale donnée serviront à avoir par les méthodes connues une équation linéaire de  $C$  en  $x, y, a$ , ou, ce qui revient au même, en  $x, y$ , puisque  $a$  est une fonction de  $x$  & de  $y$ . Différentions cette équation linéaire en  $C$ , nous aurons une équation de laquelle  $C$  disparaîtra, & qui en y substituant  $-ady$  pour  $dx$ , doit être identique (27).

(82.) Ayant l'équation  $\phi(x, y) = 0$ , qui renferme la constante  $C$ , on peut trouver aisément une infinité d'autres équations qui renferment en apparence tant de constantes arbitraires qu'on voudra, & qui soient aussi l'intégrale générale de l'équation  $dx + a dy = 0$ .

En effet, soit  $X = C$  l'intégrale absolue,  $X$  étant une fonction de  $x$  & de  $y$ , on aura d'abord  $\phi(X) = C$  pour une autre intégrale encore plus générale. De plus, comme la constante  $C$  est arbitraire, & peut être tout ce qu'on voudra, soit formée une fonction quelconque de  $\phi(X)$  qui renferme tant de constantes qu'on voudra, & soit fait cette fonction  $= 0$ , il est évident qu'il en résultera  $\phi(X) =$  à différentes constantes, & par conséquent autant d'intégrales de la proposée. Donc, &c. (28)

(83.) Si on a une équation différentielle du second ordre, & que l'intégrale contienne deux constantes arbitraires, elle sera l'intégrale absolue & complète. En effet, soit différenciée deux fois cette intégrale, on aura trois équations, savoir l'intégrale & ses deux différentielles, qui contiendront les deux constantes. On pourra donc, par les méthodes connues, faire disparaître ces deux constantes, & on aura une équation différentielle qui devra être nécessairement identique avec l'équation différentielle donnée. Car qu'on fasse disparaître  $ddy$  de ces deux équations, on aura une équation en  $\frac{dy}{dx}$  qui ne contiendra point de constantes, & qui doit être identique pour s'accorder avec la différentielle du premier ordre de l'équation intégrale donnée, laquelle renferme au moins une constante. Donc, &c. (29)

(84.) Toute équation de cette forme  $dp + \sigma p dx + p^2 \xi dx + X dx = 0$ ,  $\sigma, \xi, X$  étant des fonctions de  $x$ , peut se réduire à la forme  $ddz + \varphi dz dx + z \vartheta dx^2 = 0$ ,  $dx$  étant constant, &  $\varphi, \vartheta$  des fonctions de  $x$ ; car il n'y a qu'à supposer  $p = \frac{dz}{\xi dx}$ , ce qui donne  $ddz + dz dx (\sigma - \frac{d\xi}{\xi dx}) + z \xi X dx = 0$ , d'où  $\varphi = \sigma - \frac{d\xi}{\xi dx}$ , &  $\vartheta = \xi X$  (30)

Donc si on a deux valeurs de  $p$ , savoir  $\theta, \theta'$ , on aura aussi deux valeurs de  $z$ , savoir  $c \int \theta \xi dx$  &  $c \int \theta' \xi dx$ ; donc la valeur générale de  $z$  est  $A' c \int \theta \xi dx + B' c \int \theta' \xi dx$ ,  $A'$  &  $B'$  étant des constantes

constantes quelconques; donc la valeur générale de  $p$  ou  $\frac{dz}{z\xi dx}$

est  $\frac{A\theta + B\vartheta}{A'\int\theta\xi dx + B'\int\vartheta\xi dx}$ .

Ce problème a déjà été résolu par M. Euler (*Nouv. Mém. de Pétersbourg, Tome VIII*), mais par une voie toute différente de celle-ci (31).

(85.) Soit l'équation  $dy + yydx + Xdx = 0$ , & soit supposé  $y = X + Y\sqrt{-1}$ ,  $X$  &  $Y$  étant des fonctions réelles de  $x$  & de  $y$ ; on aura  $dX + (XX - YY)dx + X'dx + 2XYdx\sqrt{-1} + dY\sqrt{-1} = 0$ . Et par conséquent 1.<sup>o</sup>  $dY + 2XYdx = 0$  ou  $Y = Ae^{-2\int Xdx}$  ou  $X = -\frac{dY}{2Ydx}$ . 2.<sup>o</sup>  $dX + (XX - YY)dx + X'dx = 0$ ;

d'où l'on voit que si  $X' = -\frac{dX}{dx} + YY - XX$ , on aura une valeur particulière de  $y$  qui fera l'intégrale de l'équation, & que par conséquent on pourra l'intégrer en général & absolument.

(86.) Soit, par exemple,  $Y = Ax^n$ ,  $A$  &  $n$  étant des constantes quelconques, on aura  $X = -\frac{n}{2x}$ ;  $-\frac{dX}{dx} = -\frac{n dx}{2x^2}$  &  $X'$  ou  $-\frac{dX}{dx} + YY - XX = \frac{(-2n - n^2)}{4x^2} + A^2 x^{2n}$ ; d'où l'on voit que toute équation réductible à cette forme  $dy + yydx + \frac{Bdx}{x^2} + Cx^2 dx = 0$  est intégrable; pourvu que  $B$  soit  $= -\frac{q}{4} - \frac{qq}{4 \times 4}$ ,  $C$  étant positif (32).

(87.) Soit encore  $Y = A(k + \beta x^n)^m$ , on aura  $X = \frac{-m\beta n x^{n-1}}{2(k + \beta x^n)}$ , &  $X' = A^2(k + \beta x^n)^{2m} +$

Mém. 1769.

O

$$[2km\beta n \times (n-1)x^n - 2 + 2m\beta\beta n \times (n-1)x^{2n-2} - 2m\beta\beta n n x^{2n-2} - mm\beta\beta n^2 x^{2n-2}] : 4(k+\beta x^n)^2 \\ = A^2(k+\beta x^n)^{2m} + [2km\beta u \times (n-1) \times x^{n-1} - [m\beta\beta n(2+mn)]x^{2n-2}] : 4(k+\beta x^n)^2.$$

Soit, par exemple,  $n = 1$ , & l'équation  $dy + yydx + A^2dx \times (k + \beta x)^{2m} - \frac{m\beta\beta(2+m)dx}{4(k+\beta x)^2} = 0$ , sera intégrable; & ainsi d'un très-grand nombre d'autres.

(88.) Soit en général  $Y = u^{-1}$ , on aura  $X = \frac{dx}{u dx}$ , &  $X' = \frac{-u dd u + du^2}{4u^2 dx^2} + \frac{1}{u^2}$ . Donc si  $u = A(a + \beta x + \gamma xx)$ , on aura  $X' = \frac{-4a\gamma + \beta^2 + 4A^{-2}}{4(a + \beta x + \gamma xx)^2}$ ,  $A$  pouvant être tout ce qu'on voudra (33).

(89.) Si au lieu de supposer  $y = X + Y$   $V = 1$ , on prenoit  $y = X + Y$ , & qu'on supposât  $dY + 2XYdx = 0$ , ce qui est permis, à cause des deux indéterminées  $X, Y$ , on auroit dans la valeur de  $X'$ , la quantité  $-YY$  au lieu de  $+YY$ ; ce qui fourniroit de nouveaux Théorèmes. On verroit, par exemple, que dans l'équation de l'art. 86,  $dy + yydx + \frac{Bdx}{x^2} + Cx^q dx = 0$ ,  $C$  peut être négatif.

(90.) En général, soit  $dy + \xi yydx + \zeta ydx + X'dx = 0$ , & soit  $X + Y = y$ ,  $Y$  étant réel ou imaginaire simple; si l'on fait  $dY + (2\xi XY + \zeta Y)dx = 0$ , ou  $X = -\frac{dY}{2\xi Y dx} - \frac{\zeta}{2\xi}$ , on aura pour condition d'intégrabilité,  $X' = \frac{dX}{dx} - \xi XX - \xi YY$

$$= \zeta X = d \left( \frac{dY}{2Y\xi ds} + \frac{\zeta}{2\xi} \right) - \xi YY - \frac{1}{\xi} \times \left( \frac{dY}{2Yds} + \frac{\zeta}{2} \right)^2 + \zeta \left( \frac{dY}{2Y\xi ds} + \frac{\zeta}{2\xi} \right).$$

(91.) Soit  $\frac{dy}{ds} + \frac{Ex^p}{a + \beta x^r + \gamma x^{r+s}} + Fy^k x^k +$   
 $X' = 0$ , & soit supposé  $y = \frac{Dx^m + Cx^q}{a + \beta x^r + \gamma x^{r+s}}$ , la  
 substitution de cette valeur de  $y$ , donnera dans les trois  
 premiers termes, pour dénominateur  $(a + \beta x^r + \gamma x^{r+s})^2$ ,  
 & pour numérateur  $maDx^{m-1} + m\beta Dx^{r+m-1} +$   
 $m\gamma Dx^{r+s+m-1} - r\beta Dx^{r+m-1} - \gamma(r+s) \times$   
 $Dx^{r+s+m-1} + qaCx^{q-1} + q\beta Cx^{r+q-1} +$   
 $+ q\gamma Cx^{r+s+q-1} - r\beta Cx^{r+q-1} - (r+s) \times$   
 $\gamma Cx^{r+s+q-1} + Eax^p + E\beta x^{r+p} +$   
 $E\gamma x^{r+s+p} + FDDx^{2m+k} + 2FDCx^{m+q+k}$   
 $+ FCCx^{2q+k}.$

Soit  $p = q - 1$ ;  $m + k = -1$ ;  $q + k = r + s - 1$ , on aura  $q = p + 1$ ;  $k = r + s - p - 2$ ;  $m = -r - s + p + 1$ , &c  
 le numérateur précédent deviendra  $(maD + FDD)x^{m-1} +$   
 $(Dm\beta - r\beta D)x^{r+m-1} + [Ea + qaC +$   
 $\gamma mD - \gamma(r+s)D + 2FDC]x^p + (qC\beta$   
 $- rC\beta + E\beta)x^{r+q-1} + (\gamma qC - \gamma(r+s)C$   
 $+ E\gamma + FCC)x^{r+s+q-1}.$

(92.) Soit donc supposé  $X' =$  à une fraction dont le  
 numérateur soit la quantité précédente avec le signe  $-$ , &c  
 le dénominateur  $(a + \beta x^r + \gamma x^{r+s})^2$ , & soit de plus  
 pris  $k = r + s - p - 2$ , &c l'équation sera intégrable. Par  
 exemple, on peut supposer  $a=0, D=0, X' = [-(p+1) \times$   
 $C\beta - rC\beta + E\beta)x^{r+p} - (p+1)\gamma C -$   
 $\gamma(r+s)C + E\gamma + FCC]x^{r+s+p}]/(\beta x^r + \gamma x^{r+s})^2.$



108 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

ou plus simplement  $X' = [Qx^{-r+p} + Sx^{-r+s+p}] : (\beta + \gamma x^s)$ ,  $Q$  &  $S$  ayant certaines conditions.

Soit donc l'équation  $dy + Fy^2 x^{r+s-p-2} dx + [Qx^{-r+p} + Sx^{-r+s+p}] dx : (\beta + \gamma x^s)^2 = 0$ , on prendra  $y = \frac{Cx^{r+s}}{\beta x^r + \gamma x^{r+s}}$  & l'équation sera intégrable, pourvu qu'on ait  $Q + (p+1)C\beta - rC\beta = 0$ , &  $S + (p+1)\gamma C - \gamma C(r+s) + FCC = 0$ .

(93.) Soit  $-r+p = \omega$ ,  $r+s-p-2 = \mu$ , la proposée deviendra  $dy + Fy^2 x^\mu dx + \frac{Qx^\omega + Sx^{\omega+s}}{(\beta + \gamma x^s)^2} dx = 0$ , & on aura  $r = p - \omega$ ,  $\mu = s - \omega - 2$ ,  $C = -\frac{Q}{\beta(p+1-r)} = -\frac{Q}{\beta(\omega+1)}$ ; &  $S + (\omega+1 - s) \times -\frac{\gamma Q}{\beta(\omega+1)} + \frac{FQQ}{\beta\beta(\omega+1)^2} = 0$ . Si donc cette dernière équation de condition a lieu entre les coefficients  $S, Q, \beta, \gamma$ , & les exposans  $\omega, s$ , l'équation proposée sera intégrable,  $\mu$  étant  $= s - \omega - 2$ , & il faudra prendre pour l'intégration absolue  $y = -\frac{Qx^\omega + S}{\beta(\omega+1)(\beta + \gamma x^s)} + \zeta$ .

(94.) Soit encore  $D = 0$ ,  $q = 0$  (ce qui donne  $p = -1$ ),  $E = 0$ , on prendra  $X' = [rC\beta x^{r-1} + (\gamma(r+s)C - FCC)x^{r+s-1}] : (\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+s})^2$ ; & l'équation proposée se changera en  $dy + Fy^2 x^{r+s-1} dx + [Qx^{r-1} + Sx^{r+s-1}] dx : (\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+s})^2 = 0$ ; équation intégrable, pourvu qu'on ait  $-rC\beta + Q = 0$ , &  $-S + \gamma C(r+s) - FCC = 0$ , c'est-à-dire,  $-S + \frac{\gamma(r+s)Q}{\beta r} - \frac{FQQ}{\beta^2 rr} = 0$ . Si cette dernière condition est observée, on n'aura qu'à prendre

pour intégrale  $y = \frac{Q}{r\beta(a + \beta x^p + \gamma x^{p+1})} + z$ ; & l'on aura dans ce cas, ainsi que dans celui de l'article précédent, une équation en  $z$  de la forme  $d z + \xi z dx + \zeta z^2 dx = 0$ , dont on aura l'intégrale par les méthodes connues.

(95.) Il seroit assez facile, comme on le voit aisément, de pousser cette méthode plus loin, & d'augmenter le nombre de ces formules intégrables, mais en voilà assez pour mettre sur la voie ceux qui voudront aller plus loin. Passons à quelques autres recherches.

(96.) Il est aisé de voir que toute quantité de cette forme  $X d^p u = d(X d^{p-1} u) - d X d^{p-1} u = d(X d^{p-1} u) - d(d X d^{p-2} u) + d(d d X d^{p-3} u) - d(d^3 X d^{p-4} u) \dots \pm u d^p X$ , savoir  $+$  si  $p$  est pair, &  $-$  si  $p$  est impair.

(97.) Soit donc proposé d'intégrer l'équation  $d^p u + \xi d^{p-1} u dx + \zeta d^{p-2} u dx^2 \dots + \chi u dx^p = 0$ . Et soit multipliée cette équation par  $X$ , elle se changera en  $d(X d^{p-1} u) - d(d X d^{p-2} u)$ , &c.  $+ d(\xi X d^{p-2} u) dx - d[d(\xi X) d^{p-3} u] dx$ , &c.  $+ d(\zeta X d^{p-3} u) dx^2 - d[d(\zeta X) d^{p-4} u] dx^2$ , &c.  $\pm u d^p X \mp u d^{p-1} (\xi X) dx \pm u d^{p-2} (\zeta X) dx^2$ , &c.  $= 0$ . D'où il est visible qu'on pourra abaisser l'équation proposée à une équation d'un degré moindre, si on prend  $X$  telle que  $d^p X \mp d^{p-1} (\xi X) dx \pm d^{p-2} (\zeta X) dx^2 \mp \dots$ , &c.  $= 0$ . C'est-à-dire si  $d^p X \mp (\xi d^{p-1} X + (p-1) d^{p-2} X d\xi + \frac{(p-1)(p-2)}{2} \times d^2 \xi + \dots) dx \pm (\zeta d^{p-2} X + (p-2) \times d\zeta d^{p-3} X + \dots) dx^2 = 0$ .

(98.) On trouvera de la même manière que si on propose d'intégrer ou du moins de réduire à un ordre inférieur l'équation  $\xi d^p u + \xi d^{p-1} u dx + \xi' d^{p-2} u dx^2 + \dots = 0$ , la question se réduira à trouver une quantité  $X$  telle que

$\pm d^p(X\zeta) \mp d^{p-1}(\xi X)dx \pm d^{p-2}(\xi' X)dx^2$   
 $\mp$ , &c. soit  $= 0$  (33).

(99.) Soit  $\zeta ddu + \xi dudx + \xi' u dx^2 = 0$ ;  
 on aura  $d^2(X\zeta) - d(X\xi)dx + X\xi'dx^2 = 0$ ;  
 soit  $X\xi' = \frac{ad(X\xi)}{dx}$ , on aura  $\frac{d^2(X\zeta)}{dx^2} + (a-1) \times d(\xi X)$   
 $= 0$ ; & par conséquent  $d(X\zeta) + (a-1) \times X\xi dx +$   
 $b dx = 0$ . Cette équation donnera une valeur de  $X$ , qui  
 renfermera une constante arbitraire, & qui étant comparée à  
 l'autre valeur de  $X$ , résultante de l'équation  $X\xi' = \frac{ad(X\xi)}{dx}$ ;  
 laquelle renferme aussi une constante arbitraire, donnera une  
 équation de condition entre  $\zeta$ ,  $\xi$  &  $\xi'$ , qui renfermera deux  
 constantes arbitraires, sans y comprendre la troisième constante  
 arbitraire  $a$  (34).

(100.) On peut dans ces calculs, supposer  $\zeta = 1$ ; ce qui  
 les rendra plus simples.

(101.) On voit aussi, en faisant  $\zeta = 1$ , que l'intégrale  
 de  $ddu + \xi dudx + \xi' u dx^2 = 0$ , se réduit à celle  
 de  $ddX - \xi dXdx + X(\xi' - \frac{d\xi}{dx})dx^2 = 0$  (35).

(102.) Soit proposé d'intégrer l'équation  $dd(\zeta\xi) +$   
 $\zeta\zeta dx^2 + \varphi\zeta ddx + Xd\zeta dx = 0$ , dans laquelle  $\sigma dx$   
 est supposé constant,  $\sigma$  étant une fonction donnée de  $x$ ; on  
 fera  $\sigma dx = dt$ , d'où  $dx = Tdt$ ; & on aura une équation  
 de la forme suivante,  $dd(\zeta T) + \zeta T' dt^2 + T'' d\zeta dt = 0$ ;  
 ce qui renferme le cas du tome IV de nos *Opuscules*, p. 270.

(103.) Il seroit bon d'examiner quelle forme on doit supposer  
 à  $\sigma$  pour que la réduite soit intégrable, c'est-à-dire, pour qu'en  
 faisant  $\zeta = csp^{dx}$  ou  $csp^{dx^2}$ , la transformée soit intégrable.

(104.) Prenons le cas simple  $dd(z\xi) = zXdz^2, \xi dz$  étant constant, on aura  $dd(z\xi) = \frac{zX(\xi^2 dz^2)}{\xi^2}$ , & supposant  $z\xi = p$ ,  $ddp = \frac{pX(\xi dz)^2}{\xi^2 \xi}$ ; soit  $p = c\omega \xi dz$ ; on aura  $d\omega + \omega \omega \xi dz = \frac{X\xi dz}{\xi^2 \xi}$ ; or en supposant  $\xi dz = t$ , il faut que  $\frac{X}{\xi^2 \xi} = t^n$ ,  $n$  étant  $= -\frac{4\mu}{2\mu \pm 1}$ . Donc  $\frac{X}{\xi^2 \xi} = (f\xi dz)^n$ , donc en supposant  $\int \xi dz = t$ , on aura  $\xi = \frac{dt}{dx}$ , &  $\frac{Xdz^2}{\xi dz t^2} = t^n$ , ou  $dt \times t^{\frac{n}{2}} = \frac{f dz \sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}$ . Donc  $t = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{2+n}} \int \left(\frac{dz \sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}\right)^{\frac{2}{n+2}}$ ; donc  $\frac{dz \sqrt{X}}{\sqrt{\xi}} \int \left(\frac{dz \sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}\right)^{\frac{-n}{n+2}}$  doit être constant. Il faut remarquer qu'à la quantité  $\int \frac{dz \sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}$ , on peut évidemment ajouter une constante  $+ A$ .

(105.) Soit à présent  $d(z\xi) + Xzdz^2 + pzd dz = 0$ , on aura, en faisant  $\xi dz = dt$  & constant,  $ddz = -\frac{d\xi dz}{\xi^2} = -\frac{d\xi \times (\xi^2 dz^2)}{\xi^2 dz}$ ; & supposant  $z\xi = p$ , on aura  $ddp + \frac{Xp(\xi dz)^2}{\xi \xi \xi} + \frac{p p}{\xi} \times -\frac{(\xi dz)^2 \times d\xi}{\xi^2 dz} = 0$ ; il faut donc que  $\frac{X}{\xi \xi \xi} - \frac{p d\xi}{\xi \xi^2 dz} = (f\xi dz)^n$ ,  $n$  étant  $= -\frac{4\mu}{2\mu \pm 1}$ . Soit  $\int \xi dz = t$ , on aura  $\xi = \frac{dt}{dx}$ , &  $d\xi = -\frac{dt ddz}{dx^2}$ ; donc  $t^n = \frac{Xdz^2}{\xi dz t^2} + \frac{p ddz}{\xi dz t^2}$ ; on tirera de cette équation la valeur de  $x$  en  $t$ , lorsque cela sera possible (36).

(106.) Si l'on avoit  $ddz + \xi dz dz + Xzdz^2$

+  $\frac{p d\zeta^2}{\zeta} + \sigma \zeta ddx = 0$ , & qu'on suppose  $\zeta dx$  constant; on écrirait ainsi l'équation  $dd\zeta + \frac{\xi d\zeta}{\zeta} \times \zeta dx + \frac{X\zeta}{\zeta^2} (\zeta dx)^2 + \frac{p d\zeta^2}{\zeta^2 dx^2} (\zeta dx)^2 - \frac{\sigma \zeta d\zeta}{\zeta^2 dx} \times (\zeta dx)^2 = 0$ ; ensuite faisant  $\zeta = c f q^{dt}$ , on auroit une transformée de cette forme  $dq + K q dt + \lambda q q dt + X' dt = 0$ ; & on connoîtra par les cas d'intégrabilité de cette équation, ceux de la proposée, ce qui donnera une équation finale pour  $\zeta$ . Par exemple, si  $X' = 0$ , l'équation en  $q$  seroit intégrable, & on auroit  $\frac{X}{\zeta^2} - \frac{\sigma d\zeta}{\zeta^2 dx} = 0$ , d'où l'on tire aisément  $\zeta$ .

*Démonstration du Théorème XLIX.*

(107.) Soit prise pour exemple l'équation  $ddt + N^2 d\zeta^2 + a t \omega d\zeta^2 = 0$ , &  $dd\omega + a \omega d\zeta^2 = 0$ . Différentions successivement plusieurs fois la première équation, & mettons pour  $ddt$  &  $dd\omega$  leurs valeurs, il est clair que par ces différentiations & substitutions successives, on n'aura jamais que des termes de cette forme  $a t \omega$ ,  $a t d\omega$ ,  $a \omega dt$ ,  $a \omega d\omega dt$ , parmi ceux qui ne seront affectés que de  $a$ . Donc avec autant d'équations différentielles qu'il sera nécessaire, on fera évanouir tous ces termes, & il ne restera que des termes de la forme  $A d^2 t d\zeta^2$ , & des termes affectés de  $t$  & de  $\omega$ , & de leurs différences, mais qui auront pour facteur  $a^2$ . Différentiant de nouveau l'équation, & substituant pour  $ddt$  &  $dd\omega$  leurs valeurs, on en trouvera une nouvelle où les termes affectés de  $t$  & de  $\omega$  ne seront plus multipliés que par  $a^3$ ; & ainsi de suite. On voit aisément comment cette méthode s'applique au cas général & plus compliqué que le Théorème XLIX renferme (37).

NOTES

## NOTES relatives au Mémoire précédent.

(1) On peut encore démontrer ces Théorèmes en considérant que  $\sin. (na + a) = \sin. na \cos. a + \cos. na \sin. a = \sin. na \times \sqrt{1 - x x} + \cos. na \times x$ . D'où, en faisant successivement  $n = 1, 2, 3$ , &c. il est aisé de déduire les valeurs de  $\sin. 2a$ ,  $\cos. 2a$ ,  $\sin. 3a$ ,  $\cos. 3a$ , &c. On peut remarquer encore que  $d(\cos. p v)$ , par exemple,  $= -p dv \times \sin. p v$ , & que  $d \sin. p v = p dv \cos. p v$ ; d'où il est aisé de trouver  $\sin. p v$ , si  $\cos. p v$  est connu, & réciproquement.

(2) On peut démontrer par ce moyen le Théorème précédent, en mettant au lieu des sinus & cosinus, leurs expressions connues en exponentielles imaginaires. L'intégrale totale (*Lam. 2 & 3*) se réduira toujours à une quantité de cette forme  $M + N \sqrt{-1}$ ,  $M$  &  $N$  étant des intégrales de fractions rationnelles réelles; & si l'intégrale totale doit être réelle, il arrivera nécessairement que les imaginaires se détruiront, & qu'on aura  $N = 0$ . Mais la méthode de l'article 6 est plus simple, & par conséquent préférable.

(3) En effet, l'intégrale de  $\frac{dz e^{sz}}{(z+a)^m}$  est  $-\frac{e^{sz}}{(m-1)(z+a)^{m-1}}$  +  $\int \frac{s dz e^{sz}}{(m-1)(z+a)^{m-1}}$ ; donc, &c.

(4) La quantité  $V dv \times a^s (v^m) + b$  pourroit encore s'intégrer de la même manière quand même  $V$  contiendrait des exposans fractionnaires de  $v$ , pourvu que ces exposans fractionnaires eussent  $p$  pour dénominateur; & dans tous ces cas, si  $V$  étoit sans dénominateur, l'intégration se réduiroit au cas du Théorème III.

(5) Voici encore deux Théorèmes qui sont analogues à celui-ci.

I. Toute quantité de cette forme  $x^m dx (\log. x)^p$  étant supposée intégrable, toute quantité de la forme  $x^m dx (\log. x^r)^p$  l'est aussi,  $r$  étant un exposant quelconque, puisque  $(\log. x^r)^p = r^p (\log. x)^p$ . A l'égard de  $x^m dx (\log. x)^p$ , si on fait  $\log. x = z$ , elle se changera en  $z^p dz \times e^{mz}$ , dont l'intégration se réduit à celle de  $dz e^{(m+1)z}$  si  $p$  est positif, & à celle de  $\frac{dz}{z} e^{(m+1)z}$  si  $p$  est négatif.

II. Toute quantité de cette forme  $az^{(r)} dz \times z^q (\log. z^r)^p$ , se transforme, en faisant  $z^n = u$ , en  $a^{s^n} u^{\frac{q}{n}} + \frac{1}{n} - 1 du \times \frac{r^p}{u^p} \times \frac{1}{n} (\log. u)^p$ ; donc elle dépend de l'intégration de  $a^{s^n} \times u^{\frac{q+1}{n}-1} \times du \times (\log. u)^p$ .

Soit  $p = 1$ , &  $\frac{q+1}{n} - 1 = k$ , cette dernière différentielle fera  $a^{s^n} \times u^k du \log. u$ , qui, lorsque  $k$  est un nombre entier positif, dépend de  $\int \frac{V du}{u}$ ,  $V$  étant l'intégrale de  $u^k du \times a^{s^n}$ ; d'où il est clair que l'intégration dépend de  $x^p dx \times a^{s^n}$ ,  $p$  étant positif ou zéro, & de  $\frac{a^{s^n} dx}{u}$ , ou de  $\frac{dx}{\log. x}$ .

(6) Si  $p$  étoit pair &  $s$  impair,  $\sqrt{(1-x)}$  disparaîtroit, & l'intégration par logarithmes n'auroit aucune difficulté. On remarquera de plus que  $\sin. (rv + \alpha)$ , si  $r$  est pair, peut toujours se changer en  $\cos. (rk)$ , en prenant  $90^\circ - rk = rv + \alpha$ , ou  $k = \frac{90^\circ - \alpha}{r} - v$ ; & que de même  $\cos. (rv + \alpha)$ ,  $r$  étant impair, peut se changer en  $\sin. (rk)$ ; ce qui donne le moyen d'étendre beaucoup le Théorème X.

(7) La même intégration par simples logarithmes auroit encore lieu, comme il est aisé de le voir, 1.° si on multiplioit le dénominateur par  $D (\sin. v)^r \times P (\cos. v)^s$ , &c.  $v, r, s$ , étant des nombres entiers positifs. 2.° Si le dénominateur étoit  $(A \cos. rv + B)^{\mu} \times (P \cos. \lambda v + S)^{\sigma}$ , &c.  $\times D (\sin. v)^r$ , ou  $(A \sin. rv + B)^{\mu} \times (P \sin. \lambda v + S)^{\sigma}$ , &c.  $\times D (\cos. v)^s$ . 3.° Si au lieu de  $pv$  &  $qv$ , on avoit  $pv + \alpha$  &  $qv + \epsilon$ ,  $\alpha$  &  $\epsilon$  étant des angles constans quelconques. En effet, dans tous ces cas les facteurs du dénominateur de la transformée seront de cette forme  $(x+a)^{\mu}$ ,  $(x+h)^{\sigma}$ ,  $x^r$  ou  $(1-x)^t$ ,  $(1+x)^t$ : donc, &c.

Il en sera de même de la différentielle  $\frac{V dv}{[B + A \frac{\sin.}{\cos.} (rv + \alpha)]^{\mu}}$ ,  $r, p,$

$s$ , &c. étant supposés, comme dans le *Théorème I*, réducibles à la forme  $\frac{m A'}{n}$ ,  $\frac{m' A'}{n}$ ,  $\frac{m'' A'}{n}$ , &c. pourvu 1.<sup>o</sup> que  $A^2$  soit  $\geq$  ou  $> B^2$ . 2.<sup>o</sup> Que  $m'$ ,  $m''$ , &c. soient  $< \mu m$ . On pourra même, au lieu de  $p v$  & de  $s v$ , mettre  $p v + \epsilon$ , &  $s v + \delta$ . Cela posé, au lieu de  $r v + \alpha$ , il faudra mettre  $\frac{m A' v}{n} + \frac{m' B'}{n}$ , ( $B'$  étant  $= \frac{n \alpha}{m}$ ); ensuite faisant  $\frac{A' v + B'}{n} = x$ , on aura  $p v + \epsilon = m' x + \epsilon - \frac{m' B'}{n}$ ;  $s v + \delta = m'' x + \delta - \frac{m'' B'}{n}$ , &c. Et par conséquent les sinus & cosinus de ces angles se réduiront à la forme  $C \sin. m' x + D \cos. m' x$ ,  $E \sin. m'' x + F \cos. m'' x$ , &c. Donc, &c.

(8) Il est bon d'observer que dans toutes les quantités précédentes, on peut au lieu de  $\sin. v^2$  mettre  $\cos. v^2$ , puisque  $\cos. v^2$  se transforme en  $1 - \sin. v^2$ , & qu'ainsi  $a + b \sin. v + c \sin. v^2$ , par exemple, peut se transformer en  $a' + b' \sin. v + c' \cos. v^2$ .

En finissant ces nouvelles recherches sur les intégrales réducibles à des arcs d'ellipse & d'hyperbole, je crois devoir remarquer que le P. Riccati avance sans fondement dans ses *Institutions analytiques*, tome II, p. 191, que personne avant lui n'avoit donné l'intégration de la formule  $\frac{dz \sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(p+qzz)}}$  par des arcs de sections coniques. En

effet, la quantité  $\frac{du \sqrt{(f+gu)}}{\sqrt{u} \sqrt{(p+qu)}}$  s'intègre évidemment par nos formules des *Mémoires de Berlin*, 1746, & se réduit à des arcs de sections coniques, puisqu'elle est égale à  $\frac{f du}{\sqrt{u} \sqrt{(f+gu)} \sqrt{(p+qu)}} + \frac{g du \sqrt{u}}{\sqrt{(f+gu)} \sqrt{(p+qu)}}$ ; or (*Mém. Berlin*. 1748, p. 274. art. XXV)

la proposée  $\frac{dz \sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(p+qzz)}}$  se réduit évidemment à  $\frac{du \sqrt{(f+gu)}}{\sqrt{u} \sqrt{(p+qu)}}$  en mettant  $zz$  pour  $u$ . On peut encore supposer  $f + gzz = u$ , ce qui donnera pour transformée  $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(a+bu+cuu)}}$ , intégrable par nos méthodes, & réducible à des arcs de sections coniques.



116 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Non - seulement la quantité  $\frac{dz \sqrt{f+gz}}{\sqrt{p+qz}}$  est intégrable par des arcs de sections coniques, mais on peut, en général, intégrer de même, & par les mêmes transformations, la quantité  $z^s dz (f+gz)^{\frac{m}{2}}$   $\sqrt{p+qz}^n$ ,  $s$ ,  $m$ ,  $n$ , étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

On trouvera de même que  $\frac{dz \sqrt{h+lz}}{a \sqrt{f+gz} + b \sqrt{p+qz}}$  est intégrable par de tels arcs, pourvu que l'on ait  $a^2 g - b^2 q = 0$  ou  $a^2 f - b^2 p = 0$ ; car il n'y a pour lors qu'à multiplier le haut & le bas de la fraction par  $a \sqrt{f+gz} - b \sqrt{p+qz}$ , & faire ensuite  $zz = u$ .

Il en sera de même de  $\frac{z^t dz (h+lz)^{\frac{s}{2}}}{a(f+gz)^{\frac{1}{2}} + b(p+qz)^{\frac{1}{2}}}$  pourvu que  $t$  soit un nombre pair positif ou négatif, &  $s$  un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Si  $t$  est impair, l'intégrale est plus simple.

On peut supposer  $a = 1$  &  $b = 1$ , sans rendre ces différentielles moins générales; c'est pourquoi les conditions d'intégrabilité seront  $g - q = 0$ , ou  $f - p = 0$ ; c'est-à-dire,  $g = q$  ou  $f = p$ .

Il en sera de même encore de  $\frac{z^t dz (h+lz)^{\frac{s}{2}}}{a(f+rz+gz)^{\frac{1}{2}} + b(p+\omega z+qz)^{\frac{1}{2}}}$

pourvu qu'en multipliant haut & bas par  $a(f+rz+gz)^{\frac{1}{2}} - b(p+\omega z+qz)^{\frac{1}{2}}$ , le dénominateur se réduise à un seul terme  $Bz^n$ , & que  $t$  soit un nombre entier positif  $=$  ou  $> n$ .

Il en sera de même encore de  $\frac{z^t dz}{a \sqrt{f+rz+gz+rz^2} + b \sqrt{p+\omega z+qz+nz^2}}$  pourvu qu'en multipliant le haut & le bas par  $a \sqrt{f+rz+gz+rz^2} - b \sqrt{p+\omega z+qz+nz^2}$ , le bas de la fraction se réduise à un seul terme, & que  $t$  soit un nombre entier positif,  $=$  ou  $>$  que l'exposant de  $z$  dans ce seul terme; ce qui peut arriver dans un très-grand nombre de cas, sur-tout si  $r$ ,  $g$ ,  $\omega$ ,  $q$ , sont  $= 0$ .

On voit aisément que ces formules pourroient encore être poussées plus loin, mais c'en est assez pour mettre les Géomètres sur la voie.

Nous avons aussi donné dans le IV.<sup>e</sup> vol. de nos *Opuscules* p. 275 & suiv. & dans le V.<sup>e</sup> p. 231 & 506, d'autres différentielles réducibles à des arcs de sections coniques; ce qui ajoute beaucoup au grand nombre de celles que nous avons trouvées dans les *Mém. de Berlin* de 1746 & 1748.

(9) On peut faire usage de la méthode employée dans ces deux Théorèmes pour réduire en plusieurs cas la quadrature des courbes à des intégrales connues. Si, par exemple, l'équation d'une courbe étoit telle que  $xx \text{ fut } = Y + Y' \sqrt{(a + by + cyy)}$ ,  $Y$  &  $Y'$  étant des fonctions rationnelles de  $y$ , il est visible que sa quadrature se réduiroit à des fractions rationnelles. Lors donc qu'on aura l'équation d'une courbe algébrique en  $x$  & en  $y$ , on fera  $x = a + \epsilon x' + \gamma y'$ , &  $y = b + \epsilon x' + \phi y'$ , & on tâchera de déterminer les constantes  $a, b$ , &c. à être telles que la valeur de  $x'x'$  en  $y'$  ou de  $y'y'$  en  $x'$  donne la quadrature de la courbe, ou absolument, ou par les fractions rationnelles, ou par les arcs de sections coniques.

Soit, par exemple, l'équation du 3.<sup>e</sup> degré  $x^3 + Ax^2y + Bxy^2 + Cy^3 + Gx^2 + Hy^2 + Lxy + Mx + Ny + F = 0$ . Il est certain que si l'équation peut se réduire à la forme  $a'x'^3 + \epsilon'x'^2y' + kx'y'^2 + \pi y'^3 + \eta x' + \omega y' = 0$ , la courbe sera quarrable par l'intégration des fractions rationnelles. Or, en substituant pour  $x$  &  $y$  leurs valeurs  $a + \epsilon x' + \gamma y'$  &  $b + \epsilon x' + \phi y'$ , on trouvera que pour que la transformée dont il s'agit en  $x'$  &  $y'$  soit possible, il faut 1.<sup>o</sup> que  $a^3 + Aa^2b + Bb^2a + Cb^3 + Ga^2 + Hb^2 + Lab + Ma + Nb + F = 0$ . 2.<sup>o</sup> Qu'on ait les trois équations  $(3a + Ab + G) \times \frac{\epsilon^2}{\epsilon^3} + (2Aa + 2Bb + L) \frac{\epsilon}{\epsilon^2} + 3Cb + Ba + H = 0$ ;  
 $(3a + Ab + G) \frac{\gamma^2}{\phi^2} + (2Aa + 2Bb + L) \frac{\gamma}{\phi} + 3Cb + Ba + H = 0$ ;  $(6a + 2Ab + 2G) \gamma + (2Aa + 2Bb + L)x$   
 $(\gamma\epsilon + \epsilon\phi) + (6Cb + 2Ba + 2H)\phi\epsilon = 0$ . Faisant donc  
 $3a + Ab + G = \lambda$ ,  $Aa + Bb + \frac{L}{2} = \mu$ ,  $3Cb + Ba$

# 118 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Si  $H = 1$ , on aura les trois équations  $\lambda \frac{c^2}{\varphi^2} + 2\mu \frac{c}{\varphi} + 1 = 0$ ,  
 $\lambda \frac{\gamma^2}{\varphi^2} + 2\mu \frac{\gamma}{\varphi} + 1 = 0$ , &  $\lambda \frac{c\gamma}{\varphi} + \mu \left( \frac{\gamma}{\varphi} + \frac{c}{\varphi} \right) + 1 = 0$ .

Les deux premières équations donnent les mêmes valeurs pour  $\frac{c}{\varphi}$  &  $\frac{\gamma}{\varphi}$ , & la troisième fait voir que si on prend pour  $\frac{c}{\varphi}$  la valeur  $-\frac{\mu}{\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\lambda\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)}$ , il faut prendre pour  $\frac{\gamma}{\varphi}$  la valeur absolument semblable, & non celle où le radical auroit un signe différent; sans quoi cette troisième équation ne seroit pas vraie.

Ce n'est pas tout; une figure très-simple fera voir aisément (voyez l'Analyse des Courbes de M. Cramer) que si on nomme  $c$  l'angle que font entr'elles les  $x$  & les  $y$ , on aura, par la transformation des axes,  $x'x' = c^2x'^2 + \varphi^2x'^2 \pm 2cx'x' \cos. c$ ; &  $y'y' = \gamma^2y'^2 + \varphi^2y'^2 \pm 2\varphi\gamma y'y' \cos. c$ ; d'où l'on voit que  $\frac{c^2 + \varphi^2 - 1}{2c\varphi}$  doit être =

$\frac{\gamma^2 + \varphi^2 - 1}{2\gamma\varphi}$  & que le carré de chacune de ces quantités doit être = ou < 1. C'est une remarque très-essentielle à faire lorsqu'on veut transformer les axes d'une courbe; & cette remarque donnera les limites entre lesquelles les quantités  $c, \varphi, \gamma, \varphi$ , doivent être renfermées.

(10) C'est d'après ce principe de l'égalité de  $z + dz + dz$  avec  $z + dz + dz$ , dont j'avois fourni l'idée à feu M. Clairaut, qu'il a donné dans les *Mém. de l'Acad. de 1740*, l'équation de condition, pour qu'une équation différentielle à trois variables ait une intégrale possible. Mais ni lui, ni personne que je sache, n'avoit encore considéré les équations à trois variables, dans lesquelles  $dx, dy, dz$ , sont élevées à des puissances quelconques, & mêlées, comme on voudra, entr'elles & avec les variables  $x, y, z$ . Notre méthode s'étend à ces équations quelque compliquées qu'elles soient. Il n'est pas même nécessaire qu'elles soient délivrées de radicaux. Il est vrai que pour arriver aux deux équations finales entre  $\sigma, x, y, z$ , &  $\theta, x, y, z$ , il faudra délivrer de radicaux les équations  $A$  &  $B$ , & leurs différences, mais on sait que cela est toujours possible.

On peut remarquer que dans la différentielle de l'équation  $A$ ,  $p$  &  $\sigma$  ne montent qu'au 1.<sup>er</sup> degré, & que dans celle de l'équation  $B$ ,  $\omega$  &  $\theta$  ne montent aussi qu'au 1.<sup>er</sup> degré. Donc l'équation  $(C)$  combinée avec l'équation  $(B)$  donnera d'abord une équation entre  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que j'appelle  $(E)$ ; & l'équation  $(D)$  combinée avec l'équation  $(A)$  donnera une équation entre  $\theta$ ,  $p$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que j'appelle  $(F)$ ; on fera évanouir  $\omega$  &  $p$  des équations  $(E)$  &  $(F)$  par le moyen des équations  $(A)$  &  $(B)$ ; & on arrivera aux deux équations finales entre  $\theta$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , &  $\sigma$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , qui doivent être identiques.

L'identité absolue de ces deux équations est nécessaire pour que la proposée ait, comme je l'ai dit, une intégrale *générale* possible; par la raison que cette intégrale *générale* contient nécessairement une constante arbitraire qui ne se trouve point dans les deux équations entre  $\theta$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , &  $\sigma$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; & que néanmoins ces deux équations doivent avoir lieu en même temps que l'intégrale générale; ce qui ne peut être à moins que les deux équations ne soient identiques, c'est-à-dire, à moins que les valeurs de  $\theta$  & de  $\sigma$  ne soient exprimées de la même manière en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Mais il ne me paroît pas démontré, que les valeurs de  $\theta$  & de  $\sigma$  doivent aussi être nécessairement identiques, lorsqu'il est question d'une intégrale particulière. Il suffit, ce me semble, qu'en supposant les valeurs de  $\theta$  & de  $\sigma$  égales entr'elles, l'équation en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , qui en résultera, s'accorde avec l'intégrale particulière supposée. J'ai traité ce point plus à fond dans une lettre à M. de la Grange, imprimée dans les *Mém. de Berlin de 1763*, p. 272. On va voir dans les deux Théorèmes suivans, en ne supposant que deux variables, des intégrales particulières qui satisfont à une équation différentielle, quoique la différentiation de ces intégrales ne donne pas l'équation différentielle proposée.

On pourroit objecter que quand même  $\frac{d\omega}{dx}$  ne seroit pas  $= \frac{dp}{dy}$ , les quantités  $\left(\frac{d\omega}{dx} dx\right) dy$  &  $\left(\frac{dp}{dy} dy\right) dx$  ne différencieraient que d'un infiniment petit du second ordre; d'où l'on seroit porté à conclure qu'en prenant  $dx$  &  $dy$  finies, les valeurs totales de  $z$  répondantes à  $x + dx$  & à  $y + dy$  ou à  $y + dy$  &  $x + dx$ , ne différencieraient que d'un infiniment petit du premier ordre, & par

conséquent seroient égales. Mais il faut remarquer que quand les différentielles premières de deux quantités variables diffèrent d'une quantité infiniment petite du second ordre, c'est une marque que la différence des intégrales est finie : par exemple, les différentielles  $dy = a dx$  &  $dy = a dx + 2x dx$ , ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite du second ordre, quand  $x$  est infiniment petite ; cependant en prenant  $x$  finie, les intégrales  $ax$  &  $ax + xx$  diffèrent d'une quantité finie.

(11) Soit donc  $\phi(P + Q - a)$  une fonction de  $P + Q - a$ , qui devienne  $= 0$  quand  $P + Q - a = 0$ , ( $P$  &  $Q$  étant des fonctions quelconques de  $x$  & de  $y$ ) ; je dis que si on prend  $N$  &  $M$  tels que  $N\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) + M\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\right)$  soit  $= L\phi(P + Q - a)$ ,  $L$  étant une fonction quelconque de  $P$  &  $Q$ , qui ne devienne pas infinie quand  $P + Q - a = 0$  ; l'équation  $Mdx - Ndy = 0$  aura  $P + Q = a$  pour une de ses intégrales. On remarquera qu'une des deux quantités  $N$  ou  $M$  peut être telle qu'on voudra.

(12) Cette règle me paroît plus simple, plus générale & plus rigoureusement démontrée que celle qui a été donnée par M. Euler dans le savant Ouvrage que j'ai cité ; plus simple, parce que je n'ai besoin que de l'inspection des termes de l'équation & des exposans de  $t$ , sans avoir recours aux substitutions & aux différentiations employées par ce grand Géomètre ; plus générale, parce qu'elle s'applique aux équations où  $du$  &  $dt$  sont élevées à des puissances quelconques, & qu'elle peut même s'appliquer aisément, comme on le verra plus bas, à des équations différentielles d'un ordre quelconque ; enfin plus rigoureusement démontrée, non-seulement à cause des réflexions que nous avons déjà faites ci-dessus sur la théorie de M. Euler, mais encore parce que ce grand Géomètre, après avoir remarqué & prouvé à la manière que  $t = 0$ , rend  $u$  de valeur quelconque dans l'équation  $du = \frac{dt}{Tt^n}$ , ( $T$  étant une fonction de  $t$  qui ne soit point  $= 0$ , ni infinie quand  $t = 0$ ) étend cette règle sans la démontrer à toutes les équations de la forme  $du = \frac{dt}{t^n \Delta(u, t)}$   $n$  étant  $=$  ou  $> 1$ , &  $\Delta(u, t)$  une fonction quelconque de  $u$  & de  $t$ .

D'ailleurs

D'ailleurs, par la méthode que M. Euler propose, il semble n'avoir égard dans l'équation différentielle qu'aux termes où  $t$ , supposée infiniment petite, seroit élevée au plus petit exposant, par la raison, dit-il, que ces termes sont infiniment grands par rapport aux autres. Or cette considération ne paroît pas suffisante, parce qu'en supposant  $u = 0$ , lorsque  $t = 0$ , il peut se faire qu'un terme qui contiendrait, par exemple,  $u^k t^\lambda$  soit plus grand qu'un terme qui contiendrait  $u^q t^\mu$ , si la valeur initiale de  $u$  en  $t$ , que je suppose  $A t^q$ , est telle que  $q k + \lambda$  soit  $< q q + \lambda - \mu$ , ou  $q k < q q - \mu$ . Aussi, dans la règle du parallélogramme de Newton, pour avoir la valeur de  $u$  en  $t$  dans une courbe algébrique, lorsque  $t = 0$ , on ne se contente pas d'avoir égard aux termes où  $t$  est élevée à la moindre puissance; on a égard aussi aux termes où  $t$  &  $u$  se trouvent mêlées. La méthode de M. Euler ne paroît donc pas suffisante pour trouver la vraie valeur de  $u$  en  $t$ .

Ce n'est pas tout. M. Euler remarque avec raison que si on a, par exemple,

$$\frac{du}{u} = \frac{n dt}{t}, \quad t \text{ sera } = 0 \text{ quel que soit } u, \text{ \& } u = 0 \text{ quel que soit } t.$$

Mais il semble passer sous silence, le cas où l'on auroit  $\frac{du}{u^n} = \frac{A dt}{t^k}$ ,  $n$  &  $k$  étant  $> 1$ , & qui mérite un examen particulier. Car  $u$  étant  $= 0$ , lorsque  $t = 0$ , l'intégrale absolue & complète de cette équation paroît être  $\frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{A t^{-k+1}}{-k+1}$ , puisque  $t = 0$  rend  $u = 0$ ; or en ce cas  $t = 0$  ne donneroit pas  $u$  quelconque. Mais il faut remarquer que l'intégrale absolue de l'équation est  $\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A(k-1)}{t^{k-1}}$ , & qu'en supposant  $C$  infinie, on a  $t = 0$  lorsque  $u = 0$ , &  $t = 0$  lorsque  $u$  est finie & quelconque, c'est-à-dire,  $t = 0$  quelle que soit  $u$ . On trouvera de même dans ce cas  $u = 0$  quel que soit  $t$ . C'est une chose assez remarquable (pour le dire en passant) que ces sortes d'équations soient également complètes, en ajoutant, ou en n'ajoutant pas de constante.

On peut conclure de-là que les équations de cette forme  $\frac{A dt}{t^k} = \frac{du}{u^n}$ ,  $k$  &  $n$  étant supposés  $=$  ou  $> 1$ , donnent indifféremment,

Mém. 1769.

Q

## 122 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

2.<sup>o</sup>  $u =$  à tout ce qu'on voudra lorsque  $t = 0$ , &  $t =$  à tout ce qu'on voudra lorsque  $u = 0$ ; ou seulement  $u = 0$  lorsque  $t = 0$ , &  $t = 0$  lorsque  $u = 0$ . 2.<sup>o</sup> Que dans ces mêmes équations on peut toujours avoir une autre valeur finie de  $u$  en  $t$  & de  $t$  en  $u$ . Par exemple,  $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$ , donne l'intégrale  $t = Au$ ; dans laquelle  $t = 0$  ne donne pas  $u =$  à tout ce qu'on voudra, à moins que  $A$  ne soit  $= 0$ , ni  $u = 0$  ne donne  $t =$  à tout ce qu'on voudra, à moins que  $A$  ne soit infini. Ces deux suppositions de  $A = 0$ , & de  $A = \infty$  sont l'une & l'autre permises. Mais si  $A$  est fini (supposition qui est permise aussi), on a une équation algébrique  $t = Au$ , où  $t$  dépend de  $u$ , & réciproquement. De même si on a  $\frac{Adt}{t^k} = \frac{du}{u^n}$ , & qu'on n'ajoute point en intégrant la constante infinie  $C$ , on aura une équation finie & algébrique entre  $t$  &  $u$ ; savoir,  $\frac{t^{-k+1}}{k-1} = \frac{A t^{-k+1}}{k-1}$ .

Il n'y a que les seuls cas analogues à celui de  $\frac{Adt}{t^k} = \frac{du}{u^n}$ ,  $k$  étant  $=$  ou  $> 1$  &  $n < 1$ , dans lesquelles  $t = 0$  rend toujours & nécessairement  $u$  de valeur quelconque. On en voit aisément la raison par la théorie exposée ci-dessus; car alors on a  $(-n+1)u^{1-n} = \frac{A(k-1)}{k-1} + C$ ,  $C$  étant une constante qui doit être nécessairement infinie, pour que  $t = 0$  donne  $u = 0$ ; donc  $t$  finie rend nécessairement  $u$  infinie. Donc, &c.

Il est clair, au reste, que la règle donnée plus haut pour trouver les cas où  $t = 0$  rend  $u$  quelconque, servira de même pour trouver les cas où  $u = 0$  rend  $t$  quelconque; comme il arrive à la fois dans les équations  $\frac{Adt}{t^k} = \frac{du}{u^n}$ ,  $k$  &  $n$  étant plus grands ou égaux à 1.

J'ai indiqué dans les *Mémoires de Berlin de 1763*, p. 276, l'usage qu'on peut faire de la théorie précédente pour la solution du Problème des tautochrones. C'est surquoi je pourrai revenir dans une autre occasion, cette matière n'étant pas ici de mon sujet.

Avant que de finir cette note, nous ajouterons encore une réflexion d'après la remarque faite à la fin de l'article 34.

C'est un paradoxe singulier & digne de l'attention des Géomètres, que si on a, par exemple,  $\frac{du}{u^n} = dt$ ,  $u$  étant supposé = 0

lorsque  $t = 0$ , l'intégrale complete  $\frac{u^{-n+1}}{n-1} - \frac{0^{-n+1}}{n-1} = t$ ;

donne à la fois  $t = 0$ , &  $t =$  à une grandeur quelconque finie ou infinie,  $u$  étant toujours = 0. Pour sentir en quoi consiste ce paradoxe, il faut remarquer que l'intégrale complete étant telle que  $u = 0$  doit donner  $t = 0$ , on ne voit pas comment  $u = 0$  peut encore donner d'autres valeurs de  $t$ , & même une infinité d'autres valeurs depuis  $t = 0$  jusqu'à  $t = \infty$ . Supposons que  $u$  soit =  $a$  lorsque  $t = 0$ , & faisons en général  $u = a + x$ , on aura

$\frac{1}{(n-1)(a+x)^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$ , qui se réduit à une série de cette forme  $\frac{B a}{a^n} + \frac{C a^2}{a^{n+1}} \&c. = t$ . Soit à présent

$a = 0$ , &  $x = 0$ , on aura  $t = \frac{0}{0}$ , quantité indéterminée qui peut être ou zéro, ou finie, ou infinie.

Cette considération peut servir à expliquer le paradoxe jusqu'à un certain point, mais non pas à l'éclaircir pleinement. En effet, si on élève  $a + x$  à la puissance  $-p$ , le rapport du  $(n+1)^e$  terme au précédent fera  $\frac{-p-x+1}{x}$ ; ou plutôt (abstraction faite du signe)

$\frac{p+x-1}{x}$ ; d'où l'on voit que  $p$  étant (*hyp.*)  $=$  ou  $>$  1, la série

sera divergente. Donc si  $a = 0$ , la quantité  $\frac{1}{(a+x)^{n-1}}$  ne paroît pas

pouvoir se réduire en série convergente, même en supposant  $a = 0$ ; ainsi l'équation  $\frac{B a}{a^n} + \frac{C a^2}{a^{n+1}} \&c. = t$  ne paroît pas alors repré-

senter exactement l'équation  $\frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{(a+x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right) = t$ .

Quoi qu'il en soit, il est bien constaté par les réflexions & les démonstrations précédentes, répandues dans le texte du Mémoire & dans les Notes, que l'équation  $\frac{A du}{u^n} = dt$ , donne  $t =$  à tout ce qu'on voudra



124 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

lorsque  $u = 0$ , si  $n = 0$  ou  $> 1$ . C'est ce qu'on peut voir encore en construisant la courbe dont les ordonnées  $z$  répondantes aux abscisses  $u$ , soient  $= \int \frac{A du}{u^n}$ ; c'est-à-dire, proportionnelles à l'aire des parties de la courbe qui auroit pour abscisses  $u$  & pour ordonnées  $\frac{A}{u^n}$ . Cette aire est  $= 0$ , lorsque  $u = 0$ , comme on le suppose, & pour lors  $x = 0$ ; mais elle est infinie, quelque petite que soit  $u$ ;  $z$  est donc infinie, quelque petite que soit  $u$ . D'où il s'ensuit que  $u = 0$  donne  $z =$  à ce qu'on voudra, depuis zéro jusqu'à l'infini.

A l'occasion de ce paradoxe, je prie le Lecteur de me permettre ici une courte digression sur un autre paradoxe analogue, dans lequel l'infini entre aussi. J'ai exposé ce paradoxe dans le *tome IV de mes Opuscules*, page 62, mais sans en donner de solution. Voici celle que j'en ai trouvée depuis en repensant à cette matière. Les Géomètres en jugeront.

Soit une hyperbole du 3.<sup>e</sup> degré, dont l'équation soit  $y = \frac{1}{(a-x)^2}$ , & dont l'aire soit supposée  $= 0$  lorsque  $x = 0$ ; le paradoxe consiste en ce que l'aire  $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$  de cette hyperbole, prise par les intégrations ordinaires, est finie & négative lorsque  $x > a$ , au lieu qu'elle est réellement infinie & positive.

Ce paradoxe aura lieu toutes les fois que  $y$  sera  $= \frac{1}{(a-x)^{\frac{n}{m}}}$ ,  $n$  étant pair &  $m$  impair, &  $\frac{n}{m}$  étant  $> 1$ ; mais il n'aura point lieu dans les autres cas.

Pour en trouver le dénouement, je suppose en général  $y = \phi(a-x)$ , &  $\int y dx = \int dx \phi(a-x) = \psi(a-x) - \psi a$ . Si  $x$  est supposé  $= c$ , l'aire correspondante sera  $\psi(a-c) - \psi a$ ; & si  $x$  est supposé  $= c + c'$ , l'aire répondante à cette abscisse, & supposée  $= 0$  quand  $x = c$ , sera  $\psi(a-c-c') - \psi(a-c)$ , en sorte que l'aire totale répondante à l'abscisse  $x = c + c'$ , & supposée  $= 0$  quand  $x = 0$ , sera égale à la somme des deux aires précédentes,  $\psi(a-c) - \psi a$ , &  $+\psi(a-c-c') - \psi(a-c)$ , ou  $\psi(a-c-c') - \psi a$ .

$\downarrow a$ , comme on l'eût trouvé directement en ne prenant pas l'aire à deux fois, c'est-à-dire, en intégrant  $dx \phi(a-x)$ , & faisant  $x = c + c'$  dans l'intégrale absolue  $\downarrow(a-x) = \downarrow a$ .

Cet accord des deux solutions tient, comme on voit, à ce que les quantités  $\downarrow(a-c)$  &  $-\downarrow(a-c)$  qui se trouvent dans l'intégrale prise à deux fois, se détruisent par des signes contraires. Or si cela n'arrivoit pas toujours, si, au contraire, il arrivoit que les deux quantités  $\downarrow(a-c)$  dans l'intégrale prise à deux fois, dussent avoir le même signe, alors elles ne disparaîtroient pas, & l'intégrale prise à deux fois seroit différente de l'intégrale absolue; & c'est ce qui arrive dans le cas présent.

En effet, soit d'abord  $x < a$ , on aura pour l'intégrale  $\frac{1}{a-x}$   $-\frac{1}{a}$ , qui est  $= \frac{1}{+0} - \frac{1}{a}$  lorsque  $x$  devient  $= a$ .

Soit ensuite  $x > a$ , & soit prise l'intégrale de manière qu'elle soit  $= 0$  lorsque  $x = a$ , on aura pour différentielle  $\frac{dx}{(x-a)^2}$ , dont l'intégrale est  $-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{+0}$  ou  $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{0}$ . Ajoutant les deux intégrales partielles, on aura  $+\frac{1}{0} - \frac{1}{a}$ , &  $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{0}$ , dont la somme est  $\frac{1}{a-x} + \frac{2}{0} - \frac{1}{a}$ , qui n'est pas la même chose que  $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$ .

Le Calcul intégral est donc en défaut dans ce seul cas, parce que dans ce seul cas l'intégrale totale n'est pas la même que la somme des deux intégrales partielles.

On ne doit pas objecter qu'en faisant  $x > a$ , l'intégrale  $-\frac{1}{x-a}$  ou  $\frac{1}{a-x}$  de  $\frac{dx}{(x-a)^2}$ , donne pour constante  $-\frac{1}{0}$  au lieu de  $+\frac{1}{0}$ . Car cette constante prétendue  $-\frac{1}{0}$  donneroit une expression très-fautive de la valeur générale de l'aire, puisque cette valeur générale supposée  $-\frac{1}{a} + \frac{1}{a-x}$  ou  $-\frac{1}{a} - \frac{1}{x-a}$ , seroit

infinie négative, au lieu d'infinie positive qu'elle est réellement. D'ailleurs  $x$  étant supposé ici  $> a$ , il saute aux yeux que  $\frac{1}{a-x}$  est toujours négatif jusqu'à ce que  $x$  devienne  $= a$ , & que par conséquent la constante à ajouter est  $\frac{1}{+0}$ , & non  $\frac{1}{-0}$  ou  $\frac{-1}{0}$ , pour que l'aire soit  $= 0$  lorsque  $x = a$ .

Pour ne laisser aucun nuage sur la solution précédente, je remarquerai que les expressions  $+\frac{1}{0}$  &  $-\frac{1}{0}$ , ou  $\frac{1}{+0}$  &  $\frac{1}{-0}$  ne sont point ici la même chose, quoique  $+0 = -0$ , parce que  $\frac{1}{+0}$  est la limite infinie d'une fraction *positive*  $\frac{1}{+a}$ , dans laquelle  $a$  peut être pris si petit qu'on voudra, & que  $\frac{1}{-0}$  est la limite infinie d'une fraction *négative*  $\frac{1}{-a}$ , dans laquelle  $a$  peut être pris aussi petit qu'on voudra; en sorte que  $\frac{1}{+0}$  représente un infini *positif*, &  $\frac{1}{-0}$  un infini *négatif*. Or comme  $x$  est supposé ici plus grand que  $a$ , tant que  $a - x$  n'est pas  $= 0$ , il s'ensuit évidemment que la constante à ajouter pour rendre l'intégrale complète & nulle quand  $x = a$ , est  $\frac{1}{+0}$  ou  $+\frac{1}{0}$ , & non pas  $\frac{1}{-0}$  ou  $-\frac{1}{0}$ . J'ajoute que cette expression  $\frac{1}{\pm 0}$  ne doit laisser dans l'esprit aucune obscurité, elle n'exprime, comme je viens de le dire, que la limite infinie de la quantité  $\frac{1}{\pm a}$ ,  $a$  étant finie & si petite qu'on voudra.

Le paradoxe proposé n'a point lieu lorsque  $y = \frac{1}{(a-x)^{\frac{n}{2}}}$ , si  $\frac{n}{2}$  est  $< 1$ ,  $n$  étant impair, &  $n$  pair, parce qu'alors, comme il est aisé de le voir, la quantité  $\frac{1}{2}(a-x)$  qui doit entrer dans les deux intégrales partielles, est  $= 0$  lorsque  $x = a$ , & qu'ainsi elle disparaît

absolument de la somme des deux intégrales, quelque signe qu'elle ait dans chacune.

Le paradoxe n'a pas lieu non plus lorsque  $y = \frac{1}{(a-x)^k}$ ,  $k$  étant un nombre impair plus grand ou même égal à l'unité. Car, soit par exemple,  $k = 3$ , on aura pour la 1.<sup>re</sup> intégrale  $\frac{1}{2(a-x)^2} - \frac{1}{2a^2}$  lorsque  $x = a$ ; & pour la seconde  $\int \frac{dx}{(a-x)^3}$  ou  $\int \frac{-dx}{(x-a)^3} = \frac{1}{2(x-a)^2} - \frac{1}{2a^2}$ , ou  $\frac{1}{2(a-x)^2} - \frac{1}{2a^2}$ ; en sorte que la somme des deux est  $\frac{1}{2(a-x)^2} - \frac{1}{2a^2}$ , comme elle le doit être, l'aire qui répond à  $x > a$ , étant négative & devant être retranchée de la précédente.

On pourroit penser que la raison du paradoxe proposé est que lorsque  $x = a$ ,  $\frac{dx}{(x-a)^2}$  est infinie au lieu d'être infiniment petite, d'où il paroîtroit s'ensuivre que l'intégrale générale de  $\frac{dx}{(x-a)^2}$ , c'est-à-dire  $\frac{-1}{x-a}$  ou en général  $\frac{-1}{x-a} \pm C$  n'est plus exacte lorsque  $x = a$ . Cette solution ne seroit pas juste, ce me semble, par plusieurs raisons. Pour les faire bien sentir, mettons d'abord  $\frac{b^2}{(x-a)^2}$  pour l'ordonnée, afin de garder la loi des homogènes, & supposons que  $b^2$  soit l'aire correspondante à  $x$ , on aura  $\frac{b^2 dx}{(x-a)^2} = d\tau$ , ou  $\frac{d\tau}{dx} = \frac{b^2}{(x-a)^2}$ , ce qui signifie que la limite du rapport de  $d\tau$  à  $dx$  (*Voyez l'article DIFFÉRENTIEL de l'Encyclopédie*) au moins tant que  $x$  n'est pas  $= a$ , est  $\frac{b^2}{(x-a)^2}$ , limite d'autant plus grande que  $x$  diffère moins de  $a$ , & qui devient infinie quand  $x = a$ ; ce qu'il est d'ailleurs facile de voir, puisque l'aire est certainement infinie, si on prend  $x$  tant soit peu plus grand que  $a$ .

En second lieu, puisque l'équation  $\frac{d\tau}{dx} = \frac{b^2}{(x-a)^2}$  ou  $\frac{d\tau}{dx} = \frac{b^2}{(a-x)^2}$

# 128 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

est exacte, au moins tant que  $x$  n'est pas égal à  $a$ , il est évident que l'intégrale rigoureuse & exacte de  $\frac{dx}{(a-x)^2}$ , tant que  $x$  est  $< a$ , est  $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$ ; or cette quantité qui exprime l'aire de l'hyperbole, a évidemment pour limite  $\frac{1}{+0} - \frac{1}{a}$  lorsque  $x = a$ ; cette limite infinie exprime donc évidemment l'aire de l'hyperbole lorsque  $x = a$ . Supposons de même  $x > a$ , l'intégrale exacte & rigoureuse de  $\frac{dx}{(a-x)^2}$  ou  $\frac{dx}{(x-a)^2}$  sera évidemment  $\frac{-1}{a-x} + \frac{1}{c-a}$  ou  $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{c-a}$ , en supposant l'aire = 0 lorsque  $x = c > a$ ; & la limite infinie de cette intégrale sera, lorsque  $c = a$ ,  $\frac{-1}{x-a} + \frac{1}{0}$ , limite qui représente évidemment l'aire infinie répondante à  $x = a$  finie & si petite qu'on voudra; quoique cette aire soit nulle quand  $x = a$ .

En troisième lieu, si on veut admettre cette métaphysique précaire de regarder  $dx$  comme *infinitement petite* en elle-même, & cependant comme infinie par rapport à  $(a-x)^2$  lorsque  $x = a$ , cette quantité  $dx$  peut aussi, lorsque  $x = a$ , être regardée comme infinie par rapport à  $a-x$ , dans les expressions  $\frac{dx}{\sqrt{a-x}}$  &  $\frac{dx}{(a-x)^2}$ ; cependant le paradoxe n'a plus lieu dans ces deux cas, & on trouve alors la vraie valeur de l'aire. La solution que nous examinons ne paroît donc pas exacte, & nous croyons devoir nous en tenir à celle que nous avons donnée.

Nous remarquerons à cette occasion qu'on auroit tort de croire le Calcul différentiel en défaut, dans certains cas où il paroît l'être. Soit, par exemple,  $z = x^m$ , &  $dz = mx^{m-1} dx$ ; il semble que par les règles du Calcul différentiel, cette seconde équation ne soit vraie que dans les cas où  $dx$  peut être supposée infinitement petite par rapport à  $x$ ; d'où il s'en suivroit qu'elle ne l'est pas lorsque  $x = 0$ . Pour lever cette difficulté, on considérera, 1.° que l'équation  $\frac{dz}{dx} = mx^{m-1}$  qui représente (*article DIFFÉRENTIEL de l'Encyclopédie*) la limite du rapport de  $dz$  à  $dx$ , est exactement & rigoureusement vraie, tant que

que  $x$  n'est pas  $= 0$ , parce que prenant  $x$  si petite qu'on voudra,  $dx$  &  $d\zeta$ , dont la limite est zéro, donneront exactement & rigoureusement dans tous les cas  $mx^{m-1}$  pour la limite du rapport de  $d\zeta$  à  $dx$ .  
 2.° De-là il s'ensuit évidemment que quand  $x = 0$ , la quantité  $mx^{m-1}$  reste encore la limite du rapport de  $d\zeta$  à  $dx$ ; c'est-à-dire infinie, finie ou nulle, selon que  $m$  est ou  $< 1$ , ou  $= 1$ , ou  $> 1$ .  
 3.° Ce qui prouve bien que l'équation  $d\zeta = dx \times mx^{m-1}$  exprime la limite du rapport de  $d\zeta$  à  $dx$ , & non l'accroissement  $d\zeta$  de  $\zeta$  qui répond à  $x + dx$ , c'est qu'en faisant  $x = 0$ , & supposant  $x + dx = 0 + dx$ , on doit avoir l'accroissement  $d\zeta = dx^m$ , & non pas  $mx^{m-1}dx$ . Mais en voilà assez sur ce sujet. On voit que les paradoxes que nous venons d'exposer, tiennent en général à l'expression vague de l'infini par la formule  $\pm \frac{1}{0}$ ; ces paradoxes paroissent mériter que les Géomètres cherchent à les éclaircir, en appliquant au calcul une métaphysique simple & lumineuse. Nous terminerons donc ici cette note, qui n'est déjà que trop longue.

(13) Outre la raison que nous avons apportée *art.* 36, pourquoi  $t = 0$  donne  $u$  de valeur quelconque dans l'équation  $t^k du = A dt$  si  $k$  est  $=$  ou  $> 1$ , mais non pas si  $k$  est  $< 1$ , on peut encore en donner une autre qui servira à jeter un nouveau jour sur cette matière.

Soit  $k = \frac{n}{m}$ , &  $t^{\frac{1}{m}} = \zeta$ , ou  $t = \zeta^m$ , on aura  $\zeta^n du = Am\zeta^{m-1} d\zeta$ .

Donc, 1.° si  $n$  est  $=$  ou  $> m$ , on aura  $\zeta^k du = B d\zeta$ ,  $k$  étant un nombre entier  $=$  ou  $> 1$ . 2.° Si  $n$  est  $< m$ , on aura  $du = B\zeta^r d\zeta$ ,  $r$  étant  $= 0$  ou positif. Or si  $\zeta$  est continuellement  $= 0$ ,  $d\zeta$ ,  $dd\zeta$ ,  $d^3\zeta$ , &c. à l'infini devront aussi l'être, ce qui aura lieu en effet dans le premier cas, puisqu'en faisant  $du$  constant, on aura  $dd\zeta = kA\zeta^{k-1} \times du d\zeta = 0$ , &c. & de même  $d^3\zeta = 0$ , & ainsi à l'infini. Mais dans le second cas on aura  $dd\zeta = \infty$  si  $r$  est  $=$  ou  $> 1$ , &  $d^3\zeta = \infty$ , & ainsi de suite; & si  $r$  est  $= 0$ , on n'a qu'à faire  $\zeta = y$ ,  $y$  étant plus grand que 1; & on aura  $ddy = \infty$ , quoique  $\zeta$  supposée toujours égale à zéro, rende  $y$  toujours égale à zéro, & par conséquent  $ddy$ ,  $d^3y$ , &c. toujours égales à zéro.

(14) Si dans le cas de cet *article* 46,  $t = 0$  donne  $u$  de valeur quelconque, & si  $u = 0$  donne  $t$  de valeur quelconque, on aura deux intégrales algébriques de la proposée, sans qu'il soit nécessaire

130 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

que l'équation différentielle entre  $t, u, dt, du$ , soit séparée ou même séparable. Si  $t = 0$  donne  $u$  de valeur quelconque, mais que  $u = 0$  ne donne pas  $t$  de valeur quelconque, on n'aura qu'une seule intégrale algébrique, sans avoir besoin de séparer les indéterminées de l'équation entre  $u, t, du, dt$ .

Si en supposant  $x = a$ , ou pour plus de simplicité  $= 0$ , on avoit plusieurs valeurs de  $y$ , savoir,  $c, d$ , &c. ce qui pourroit donner plusieurs valeurs  $a', a''$ , &c. de  $u$ , & plusieurs valeurs  $b', b''$ , &c. de  $t$ , on auroit alors différentes intégrales de cette forme  $du' + p' dt' = 0$ , dans lesquelles  $t' = 0$  donneroit  $u' = 0$ ; & si ces différentielles avoient la propriété que  $t' = 0$  donnât  $u'$  de valeur quelconque, ou réciproquement, il en résulteroit plusieurs intégrales finies & algébriques qui donneroient la valeur de  $x$  en  $y$ .

(15) Ces deux derniers cas font voir qu'on peut aussi intégrer l'équation proposée dans le premier cas (savoir  $y^2 dy + b y dy dy + a dy = 0$ ), en la multipliant par  $y'$ , & en supposant que l'intégrale soit  $y^{p+2} dy + k y^{p+1} dy = C dx^2$ , ce qui donne  $p + 2 + 2k = b$ , &  $k(p + 1) = a$ ; d'où l'on tire  $k$  &  $p$ . Ensuite on multipliera l'intégrale  $y^{p+2} dy + k y^{p+1} dy = C dx^2$  par  $2 y^m dy$ , & on supposera que son intégrale soit  $y^{m+p+2} dy = \frac{2 C y^{m+1} dx^2}{m+1} + A dx^2$ , ce qui donnera  $m + p + 2 = 2k$ ; & on aura  $dx$  en  $y$  &  $dy$ , & par conséquent  $dy$  en  $x$  &  $dx$ .

(16) Si l'équation transformée  $-\frac{du}{u} + B p^r u^s - r dp +$

$A p^m u^2 - \omega dp = 0$ , n'a que trois termes, elle est encore intégrable dans d'autres cas que celui de la réduction à l'homogénéité; savoir 1.° si  $2 - r = 0$ . 2.° si  $2 - r = 2 - \omega$ , c'est-à-dire, si  $\omega = r$ . 3.° si  $2 - r = -1$  & si  $2 - \omega = 1$ , ce qui tombe dans le cas de Riccati.

Maintenant, si dans tous les cas où l'équation proposée en  $ddp$  est intégrable, on met au lieu de  $p$  la quantité  $\frac{dy}{y dx}$ , on voit que toutes les équations de la forme  $A^2 \left(\frac{dy}{y dx}\right) + B \left(\frac{dy}{y dx}\right)^r =$

$\left[ d \left( \frac{dy}{y dx} \right)^r \right] dx^{\frac{q+3-r}{2}} \&c. = 0$ , sont intégrables, pourvu que  $\frac{q+3-r}{2}$  soit une quantité constante dans chaque terme.

(17) L'équation transformée  $x dz + z^2 dx (1+a) + z dx x (b-1) + C dx = 0$  seroit encore intégrable, si on y ajoutoit tant de termes qu'on voudroit, de la forme  $g x^n dz$  ou de la forme  $B x z^k dz$ ; or  $z = x p = \frac{x dy}{y dx}$ ; d'où il est aisé de voir que l'équation proposée en  $ddy$  sera encore intégrable, si on y ajoute tant de termes qu'on voudra de la forme  $g y x^{n-1} \times d \left( \frac{dy}{y} \right) + \frac{g x^{n-1} dy dx}{x} = g x^{n-1} ddy - \frac{g x^{n-1} dy^2}{y} + \frac{g x^{n-1} dy dx}{x}$ , ou de la forme  $\frac{B y x^n dy^2 dx}{y^n dx^n} \left[ d \left( \frac{dy}{y dx} \right) + \frac{dy}{y x} \right] = \frac{B x^n dy^2 dx}{y^n dx^n} \times \left( ddy - \frac{dy^2}{y} \right) + \frac{B x^{n-1} dy^{n+1}}{y^n dx^{n-1}}$ ,  $n$  étant un exposant tel qu'on voudra.

En général, soit l'équation  $x d(p x^\lambda) + dx [A(p x^\lambda)^q + B x (p x^\lambda)^r + \&c. + C] = 0$ , il est visible qu'elle sera intégrable; elle est de plus réductible à la forme  $x^{\lambda+1} dp + dx [A' p x^\lambda + A(p x^\lambda)^q + \&c.] = 0$ ; donc en mettant  $\frac{dy}{y dx}$  pour  $p$ , on voit que toute équation de la forme  $\frac{ddy}{y} - \frac{dy^2}{y^2} + dx x^\lambda \times \left[ \frac{A' dy}{x y dx} + \frac{A dy^q}{y^q dx^q} \times x^{\lambda q - \lambda - 1} + \frac{B dy^r}{y^r dx^r} \times x^{\lambda r - \lambda - 1} \&c. \right] = 0$ , est toujours intégrable.

On voit encore que puisque l'équation  $ddy + \frac{a dy^2}{y} + \frac{b dy dx}{x} + \frac{c dx^2}{x^2} = 0$ , est intégrable, l'équation  $d \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{a dy^2}{y dx} + \frac{b dy}{x} + \frac{c dx}{x^2} = 0$ , l'est aussi, en ne



132 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

faisant plus  $dx$  constant; ou, ce qui revient au même, l'équation

$$dd y - \frac{dy ddx}{dx} + \frac{ady^2}{y} + \frac{bdy dx}{x} + \frac{cdx^2}{x^2} = 0; \text{ donc faisant } \frac{dx}{x} = k dz, \text{ \& prenant } dz \text{ constant,}$$

on voit que l'équation  $dd y - k dy dz + \frac{ady^2}{y} + kb dy dz + k^2 c dz^2 = 0$ , est intégrable, ou simplement l'équation  $dd y + \frac{ady^2}{y} + h dy dz + g dz^2 = 0$ , en faisant  $g = k^2 c$ , &  $k = -k + kb$ , ce qui donne en supposant  $k = \pm 1$ ,  $c = g$ , &  $b = \frac{k}{k} + 1 = \pm h + 1$ . On voit encore, en prenant  $x =$

$$Az^k, \text{ que l'équation } dd y - \frac{(k-1)dy dz}{z} + \frac{ady^2}{y} + \frac{bk dy dz}{z} + \frac{ck^2 dz^2}{z^2} = 0, \text{ est intégrable, ou simplement}$$

$$dd y + \frac{ady^2}{y} + \frac{h dy dz}{z} + \frac{g dz^2}{z^2} = 0, \text{ en}$$

supposant  $bk - k + 1 = h$ , &  $1 = \frac{ck^2}{g}$ , ce qui donne

$$c = \frac{g}{k^2}, \text{ \& } b = \frac{h+k-1}{k}.$$

(18) Soit en général  $dd y + \frac{\xi dy^2}{y} + \zeta dy dx + Xy dx^2 = 0$ , on aura  $dp + pp(dx + \xi dx) + \zeta p dx + X dx = 0$ . Soit  $p = p\chi$ ,  $p$  étant une indéterminée, &  $\chi$  une fonction indéterminée de  $x$ , la transformée sera  $\frac{\chi dp}{X} + dx \left[ \frac{pp\chi\chi(\xi+1)}{X} + p \left( \frac{d\chi}{X dx} + \frac{\zeta\chi}{X} \right) + 1 \right] = 0$ .

Cette transformée sera intégrable, si on a, par exemple  $\frac{d\chi}{X dx} + \frac{\zeta\chi}{X} = A'$  &  $\frac{\chi\chi(\xi+1)}{X} = B'$ ,  $A'$  &  $B'$  étant des constantes.

C'est le cas de l'équation  $dd y + \frac{ady^2}{y} + \frac{bdy dx}{x} + \frac{cdx^2}{x^2} = 0$ , intégrée plus généralement art. 51; car on a  $\xi = a$ ,  $\zeta = \frac{b}{x}$ .

$X = cx^{-1}$ , & il n'y aura qu'à prendre  $\chi = x^{-1}$ . Ce même cas de  $\chi\chi(\xi + 1) = A' \times X$ , & de  $\frac{d\chi}{dx} + \zeta\chi = B' \times X$ , est encore celui de l'équation de l'article 52, en faisant  $\xi = a$ ,  $\zeta = Gx^n + \frac{H}{x}$ ,  $X = Bx^n$ , & en supposant  $\chi = Fx^n$ , de manière que  $Fn + H = 0$ .

La condition que  $\chi\chi(\xi + 1) = A' \times X$ , & que  $\frac{d\chi}{dx} + \zeta\chi = B' \times X$ , donne  $d\chi + \zeta\chi dx + E\chi\chi dx(\xi + 1) = 0$ ,  $E$  étant une constante quelconque; d'où l'on voit que si l'on peut intégrer l'équation  $dp + p\zeta dx + Epp dx(\xi + 1) = 0$ ,  $E$  étant une constante quelconque, ou plus simplement  $dp + p\zeta dx + pp\zeta dx + E dx = 0$ , on pourra intégrer aussi  $dp' + p'\zeta dx + Fp'p'\zeta dx + GX dx = 0$ ,  $F$  &  $G$  étant constantes, &  $X = pp'\zeta$ .

(19) Si l'équation  $ddy + \xi dy dx + Xy dx^2 = 0$  est intégrable, l'équation  $ddy + \xi dy dx + yX dx^2 + \frac{Edx^2}{y^3} c - 2\int \xi dx = 0$ , le sera aussi; car en faisant  $y = zu$ , on aura la transformée  $2 du dz + z ddu + \xi z du dx + \frac{Edx^2}{z^3 u^3} c - 2\int \xi dx = 0$ , dont l'intégrale, en multipliant par  $zc$ , sera celle de  $d(zzduc^{\int \xi dx}) + \frac{Edx^2}{z^3 u^3} c - \int \xi dx = 0$ , donc  $\frac{(zzduc^{\int \xi dx})^2}{2} + Edx^2(A - \frac{1}{2u^2}) = 0$ . Donc, &c.

Puisque l'équation  $ddy + \xi dy dx + Xy dx^2 = 0$  se change (en faisant  $y = zu$ ) en  $ddz + \xi dz dx + Xz dx^2 + \frac{2dz du}{u} + \frac{z ddu}{u} + \frac{\xi z du dx}{u} = 0$ , il s'ensuit que si on fait  $u^2 = c^{\int \zeta dx}$ , l'équation  $ddz + dz(\xi + \zeta) dx + z dx^2(X + \frac{\xi\zeta}{2} + \frac{d\zeta}{2dx} + \frac{\zeta\zeta}{4}) = 0$ , est intégrable, dans les cas où  $ddy + \xi dy dx + Xy dx^2 = 0$  le sera.

(20) Soit en général l'équation  $\frac{ddy}{dy} + Y'dy + \xi dx + \frac{Y''\xi' dx^k}{dy^{k-1}} = 0$ , & soit mis  $\frac{dY}{Y} + \frac{dX'}{X'}$  à la place de  $Y'dy + \xi dx$ , nous aurons  $d \log. \left( \frac{Y \times X' dy}{dx} \right) + \frac{Y''\xi' dx^k}{dy^{k-1}} = 0$ ; faisant donc  $\frac{Y \times X' dy}{dx} = p$ , nous aurons  $p^{k-1} dp + Y''\xi' dy \times Y^k X'^k = 0$ , ou  $p^{k-1} dp + Y''\xi' dx \times Y^{k-1} X'^{k-1} = 0$ ; équations dont la première est intégrable si  $\xi' X'^k$  est égal à une quantité constante, & la seconde si  $Y'' Y^{k-1}$  est égale à une quantité constante.

(21) On voit, par exemple, que toute équation de cette forme  $ddy + \frac{ady^2}{x^2} + \frac{bdydx}{x} + \frac{Cxdx^3}{dy} = 0$  est intégrable, puisqu'elle se réduit à  $ddy + dx^2 \left[ \frac{ady^2}{x^2 dx^2} + \frac{bdy}{x dx} + \frac{Cxdx}{dy} \right] = 0$ ; & ainsi d'une infinité d'autres, beaucoup plus générales & plus compliquées que celle-ci.

On peut former par cette méthode une grande quantité d'autres équations différentielles du second ordre qui soient intégrables. Par exemple, on fait que  $dp + p\xi dx + Xp^k dx = 0$ , ou  $\frac{dp}{p} + \xi dx + Xp^k dx = 0$  est intégrable,  $\xi$  &  $X$  étant des fonctions de  $x$ ; soit donc  $p = X' dx^m \times Y' dy^{-m}$ , & soit fait  $dx$  constant, on aura  $\frac{m ddy}{dy} + \frac{dX'}{X'} + \frac{dY'}{Y'} + \xi dx + \frac{X \times X'^m dx^{m+1} \times Y'^m}{dy^{m+1}} = 0$ , ou, ce qui revient au même, en faisant  $\frac{dY'}{mY'} = Y'' dy$ ,  $\frac{ddy}{dy} + \xi dx + Y'' dy + \frac{X'' c^k \int Y'' dy dx^{k+1}}{dy^k} = 0$ ; & si on faisoit  $dy$  constant, on auroit  $\frac{ddx}{dx} + \xi dx + Y'' dy + X'' c^k \int Y'' dy \times \frac{dx^{k+1}}{dy^k} = 0$ . Ce qui renferme le Théorème de l'article 58 ci-dessus.

(22) On parviendroit par cette méthode à trouver l'intégrale de  $d\zeta + \theta Z d\zeta = 0$  par celle de  $d + \theta Z d\zeta + \zeta d\zeta = 0$ , &

on n'avoit pas d'ailleurs des méthodes directes pour intégrer chacune de ces équations. En effet, on fait que l'intégrale de  $d\theta + \theta Z dz + \zeta dz = 0$ , est  $\theta c^{\int Z dz} + \int \zeta dz c^{\int Z dz} - A = 0$ , ou  $\theta = A c^{-\int Z dz} - c^{-\int Z dz} \int \zeta dz c^{\int Z dz}$ ; donc en faisant  $\alpha = A c^{-\int Z dz} - c^{-\int Z dz} \int \zeta dz c^{\int Z dz}$ , &  $\epsilon = A' c^{-\int Z dz} - c^{-\int Z dz} \int \zeta dz c^{\int Z dz}$ , on aura  $\alpha - \epsilon$ , que j'appelle  $\theta'$ ,  $= (A - A') c^{-\int Z dz}$ ; ce qu'on fait d'ailleurs, puisque l'intégrale de  $d\theta' + \theta' Z dz = 0$  est  $\theta' = B c^{-\int Z dz}$ ,  $B$  représentant une constante quelconque égale à la différence des deux constantes quelconques  $A$  &  $A'$ .

(23) Je ferai remarquer à cette occasion, comme on le verra encore plus bas, que l'intégrale d'une équation peut quelquefois paroître renfermer plus de constantes qu'elle n'en renferme réellement. Soit, par exemple,  $d\theta + \theta Z dz + \zeta dz = 0$ , il est constant que l'intégrale de cette équation ne doit renfermer qu'une constante. Cependant, supposons  $\theta = ut$ , on aura  $u dt + t du + ut Z dz + \zeta dz = 0$ , & faisant  $u dt + ut Z dz = 0$ , ce qui est permis, on aura les deux équations  $dt + t Z dz = 0$ , &  $t du + \zeta dz = 0$ , qui doivent, étant intégrées, donner chacune une constante, ce qui en produira deux en apparence, dans la valeur de  $\theta = ut$ . Pour résoudre cette difficulté, on remarquera que  $dt + t Z dz = 0$ , donne  $t = A c^{-\int Z dz}$ , & que  $du + \frac{\zeta dz}{t} = 0$  donne  $u = B - \frac{\int \zeta dz c^{\int Z dz}}{A}$ ; donc  $\theta$  ou  $ut = B \times A c^{-\int Z dz} - c^{-\int Z dz} \int \zeta dz c^{\int Z dz}$ ; où l'on voit que le produit des deux constantes  $B, A$ , n'en représente réellement qu'une seule.

Voici une autre difficulté du même genre, qui paroît mériter d'être résolue. Soit  $ddy + yXdx^2 = 0$ , & supposons  $y = tz$ , on aura  $ddt + Xt dx^2 = 0$ , &  $2 dt dz + t ddz = 0$ , ce qui donne  $dz = \frac{B dx}{t^2}$  &  $z = \int \frac{B dx}{t^2} + A$ ; donc  $y$  ou  $tz = t \int \frac{B dx}{t^2} + At$ ; cependant l'équation  $ddt + Xt dz^2 = 0$  étant aussi générale que  $ddy + yXdx^2$ , l'intégrale de la première doit être la même que celle de la seconde; il faut donc que  $t$  soit la même que  $y$ ; c'est-à-dire, que  $t$  &  $t \int \frac{B dx}{t^2} + At$  reviennent à la même valeur, ce qui paroît ne pas être.

Pour résoudre cette difficulté, je remarque que l'intégrale  $t \int \frac{B dx}{t^2} + At$  doit être en effet  $= t'$ ,  $t'$  étant telle que  $ddt' + t'Xdx^2 = 0$ . En effet, puisque  $ddt + tXdx^2 = 0$ , & que (hyp.)  $ddt' + t'Xdx^2 = 0$ ; donc  $\frac{ddt}{t} = \frac{ddt'}{t'}$ , &  $t' ddt - t ddt' = 0$ , &  $t dt' - t' dt = B dx$ , &  $\frac{t'}{t} = \int \frac{B dx}{t^2} + A$ , ou  $t' = t \int \frac{B dx}{t^2} + At$ . Il en sera de même des autres cas semblables,

Pour confirmer le calcul précédent par des exemples très-simples, soit  $ddy = 0$ , on aura  $y = a + bx$ , & en faisant  $y = tz$ , on aura  $ddt = 0$ , &  $z = \int \frac{B dx}{t^2} + A$ , d'où l'on tire  $t = e + fx$ ; &  $tz$  ou  $y = (e + fx) \left[ \int \frac{B dx}{(e + fx)^2} + A \right] = \left[ -\frac{B}{f(e + fx)} + A \right] (e + fx) = -\frac{B}{f} + Ae + Afx$ ; valeur aussi générale que  $y = a + bx$ . Soit de même  $ddy + ydx^2 = 0$ , on aura  $y = a \sin. x + b \cos. x$ ,  $t = e \sin. x + f \cos. x$ ;  $\int \frac{B dx}{t^2} = \frac{B}{-ee - ff} \times \left( \frac{e \cos. x - f \sin. x}{e \sin. x + f \cos. x} + A \right)$ , d'où il est aisé de voir que  $zt$  ou  $y = g \sin. x + h \cos. x$ , même valeur que  $a \sin. x + b \cos. x$ .

(24) Pour rendre cette démonstration conforme à l'énoncé du *Théorème XLV*, il faut remarquer qu'il s'est glissé dans l'énoncé de ce *Théorème* une faute d'impression, & qu'au lieu de ces mots: *si on a m valeurs de*, &c. il faut lire, *si on a m - 1 valeurs de*, &c.

(25) M. de la Grange, dans les *Mémoires de Turin*, tome III, page 184, trouve qu'en faisant  $\sigma' = \frac{\theta' d\tau}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$  &  $\sigma'' = \frac{\theta'' d\tau}{\theta'' d\theta''' - \theta''' d\theta''}$ , la valeur générale & absolue de  $\theta$  revient à celle-ci  $\theta = \frac{\sigma' f \xi \sigma'' d\tau - \sigma'' f \xi \sigma' d\tau}{\sigma' d\sigma'' - \sigma'' d\sigma'}$ . Or pour faire voir que cette expression revient à la nôtre, il suffit de prouver que  $\frac{\sigma'}{\sigma' d\sigma'' - \sigma'' d\sigma'} = \theta'$ , &  $\frac{\sigma''}{\sigma' d\sigma'' - \sigma'' d\sigma'} = \theta''$ . On voit d'abord

d'abord aisément, par les valeurs ci-dessus de  $\sigma'$  en  $\theta'$  & de  $\sigma''$  en  $\theta''$ , que  $\frac{\sigma'}{\theta'} = \frac{\sigma''}{\theta''}$ ; ensuite on a  $\theta'' = \frac{\sigma'' \theta'}{\sigma'}$  &  $d\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right) = d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right) = \frac{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}{\theta' \theta'}$  à cause de  $\sigma' = \frac{\theta' d\tau}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$ . Donc  $\theta' = \frac{d\tau}{\sigma' d\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)} = \frac{\sigma' d\tau}{\sigma' d\sigma'' - \sigma'' d\sigma'}$ ; &  $\theta''$  ou  $\frac{\theta'' \sigma''}{\sigma'} = \frac{\sigma'' d\tau}{\sigma' d\sigma'' - \sigma'' d\sigma'}$ .

Il me semble que l'expression de  $\theta$  donnée dans l'article 72, a cela d'avantageux, qu'elle renferme les valeurs immédiates de  $\theta'$ ,  $\theta''$ , & qu'elle donne d'ailleurs aisément les valeurs de  $\theta$  dans les équations plus élevées, comme on le va voir. En effet, si l'équation est du troisième ordre, & que les trois valeurs de  $\theta$ , soient  $\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $\theta'''$ , on fera  $\theta = \theta' \omega$ , & on remarquera, 1.<sup>o</sup> qu'on aura une transformée dans laquelle  $\omega$  ne se trouvera point, & dont le premier terme sera  $d d d \omega$ , & le dernier  $\frac{\xi d\tau^3}{\theta}$ . On aura donc (art. 72) la valeur générale & complète de  $\frac{d\omega}{d\tau}$ ; car en supposant  $\xi = 0$ , on a deux valeurs de  $\frac{d\omega}{d\tau}$ ; savoir,  $d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)$  &  $d\left(\frac{\theta'''}{\theta'}\right)$ ; donc, en mettant  $\mathfrak{S}'$  &  $\mathfrak{S}''$  pour ces valeurs, on aura, par

l'art. 72, la valeur générale de  $\frac{d\omega}{d\tau}$  égale à  $A \mathfrak{S}' + D \mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}' \int \frac{\mathfrak{S}' \xi d\tau}{\mathfrak{S}' d\mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}'' d\mathfrak{S}'} + \mathfrak{S}'' \int \frac{\xi \mathfrak{S}'' d\tau}{\mathfrak{S}' d\mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}'' d\mathfrak{S}'}$ ; donc la valeur générale de  $\omega$ , en mettant pour  $\mathfrak{S}' d\tau$  &  $\mathfrak{S}'' d\tau$  leurs valeurs  $d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)$  &  $d\left(\frac{\theta'''}{\theta'}\right)$ , est  $C + \frac{A \theta''}{\theta'} + \frac{D \theta'''}{\theta'} - \frac{\theta'''}{\theta'} \int \frac{\mathfrak{S}' \xi d\tau}{\mathfrak{S}' d\mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}'' d\mathfrak{S}'}$  +  $\int \frac{\theta''' \xi \mathfrak{S}' d\tau}{\theta' (\mathfrak{S}' d\mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}'' d\mathfrak{S}')} + \frac{\theta''}{\theta'} \int \frac{\mathfrak{S}'' \xi d\tau}{\mathfrak{S}' d\mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}'' d\mathfrak{S}'}$  -  $\int \frac{\theta'' \mathfrak{S}'' \xi d\tau}{\theta' (\mathfrak{S}' d\mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}'' d\mathfrak{S}')} ;$  & par conséquent  $\theta$  ou  $\theta' \omega = C \theta' + A \theta'' + D \theta''' - \theta''' \int \frac{\mathfrak{S}' \xi d\tau}{\mathfrak{S}' d\mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}'' d\mathfrak{S}'} + \&c.$  On peut même

38 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

supprimer les trois termes  $C\theta' + A\theta'' + D\theta'''$ , en supposant les constantes  $C, A, D$ , renfermées dans les quantités affectées du signe  $\int$ , ce qui est permis, & simplifiera beaucoup l'expression précédente, en la réduisant à celle-ci  $-\theta''' \int \frac{\theta' \xi dz}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'} + \theta' \int \frac{\theta'' \xi \theta' dz}{\theta' (\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta')}$   
 $+ \theta'' \int \frac{\theta' \xi dz}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'} - \theta' \int \frac{\theta'' \xi \theta'' dz}{\theta' (\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta')}$  : & on remarquera encore qu'à cause de  $\theta' dz = d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)$  &  $\theta'' dz = d\left(\frac{\theta'''}{\theta'}\right)$ , le second & le quatrième terme se réduisent à  $\theta' \int \left[ \frac{\xi}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'} \right. \\ \left. \times \left( \frac{\theta'''}{\theta'} d\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta''}{\theta'} d\frac{\theta'''}{\theta'} \right) \right]$ . Il est visible que par cette formule pour le troisième ordre, on trouvera aisément celle du quatrième, comme on a trouvé celle du troisième par celle du second, & ainsi de suite.

(26) Au reste, pour que les séries se terminent, il est nécessaire, non-seulement que le numérateur d'un des coefficients devienne enfin  $= 0$ , mais encore que le dénominateur ne soit pas zéro avant que le numérateur le soit. Il faut donc, avant de prononcer si la série est finie, examiner si l'inconvénient dont il s'agit, ne peut pas avoir lieu.

Supposons, dans le cas de l'article 76,  $r = 0$ , le numérateur sera évidemment  $b p [k - 1 - (1 + \omega)]$ ,  $\omega$  étant un nombre entier positif (en y comprenant zéro) égal à  $\frac{-e}{b p}$ ; & le dénominateur

sera  $p (k - 1) \times p \left[ k - 1 - \left( \frac{1-a}{p} \right) \right]$ . Or il est visible

1.° que le facteur  $k - 1$  du dénominateur ne peut devenir  $= 0$ ; puisque  $k$  ne fauroit être  $< 2$ . 2.° que si  $\frac{1-a}{p}$ , ou, ce qui est

la même chose,  $\frac{1-a}{q+1}$  est un nombre entier positif  $= 1 + p$ ,  $p$

pouvant être  $= 0$ , &  $p$  étant  $< \omega$ ,  $k - 1 - (1 + p)$  sera  $= 0$ , lorsque  $k - 1 - (1 + \omega)$  ne pourra pas encore l'être, étant encore un nombre

négatif. Donc si  $\frac{1-a}{q+1}$  est un nombre entier positif  $< 1 - \frac{e}{b p}$

ou  $1 - \frac{e}{b(q+1)}$ , alors la série ne se terminera pas;  $\frac{-e}{b p}$  ou

$\frac{-e}{b(q+1)}$ , étant toujours supposé un nombre entier positif.

Maintenant, supposons dans ce même cas de l'article 76,  $r = 1 - a$ , on aura pour lors  $\frac{-e}{b} = p\omega + 1 - a$ ; en ce cas le numérateur deviendra  $b p [(k-1) - (1+\omega)]$ , & le dénominateur  $[p(k-1) + 1 - a] p (k-1)$ , d'où il est encore évident que si  $\frac{a-1}{q+1}$  est = à un nombre entier positif  $1 + p$ , & que  $p$  soit  $< \omega$ , le dénominateur sera = 0, avant que le numérateur puisse le devenir. Donc si  $\frac{a-1}{q+1}$  est égal à un nombre entier positif, &  $< 1$  :  

$$= \frac{e}{b(q+1)} + \frac{a-1}{q+1}$$
; c'est-à-dire, si  $\frac{a-1}{q+1}$  est un nombre entier positif, & que  $\frac{e}{b(q+1)}$  soit  $\leq 1$ , la série ne se terminera pas;  $\frac{-e}{b(q+1)} + \frac{a-1}{q+1}$  étant toujours supposé un nombre entier positif.

Dans ces deux cas où  $p$  est  $< \omega$ , non-seulement la série ne se termine pas, mais elle a pour un de ses coefficients une quantité infinie, & par conséquent elle ne peut représenter la valeur de  $y$ .

Si dans le cas de l'article 76 & dans celui de l'article 77,  $p$  étoit =  $\omega$ , alors le coefficient du terme, dont l'exposant est  $k$ , seroit =  $\frac{0}{0}$ , & par conséquent pourroit être supposé tout ce qu'on voudroit.

On peut donc le supposer = 0, & en ce cas la série se termineroit. Mais on peut aussi lui donner une valeur arbitraire, & en ce cas la série ira à l'infini, & il y aura deux coefficients indéterminés, savoir celui du premier terme, & celui du terme dont l'exposant  $k = 2 + \omega$ .

Enfin si  $p$  est un nombre entier  $> \omega$ , alors il est visible qu'il y aura encore dans la série un coefficient =  $\frac{0}{0}$ , puisqu'il y en a déjà précédemment un égal à zéro, que tous les coefficients suivans dépendent de celui-là, & que (hyp.) il y a un coefficient qui est égal



au précédent multiplié par  $\frac{\mu}{o}$ ,  $\mu$  étant le numérateur de la fraction qui exprime ce rapport. Donc alors ce coefficient pourra être supposé ou zéro, ce qui ne donne point de nouveaux termes à la série; ou indéterminé, ce qui donne une nouvelle série illimitée. L'équation indiquée par M. de la Grange dans les *Mémoires de Turin*, tome III, pages 187 & 188, peut tomber dans ce dernier cas, & j'ai cru que cette remarque, qui n'a point, ce me semble, été faite encore, ne paroîtroit pas inutile aux Géomètres.

Il est à remarquer encore que  $\frac{a-r}{q+1}$  &  $\frac{r-a}{q+1}$  ne sauroient être à la fois des nombres entiers positifs; d'où il s'ensuit que, si dans le cas, par exemple, de  $r = o$ , un des termes de la série devient infini, il ne le sera pas dans le cas de  $r = 1 - a$ , & réciproquement. On se servira donc de l'hypothèse où aucun des termes de la série n'est infini, s'il arrivoit qu'il fût infini dans une des deux.

Il est aisé de former une équation différentielle du troisième ordre; analogue à l'équation  $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{b x^q dy}{dx} + \frac{a dy}{x dx} + c y x^{q-1} = o$ , & qui s'intègre de la même manière par une série finie en certains cas. On peut même étendre cette méthode à des différentielles d'un ordre plus élevé. Mais ce que nous en avons dit suffit pour ouvrir la route à ceux qui voudront aller plus loin.

(27) Si dans l'équation différentielle donnée,  $\frac{dy}{dx}$  monte à différentes puissances; alors nommant  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\zeta$ , on auroit une équation entre  $\zeta$ ,  $x$ ,  $y$ ; on auroit de même (art. 81) une équation entre  $C$ ,  $\zeta$ ,  $x$ ,  $y$ ; d'où l'on tirera par les méthodes connues, une équation linéaire de  $\zeta$  en  $C$ ,  $x$ ,  $y$ . On mettra cette valeur dans l'équation entre  $C$ ,  $\zeta$ ,  $x$ ,  $y$ , & on aura une équation entre  $C$ ,  $x$ ,  $y$ , qui, avec l'intégrale donnée, servira à trouver la valeur linéaire de  $C$ ; d'où l'on aura celle de  $\zeta$  ou  $\frac{dy}{dx}$ , & l'équation finale devra être identique.

Quand même la quantité  $\phi(x, y) = o$  qu'on suppose exprimer l'intégrale absolue, renfermeroit des expressions algébriques transcendentes, on pourroit toujours parvenir, par la même méthode, à l'équation  $\zeta = A(x, y)$ .

(28) Il faut donc bien prendre garde, quand une équation intégrale paroît renfermer plusieurs constantes arbitraires qui ne se trouvent point dans la différentielle, si ces constantes n'en représentent pas réellement une seule. C'est de quoi on s'assurera en différentiant l'intégrale, & mettant pour  $dx$  sa valeur  $-a dy$ . Car l'équation résultante doit être identique, ou réductible à une équation identique, en faisant disparaître toutes les constantes successivement.

(29) On prouvera de même que si l'on a une équation différentielle d'un degré quelconque  $n$ , & une intégrale qui renferme  $n$  constantes arbitraires, ce sera l'intégrale complète de la proposée. Il faut cependant modifier cette assertion par les restrictions énoncées art. 64.

(30) Donc toute équation de cette forme,  $ddy + \sigma dy dx + \xi dy^2 + X dx^2 = 0$  peut se réduire à la forme  $ddz + p dz dx + q dx^2 = 0$ , puisqu'il n'y a qu'à faire  $dy = p dx$ , &  $p = \frac{dz}{\xi dx}$ ; c'est-à-dire,  $dy = \frac{dz}{\xi}$ .

De même, toute équation de cette forme,  $y ddy + \xi y dy dx + \zeta dy^2 + X y^2 dx^2 = 0$ , ( $\xi, \zeta, X$  étant des fonctions de  $x$ ) peut se réduire à la forme  $ddz + p dz dx + q dx^2 = 0$ ; car en faisant  $y = e^{\int p dx}$ , la transformée est  $dp + p^2 (\zeta + 1) dx + p \xi dx + X dx = 0$ . On fera donc  $p = \frac{dz}{\zeta (\zeta + 1) dx}$ ; c'est-à-dire  $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\zeta (\zeta + 1)}$ .

(31) Puisque l'équation  $dp + \sigma p dx + p^2 \xi dx + X dx = 0$  se réduit à la forme  $\frac{ddz}{\zeta \xi} + \frac{dz dx}{\zeta \xi} \left( \frac{\sigma - d\xi}{\xi dx} \right) + X dx^2 = 0$ , & que cette dernière équation étant supposée intégrable, l'équation  $\frac{ddz}{\zeta \xi} + \frac{dz dx}{\zeta \xi} \left( \frac{\sigma - d\xi}{\xi dx} \right) + X dx^2 + \frac{X''}{\zeta} dx^2 = 0$  l'est aussi,  $X''$  étant telle fonction de  $x$  qu'on voudra, il s'ensuit que si  $dp + \sigma p dx + p^2 \xi dx + X dx^2 = 0$ , est intégrable,  $dp + \sigma p dx + p^2 \xi dx + X dx^2 + X'' e^{-\int p \xi dx} = 0$ , le sera aussi.

(32) Comme la valeur particulière  $X + Y \sqrt{-1}$ , qu'on suppose à  $y$ , renferme des imaginaires, on ne sera peut-être pas fâché de voir

142 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

comment ces imaginaires peuvent disparaître de l'intégrale générale. Il est d'abord évident que  $y$  doit avoir quelques valeurs réelles qui satisfassent à l'équation  $dy + yydx + dx(YY - XX) - dX = 0$ , puisqu'il y a évidemment une ligne (droite ou courbe) dont les coordonnées  $x$  &  $y$  satisferont à cette équation,  $X$  &  $Y$  étant supposées réelles. Car toute équation  $dx + a dy = 0$  a toujours une intégrale possible,  $a$  étant réelle (*Voy. Tome IV de nos Opuscules, p. 255*). Pour trouver donc dans le cas présent la valeur réelle de  $y$ , soit  $y = X + Y\sqrt{-1 - \zeta}$ , & en supposant  $X + Y\sqrt{-1} = V$ , on aura la transformée  $\frac{d\zeta}{\zeta}$

$$+ \frac{2Vd\zeta}{\zeta} + dx = 0 \text{ qui donne } \zeta = \frac{e^{-2\int Vdx}}{B + \int e^{-2\int Vdx} dx}$$

$B$  étant une constante arbitraire. Faisons  $e^{-2\int Vdx} = \xi + \zeta\sqrt{-1}$ , &  $B = A + C\sqrt{-1}$ , & nous aurons  $\zeta = \frac{\xi + \zeta\sqrt{-1}}{A + C\sqrt{-1} + \int \xi dx + \int \zeta dx\sqrt{-1}}$ ,

expression qui renfermera une quantité imaginaire de cette forme

$$\frac{\zeta A - C\xi + \zeta \int \xi dx - \xi \int \zeta dx}{(A + \int \xi dx)^2 + (C + \int \zeta dx)^2} \times \sqrt{-1}. \text{ Il faudra donc que dans}$$

l'expression générale  $X + Y\sqrt{-1} + \zeta$  de  $y$ , on ait  $-Y$  égal à

$$\frac{\zeta A - C\xi + \zeta \int \xi dx - \xi \int \zeta dx}{(A + \int \xi dx)^2 + (C + \int \zeta dx)^2}. \text{ Or, 1.}^\circ \text{ on a } V = X + Y\sqrt{-1}$$

$$= X + Ae^{-2\int Xdx}\sqrt{-1}; \text{ par conséquent on trouvera } 2\int Vdx$$

$$\text{égal à } 2\int Xdx + 2\int Ydx\sqrt{-1}, \text{ \& } e^{-2\int Vdx} = e^{-2\int Xdx}$$

$$\times e^{-2\int Ydx\sqrt{-1}} = \frac{Y}{A} e^{-2\int Ydx\sqrt{-1}}. \text{ 2.}^\circ \text{ Soit } \omega =$$

$$-2\int Ydx, \text{ on aura } e^{\omega\sqrt{-1}} \text{ égal à } \cos. \omega + (\sin. \omega)\sqrt{-1}, \text{ \&}$$

$$\text{par conséquent } e^{-2\int Vdx} \text{ ou } \xi + \zeta\sqrt{-1} = \frac{Y}{A} \times [\cos. \omega +$$

$$(\sin. \omega)\sqrt{-1}]; \text{ donc } \xi = \frac{Y}{A} \cos. \omega, \text{ \& } \zeta = \frac{Y}{A} \sin. \omega, \text{ donc}$$

$$\xi dx = \frac{Ydx}{A} \times \cos. (-2\int Ydx), \text{ \& } \zeta dx = \frac{Ydx}{A} \sin. (-2\int Ydx);$$

$$\text{donc } \int \xi dx = \frac{1}{2A} \sin. (2\int Ydx), \text{ \& } \int \zeta dx = \frac{1}{2A} [\cos.$$

$$(2\int Ydx) - 1]. \text{ Donc la partie imaginaire de la valeur de } \zeta \text{ sera}$$

$$= Y \sin. - 2 \int Y dx - \frac{YC}{A} \cos. - 2 \int Y dx - \frac{Y}{2A^2} (\sin. 2 \int Y dx)^2$$

$$- \frac{Y}{2A^2} (\cos. - 2 \int Y dx)^2 + \frac{Y}{2A^2} \cos. - 2 \int Y dx, \text{ le tout}$$
multiplié par  $\sqrt{-1}$ , & divisé par  $AA + \sin. 2 \int Y dx + \frac{(\sin. 2 \int Y dx)^2}{4A^2}$ 

$$+ CC + \frac{C}{A} \cos. 2 \int Y dx - \frac{C}{A} + \frac{1}{4A^2} (\cos. 2 \int Y dx)^2 -$$

$$\frac{2 \cos. 2 \int Y dx}{4A^2} + \frac{1}{4A^2}, \text{ c'est-à-dire, } - Y \sin. 2 \int Y dx - \frac{YC}{A} \times$$

$$\cos. 2 \int Y dx - \frac{Y}{2A^2} + \frac{Y}{2A^2} \cos. 2 \int Y dx, \text{ multiplié par } \sqrt{-1}$$
& divisé par  $AA + CC - \frac{C}{A} + \sin. 2 \int Y dx + \frac{C}{A} \cos.$ 

$$2 \int Y dx + \frac{1}{2A^2} - \frac{1}{2A^2} \cos. 2 \int Y dx. \text{ D'où il est clair que si}$$

$$AA + CC - \frac{C}{A} = 0, \text{ cette quantité se réduit à } - Y \sqrt{-1}$$
& que par conséquent  $y$  ou  $X + Y \sqrt{-1} + z$  deviendra une quantité absolument réelle, puisque les imaginaires s'y détruiront. C'est pourquoi supposant  $C$  réelle & quelconque, si on prend  $A$  égale à une des racines de l'équation cubique  $A^3 + CCA - C = 0$ , qui en a toujours au moins une réelle, on aura l'expression de  $y$  en quantités réelles. Cet essai suffit pour faire voir comment les imaginaires peuvent disparaître dans des cas plus compliqués.

(33) Donc la formule  $dy + yydx + \frac{a dx}{(a + \beta x + \gamma x^2)^2} = 0$ , est intégrable, comme M. Euler l'a déjà fait voir dans les *Mémoires de Pétersbourg*, tome VIII.

Par la même raison, on pourra intégrer l'équation  $dy + b yy dx + \frac{a dx}{(a + \beta x + \gamma x^2)^2} = 0$ , puisqu'il n'y a qu'à la multiplier par  $b$ , & faire  $by = y$ , ce qui la réduira au cas précédent.

Soit  $u = A(a + \gamma x^n)$ , on aura  $X' = [-2a\gamma n x(n-1)x^{n-2} + (2\gamma\gamma n - \gamma\gamma nn)x^{2n-2} + 4A^{-2}] : [4(a + \gamma x^n)^2]$ ; donc l'équation  $dy + yy dx + \frac{B x^{2n-2} dx + C dx + E x^{4n-2} dx}{(a + \gamma x^n)^2}$

144 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

$= 0$ , est intégrable, pourvu que  $B = -\frac{a^n(n-1)}{2}$  &  $E = \frac{2^n n - 2^n n^2}{4}$ ;  $C$  étant d'ailleurs tout ce qu'on voudra.

(34) Soit supposé  $\xi' = \frac{p d\xi}{dx}$ ,  $p$  étant une constante quelconque;

on aura (à cause de  $X\xi' = \frac{ad(X\xi)}{dx}$ ),  $\frac{dX}{X} = \frac{(-a+p)d\xi}{a\xi}$ ;

&  $X = B\xi^{\frac{p-a}{a}}$ ,  $B$  étant une constante quelconque; ensuite

l'équation  $d(X\xi) + (a-1)X\xi dx + bdx = 0$ , donnera

$X\xi + (a-1)\int X\xi dx + bx + c = 0$ , c'est-à-dire,  $B\xi^{\frac{p-a}{a}}$

$\xi^{\frac{p-a}{a}} + (a-1)\int B\xi^{\frac{p-a}{a}} dx + bx + c = 0$ . Soit enfin

supposé  $\xi = Cx^n$ , on aura  $B\xi C^{\frac{p-a}{a}} x^{\frac{np-a}{a}} +$

$\frac{(a-1)BC^{\frac{p-a}{a}} x^{\frac{np}{a}+1}}{\frac{np}{a}+1} + bx + c = 0$ ; donc toute

équation de cette forme,  $\xi ddu + Cx^n du dx + p n^2$

$Cx^n u dx^2 = 0$ , sera intégrable, si  $\xi = \frac{(1-a)Cx^{n+1}}{\frac{np}{a}+1}$

$\frac{\frac{-np}{a}+n+n}{BC^{\frac{p-a}{a}}} - \frac{\frac{-np}{a}+n}{BC^{\frac{p-a}{a}}}$ ; c'est-à-dire, qu'en

général si on a  $\xi ddu + Cx^n du dx + Kx^{n-1} u dx^2 = 0$ , l'équation sera intégrable, en supposant  $\xi = Mx^{\frac{-np}{a}+n+1} +$

$Nx^{\frac{-np}{a}+n+n} + Fx^{\frac{-np}{a}+n}$   $N, F$  étant

des constantes quelconques,  $\frac{-np}{a}$  étant un nombre  $\lambda$  tel qu'on

voudra;

voudra,  $n p$  étant  $= \frac{K}{C}$ , ce qui donne  $a = \frac{-K}{\lambda C}$ , &  $M$  étant tel que  $\frac{(1-a)C}{\frac{K}{Ca} + 1} = M$ , ou  $M = \frac{\lambda C + K}{\lambda - \lambda \lambda}$ .

On trouveroit de même d'autres cas d'intégration encore plus compliqués, en faisant  $\xi = Cx^n + Dx^p + \&c$ . On en trouveroit encore d'autres en supposant  $\xi = Ae^{x^n} + Be^{x^p} + \&c$ . Et ainsi du reste.

(35) Il semble d'abord que l'intégration de  $ddX - \xi dXd x + X \left( \xi' - \frac{d\xi}{dx} \right) dx^2 = 0$ , puisse se réduire de même à l'intégration d'une autre équation  $ddz + \zeta' dz dx + z X' dx^2 = 0$ ; dans laquelle les coefficients seront encore différens, & que par conséquent on puisse ainsi transformer la différentielle proposée  $ddu + \xi du dx + \xi' u dx^2 = 0$  en une infinité d'autres de même forme & de coefficients différens, ce qui faciliteroit l'intégration en plusieurs cas. Mais on aperçoit bientôt que comme  $ddu + \xi du dx + \xi' u dx^2 = 0$  a donné  $ddX - \xi dXd x + X dx^2 \left( \xi' - \frac{d\xi}{dx} \right) = 0$ , cette dernière donnera  $ddz + \xi dz dx + \xi' z dx^2 = 0$ , ce qui retombe dans l'équation donnée.

(36) Soit dans l'équation  $t^n = \frac{X dx^n}{\xi dt^n} + \frac{p ddx}{\xi dt^n}$ ,  $dx = T dt$ , on aura  $t^n \xi dt = X T^n dt + p dT$ , & en mettant dans  $X$ ,  $\xi$ ,  $p$ , au lieu de  $x$  sa valeur  $\int T dt$ , on aura une équation où il ne se trouvera plus que deux inconnues,  $T$ ,  $t$ , avec leurs différences.

(37) Si on avoit simplement  $ddt + N^2 t dz^n + a T dz^n = 0$ ;  $T$  ne contenant point  $\omega$ , mais une suite de puissances de  $t$ , il est clair qu'on pourroit employer la même méthode.

Quand on aura réduit le problème à intégrer une équation de cette forme,  $d^n t + A d^{n-1} t dz + B d^{n-2} t dz^2 \dots + F t dz^n = 0$ , en négligeant les termes  $a^p dz^n \varphi(t, \omega)$  on supposera  $t = e^{fz}$ ; & il faudra, pour que la valeur de  $t$  ne renferme point d'arcs de cercle, que

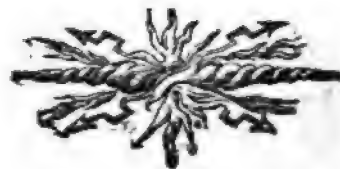
Mém. 1769.

T.

l'équation en  $f$  soit paire, qu'elle manque de ses termes pairs, & que toutes ses racines soient réelles & négatives.

Dans les autres cas, l'intégrale approchée qu'on trouvera, ne pourra servir que pour un certain nombre de révolutions, qui pourra être d'autant plus grand que  $a$  sera plus petit.

*Les Recherches sur le Calcul intégral*, que nous avons données dans ce Mémoire & dans les Notes, non-seulement renferment la démonstration des *XLIX Théorèmes*, la plupart assez généraux, énoncés dans le Volume des *Mém. de 1767*, pages 573 & suivantes, mais contiennent encore beaucoup d'autres Théorèmes sur l'intégration des quantités & des équations différentielles; Théorèmes qui pourront être utiles dans un très-grand nombre de cas. Nous aurions pu même étendre encore davantage ces différens Théorèmes, comme il n'est pas difficile de le voir, si on a bien saisi l'esprit de nos méthodes dans les différentes solutions que nous avons données. Pour n'en citer qu'un seul exemple, il est aisé de voir que les différentielles, dont nous avons réduit l'intégrale, p. 116, à la rectification des Sections coniques, y seront encore réducibles, si le dénominateur de ces différentielles, composé de deux membres radicaux, est élevé à un exposant quelconque  $p$ , qui soit un nombre entier impair & positif, pourvu que l'exposant  $t$  de  $z$  dans le numérateur, ait les conditions que nous avons indiquées. C'est un objet sur lequel nous pourrions revenir dans une autre occasion; la longueur déjà trop grande de ce Mémoire nous obligeant de le terminer ici.



## OBSERVATIONS

*De l'OPPOSITION DE JUPITER, du 8 Mai;  
du PASSAGE DE VÉNUS au-devant du Soleil,  
du 3 Juin; & de l'ÉCLIPSE DE SOLEIL,  
du 4 Juin 1769.*

*Faites à l'École Royale Militaire.\**

Par M. JEAURAT.

Ces Observations sont les premières que j'ai faites dans 7 Juin 1769.  
l'Observatoire que le Conseil de l'École Royale Militaire  
m'a fait construire, avec une générosité d'autant plus digne des  
éloges & de la reconnoissance des Savans, que les Sciences ont  
plus besoin de pareils secours, & les trouvent plus rarement.

Cet Observatoire est construit avec toute l'attention & la solidité  
desirables. J'y avois une muraille de deux pieds d'épaisseur,  
dirigée exactement dans le plan du méridien, & destinée à  
recevoir un quart-de-cercle mural de dix pieds de rayon; il y a  
une plate-forme, & spécialement une tourelle de dix pieds dans  
œuvre, dont la construction est aussi ingénieuse que nouvelle:  
elle est de l'invention de M. Taboureux, maître Charpentier.

Comme cet habile Artiste en a présenté la description à  
l'Académie, je dirai seulement ici, que le toit tournant qui  
la couvre, n'est point porté sur un pivot, qu'on soulève  
ordinairement avec difficulté, à l'aide d'une vis qui traverse  
un écrou fixé à quatre consoles, fixées elles-mêmes sur le  
mur circulaire de la tourelle. Ici la totalité du toit tournant est  
assemblée dans une sablière supérieure, dont le pendentif s'enclave  
dans la rainure d'une sablière inférieure & immobile. C'est dans  
cette rainure que se meut horizontalement, sur des roulettes, la

\* Les Observations que fera par la suite M. Jeaurat, seront faites à  
l'Observatoire Royal même, car il va y occuper le logement de feu  
M. l'Abbé Chappe d'Auteroche.



fabrière supérieure, & par conséquent la totalité du comble, & cela à l'aide d'un engrenage si aisé, qu'un enfant feroit faire au toit un tour entier en moins de cinq minutes.

Dans les premiers jours de Mai, j'ai fait transporter à mon nouvel Observatoire mes instrumens : savoir, mon sextant de quatre pieds de rayon, de la construction du sieur Canivet; mon instrument des passages, de la construction du sieur Paris; une lunette ordinaire de huit pieds, & une lunette achromatique de vingt-un pouces. \*

*Opposition de Jupiter du 8 Mai 1769.*

J'ai observé Jupiter avec la lunette de mon instrument des passages, & comme je n'avois pas encore eu le temps de rectifier avec exactitude la première position de mon instrument des passages dans le plan du méridien, cet instrument s'est trouvé éloigné du méridien de 13 secondes de temps; ce qui, comme on sait, n'est point susceptible d'inconvéniens, sur-tout quand il n'est question que de déterminer des différences d'ascensions droites & de déclinaisons. C'est donc 13 secondes avant les vrais passages au méridien, que Jupiter a été comparé, les 5, 7, 10, 11 & 12 Mai, avec l'étoile  $\gamma$  du Corbeau. Voici la position apparente de cette étoile.

Ascension droite apparente . . . . . 181<sup>d</sup> 0' 13"

Déclinaison apparente . . . . . 16. 15. 52 Australe.

Une remarque favorable aux observations que j'ai faites de l'opposition de Jupiter, c'est que mes différences d'ascension droite se sont trouvées exactement conformes à celles qu'a observées M. Cassini, & que mes différences en déclinaisons ne diffèrent de celles de M. Cassini que d'environ quatre à cinq secondes.

De mes observations de Jupiter, il résulte que son opposition

\* Dans le volume de 1770, qui suivra celui-ci, on trouvera un Mémoire de M. Jeaurat, contenant les dimensions qu'il a trouvé pour les objectifs achromatiques, composés de cinq, de quatre, de trois & de deux lentilles, calculée depuis deux pouces de foyer jusqu'à vingt pieds.

avec le Soleil est arrivée le 8 Mai 1769 à  $1^h 7' 4''$ , temps vrai, & à  $1^h 3' 16''$ , temps moyen.

La longitude héliocentrique observée de Jupiter étoit pour cet instant,

Dans l'écliptique, de.....  $7^h 18^d 7' 17''$

Dans l'orbite, de.....  $7. 18. 6. 49$

De plus, la latitude géocentrique de Jupiter étoit

de  $1^d 14' 15''$  Boréale; & la longitude calculée

avec les Tables de M. Cassini, étoit de.....  $7. 18. 7. 34$

Calculée avec mes Tables, de.....  $7. 18. 11. 0$

D'où il suit que l'Anomalie moyenne de Jupiter

étant, selon M. Cassini, de.....  $1. 11. 2. 17$

Et selon moi, de.....  $1. 10. 55. 2$

L'erreur des Tables de M. Cassini est de.....  $+ 0. 45.$

Et l'erreur de mes Tables, de.....  $+ 4. 11.$

D'où l'on voit que cette observation est favorable aux Tables de M. Cassini, & qu'elle est au contraire défavorable aux miennes.

ANNÉE	TEMPS DE LA PENDULE		TEMPS	DIFFÉRENCES	
			VRAI.		
1769.	<i>y</i> de CORDEAU.	JUPITER.	JUPITER.	des ASCENS. DROITES.	des DÉCLINAIS.
5 Mai.	$9^h 10' 18''$	$12^h 11' 6''$	$12^h 12' 26''$	$+45^d 19' 21''$	
7 Mai.	9. 2. 21	12. 2. 10	12. 3. 38	$+45. 4. 43$	$-11' 5''$
10 Mai.	8. 50. 25	11. 48. 42	11. 50. 27	$+44. 41. 37$	$-17. 30$
11 Mai.	8. 46. 28	11. 44. 14	11. 46. 1	$+44. 33. 49$	$-19. 40$
12 Mai.	8. 42. 31	11. 39. 47	11. 41. 37	$+44. 26. 19$	

*CALCUL des Observations précédentes.*

	TEMPS	ASCENSION DROITE	DÉCLINAISON
	VRAI.	de JUPITER.	de JUPITER.
5 Mai...	$12^h 12' 26''$	$226^d 19' 34''$	
7 Mai...	12. 3. 38	226. 4. 56	$16^d 4' 47''$ A.
10 Mai...	11. 50. 27	225. 41. 50	15. 58. 22 A.
11 Mai...	11. 46. 1	225. 34. 2	15. 56. 22 A.
12 Mai...	11. 41. 37	225. 26. 32	

*Passage de Vénus sur le disque du Soleil, du 3 Juin 1769.*

Quant à l'observation du passage de Vénus, il ne m'étoit pas possible de la faire dans mon observatoire, car on n'y découvre pas l'horizon au couchant; & ce phénomène si rare & si important pour la détermination de la parallaxe du Soleil, ne devoit commencer qu'environ 42 minutes avant le coucher du Soleil. J'ai donc transporté mes instrumens dans une chambre d'un des nouveaux pavillons de l'hôtel: j'y étois on ne peut pas plus commodément pour cette observation; mais le temps a été si fâcheux, qu'il s'en est peu fallu que mes peines ne devinssent entièrement inutiles. Il pleuvoit à-verse à 7 heures 20 minutes; & le premier bord de Vénus entroit vraisemblablement alors sur le Soleil. A 7 heures 30 minutes, le Soleil s'est montré; Vénus étoit à peu près entrée sur le disque du Soleil des trois quarts de son diamètre. Le Soleil s'étant encore caché, il ne s'est montré de nouveau qu'à 7 heures 40 minutes; alors l'entrée du second bord du disque de Vénus étoit faite, & il ne restoit plus que 11 minutes de temps pour observer; car la montagne, & sur-tout l'église des Bons-hommes, a masqué le Soleil environ 6 minutes avant son coucher.

Le parti que j'ai pris a été d'observer aux fils vertical & horizontal de ma lunette, les passages des bords inférieurs & supérieurs, & ceux des bords orientaux & occidentaux du Soleil & de Vénus: j'ai donc trouvé qu'à  $7^h 41' 25''$ , temps vrai à l'École Militaire, le centre de Vénus étoit à droite de celui du Soleil, de  $1' 15''$ ; & plus bas que le bord supérieur du Soleil, de  $1' 9''$ .

De cette observation, il résulte qu'à  $7^h 21' 25''$ , temps vrai; Vénus avoit

Pour ascension droite.....  $72^d 5' 18''$

Pour déclinaison boréale.....  $22. 38. 54$

Lorsque Vénus étoit entrée aux trois quarts de son diamètre sur le Soleil, j'ai aperçu la partie de Vénus qui étoit au-dehors du

Soleil; mais je n'ai point vu d'anneau lumineux qui entourât la Planète, quoique les extrémités de son disque ne m'aient pas paru être bien exactement tranchées: & après l'entrée totale de Vénus sur le disque du Soleil, j'ai vu autour de la Planète une espèce de cercle rougeâtre, que je crois avoir été occasionné par l'effet de la réfraction qui est considérable dans les approches de l'horizon.

*Observations de Vénus, faites aux fils vertical & horizontal de ma lunette.*

	TEMPS VRAI DES PASSAGES	
	au fil horizont.	au fil vertical.
Bord inférieur du Soleil.....	7 <sup>h</sup> 41' 54"	
Bord occidental du Soleil.....	.....	7 <sup>h</sup> 43' 4"
Bord occidental de Vénus.....	.....	7. 44. 23
Bord oriental de Vénus.....	.....	7. 44. 27
Bord inférieur de Vénus.....	7. 45. 22	
Bord supérieur de Vénus.....	7. 45. 28	
Bord supérieur du Soleil.....	7. 45. 33	
Bord oriental du Soleil.....	.....	7. 45. 56
Bord occidental du Soleil.....	.....	7. 47. 58
Bord occidental de Vénus.....	.....	7. 49. 10
Bord oriental de Vénus.....	.....	7. 49. 15
Bord oriental du Soleil.....	.....	7. 50. 51
Coucher du Soleil (derrière l'église des Bons-hommes)...	.....	7. 51. 18

*Éclipse de Soleil du 4 Juin 1769.*

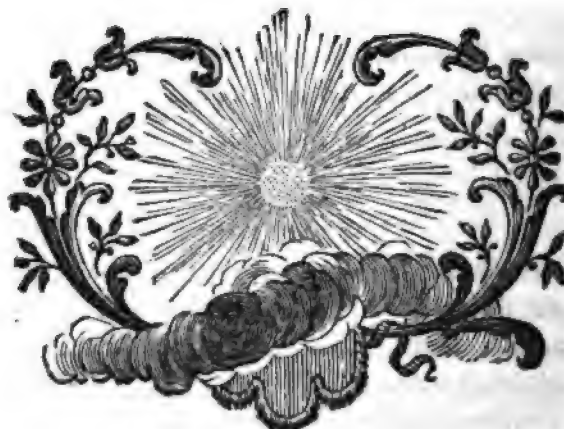
Le 4 Juin au matin le temps a été très-favorable pour observer l'éclipse de Soleil; mais le prompt déménagement qu'il m'a fallu

# 152 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

faire de mes instrumens, pour les replacer dans mon observatoire; ne m'a pas permis de me disposer comme il auroit convenu pour cette observation; cependant on peut compter sur ceci.

Commencement de l'Éclipse à . . . . .	6 <sup>h</sup> 46' 40"	} Temps vrai à l'École Royale militaire.
Grandeur, 5 doigts $\frac{1}{3}$ ou 14' 0" à . . .	7. 7. 0	
Fin de l'Éclipse à . . . . .	8. 27. 4	
Durée totale . . . . .	1. 40. 24	

Cette Éclipse a commencé 3' 7" & a fini 2' 49" plus tôt que le calcul ne l'avoit donné (*Connoissance des Temps de 1769*).



MÉMOIRE

---

## M É M O I R E

*Sur la nécessité qu'il y a, dans les Essais ordinaires des matières d'Argent, d'extraire des coupelles la particule d'Argent fin qu'elles retiennent toujours, pour écarter les variations auxquelles cette opération est sujette, & connoître sûrement le titre intrinsèque de ces matières.*

Par M. TILLET.

SI les connoissances d'un certain ordre, & principalement celles dont l'intérêt public est le grand objet, méritent que l'esprit s'y porte par choix, & s'en occupe tout entier, il semble aussi qu'il soit attaché à ces connoissances, qu'on ne puisse les acquérir que par des degrés insensibles, & en revenant quelquefois sur ses pas pour prendre des voies différentes de celles qui avoient d'abord paru conduire directement au but. On est encore trop heureux, dans les pénibles recherches qu'exigent les vérités physiques, d'avoir laissé des faits qui portent la lumière avec eux, sur lesquels des expériences multipliées ne laissent aucun doute, & qui sont comme autant de points fixes qu'il n'est plus possible de perdre de vue à mesure qu'on avance dans le travail qu'on a entrepris. Alors ces points fixes dont je parle empêchent qu'on ne tombe dans des écarts importants; & si l'on ne tire pas de ses recherches toute l'utilité qu'on se propose, au moins en obtient-on quelques avantages certains. D'ailleurs, ne doit-on pas compter pour beaucoup d'avoir aplani une route dans laquelle des hommes plus éclairés & moins distraits par les obstacles, peuvent marcher facilement dans la suite, & toucher enfin au terme où il s'agissoit d'aboutir? Ceux qui ont frayé cette route, ne sont pas parvenus au but, il est vrai, mais ils y ont aspiré; ils y ont dirigé leur

*Mém. 1769.*

V.

travail ; & si les bornes de leurs lumières les ont forcés de laisser à des hommes de génie l'honneur d'atteindre au point de perfection, ils partagent au moins avec eux la satisfaction plus solide d'avoir concouru au bien de la société.

Cette réflexion s'est présentée à mon esprit, dès le moment où j'ai pris la plume pour rendre compte à l'Académie des nouvelles expériences que j'ai faites sur la manière de fixer le titre des matières d'argent. Je suis sans doute plus instruit aujourd'hui que je ne l'étois dans le temps où j'ai publié plusieurs Mémoires sur ce sujet ; mais je n'en deviens que plus réservé dans les assertions dont il est susceptible. Je n'y avois vu d'abord qu'une certaine perfection à donner aux opérations que les Métallurgistes connoissent, & je comptois qu'elle n'étoit pas absolument difficile à procurer ; mais de bonne foi avec moi-même, & sentant toute l'importance de la matière dont il s'agit, j'ai reconnu & j'avoue que la méthode ordinaire de faire les essais, avec quelque attention qu'on la suive, laisse encore des incertitudes sur le véritable titre des matières. Il n'y a qu'un moyen de le fixer rigoureusement, si l'on suit la méthode usitée ; j'en ai parlé dans mes précédens Mémoires : j'ai eu pour but, sur-tout dans le dernier qui fait partie du Recueil de l'Académie pour l'année 1763, de prouver que ce moyen réuni à la méthode ordinaire, est le meilleur qu'on puisse choisir, & j'espère que le compte que je vais rendre de mes nouvelles expériences, ne laissera subsister aucun doute à cet égard. J'aurois insisté précédemment sur la nécessité de recourir à ce moyen, pour obtenir le titre des matières dans toute la justesse, s'il ne rendoit pas l'opération des Essayeurs plus longue, plus délicate, & si, d'un autre côté, elle n'intéressoit pas l'ordre politique : j'ai donc cru devoir examiner d'abord si une exactitude constante pouvoit naître de la méthode ordinaire, prise dans toute la perfection, mais restreinte aux procédés que les meilleurs Chimistes ont prescrits jusqu'ici. Cette exactitude ne s'étant point annoncée dans une multitude d'expériences variées de toutes les manières où je tâchois de l'obtenir, j'ai conclu qu'il falloit, quelque peine qu'il en coûtât, recourir au moyen qui procure seul la certitude, le publier comme tel,

fauf à la sagesse du Gouvernement à l'adopter, après qu'il auroit été convaincu de la précision qui résulte de ce moyen, & qu'il se seroit occupé ensuite des intérêts du Commerce sur lesquels une manière nouvelle de fixer le titre des matières influeroit essentiellement.

Je commencerai par exposer dans ce Mémoire les expériences que j'ai faites pour tâcher de découvrir la cause des variations des Essayeurs dans les rapports qu'ils donnent journellement du titre d'une même matière, & pour y remédier si l'art pouvoit aller jusque-là. Je prouverai en second lieu que les opérations ordinaires en ce genre, & qui paroissent bien faites, sont encore vicieuses radicalement; qu'elles ne feroient conduire seules à l'exactitude qu'on y suppose cependant comme attachée & comme formant la règle décisive du prix des matières d'argent. Je rappellerai ensuite le moyen certain de déterminer leur titre, & de le retrouver toujours le même, quand une fois il aura été bien établi: je parlerai de l'utilité que le Commerce tireroit de cette manière nouvelle d'opérer; & je finirai par quelques réflexions sur la nécessité qu'il y auroit qu'on l'adoptât généralement, pour qu'elle produisît les effets avantageux qui s'y trouvent joints.

Les variations qu'on remarque assez souvent dans des opérations correspondantes que font quelquefois plusieurs Essayeurs, tandis qu'il semble que l'uniformité devroit toujours s'y trouver, puisque leur méthode est la même; les variations qu'éprouve un Essayeur en particulier, lorsqu'il répète ses expériences pour en être plus certain, peuvent avoir plusieurs causes différentes: leurs balances n'ont pas toujours la sensibilité & la précision nécessaires; leurs poids manquent quelquefois de justesse; les matières qu'ils essaient, & qui communément ne sont pas pures, peuvent avoir été mal fondues; l'alliage peut s'y trouver inégalement répandu; le plomb dont ils font usage contient quelquefois des matières étrangères qui nuisent à leurs opérations. Ce même plomb n'est presque jamais dépouillé totalement d'argent; il peut arriver, lorsqu'il en contient, que cet argent ne soit pas également distribué dans toute la masse de plomb d'où les Essayeurs tirent les parties qu'ils emploient journellement, & dès-lors leurs boutons d'essais s'en



trouveront plus ou moins enrichis. Si les Essayeurs tiennent d'ailleurs au préjugé que les doses de plomb plus ou moins fortes ne nuisent point à la perfection des essais, ils ne s'astreindront pas peut-être aux règles prescrites sur ce point, & ils ajouteront par-là de nouvelles causes de variation à celles qui sont attachées à leur art. La conduite du feu, & ceci est le principal, n'aura pas été souvent l'objet de toute leur attention; il leur aura suffi que les boutons d'essais soient sortis des coupelles avec toutes les apparences d'un affinage complet, pour qu'ils aient compté sur l'exactitude de leur travail, tandis que ces mêmes boutons d'essais, ou contiendront encore une petite portion d'alliage, ou poussés trop vivement, auront plus perdu en matière précieuse que les essais bien conduits n'en perdent communément. Il n'est pas rare, d'un autre côté, que les Essayeurs, après avoir ôté des coupelles les boutons d'essais, négligent d'en examiner le bassin & de recueillir les petits globules d'argent fin qui y restent quelquefois adhérens & font partie du bouton qui détermine le titre. La perte sur ce bouton d'essai deviendra de toute une autre conséquence, & occasionnera une plus grande erreur si la matière, en fusion dans la coupelle, a éprouvé quelque pétilllement auquel l'Essayeur ne se soit pas rendu attentif; il ne lui est plus possible alors de compter ni sur l'essai où ce pétilllement a eu lieu, ni sur ceux qui pouvoient être à côté, puisque l'un a perdu quelques parties de la matière propre, & les autres en ont reçu qui leur sont étrangères.

A ces causes ordinaires d'incertitude dans l'opération des essais, il faut ajouter celles qui peuvent naître du calcul & de la confusion des poids, dont quelques-uns échappent presque aux yeux, & qui, trop foibles pour porter le plus petit numéro, ne sauroient être distingués les uns des autres que par une légère différence dans leur dimension & par la grande habitude de les voir. On sent en effet que le rapport des Essayeurs peut varier quelquefois par cette dernière raison seule, & malgré toutes les précautions qu'ils auroient prises pour que leurs opérations eussent d'ailleurs toute l'exactitude dont elles sont susceptibles.

Ces différentes causes d'erreur n'y influent que trop ordinairement, mais il est possible de les écarter: d'excellens instrumens,

connoissance des bons principes, une longue pratique & une attention scrupuleuse peuvent mettre un Essayeur en état de n'avoir rien à se reprocher la plupart des variations qu'il éprouve dans son art. La méthode usitée d'essayer n'auroit même rien de défectueux, s'il ne s'agissoit que de saisir le point de perfection qu'on y connoît pour obtenir l'exactitude constante du travail: on est trop heureux en effet d'aboutir toujours à la vérité, sur-tout en matière importante, quelque difficile que soit le sentier qui nous y conduit. Ainsi il ne sera point question dans ce Mémoire des causes d'incertitude dans les essais qu'il est au pouvoir d'un Artiste d'éviter; ce n'est point de ce côté qu'il est essentiel de porter la vue: je prie même l'Académie d'être persuadée que j'ai pris dans les expériences dont je vais lui rendre compte, toutes les précautions qui étoient nécessaires pour qu'on ne pût attribuer à aucune des causes que j'ai rapportées plus haut, les variations que j'aurai lieu de faire observer, lorsque mes opérations se trouveront bornées aux procédés seuls que les Essayeurs emploient. Au surplus l'exposé de mon travail & les résultats feront assez connoître que les variations qu'on y remarquera ont toute une autre cause que celles dont j'ai parlé, ou que si elle tient à une d'entr'elles, je veux dire la difficulté qu'il y a dans le régime du feu, cette cause est tellement enveloppée, qu'il ne sera peut-être jamais possible de l'écarter entièrement.

Dès que l'on voudra bien supposer par conséquent que les balances dont je fais usage sont ce qu'il y a de plus parfait en ce genre; que mes poids vérifiés dans ces mêmes balances, ont toute la précision requise; que le plomb que j'emploie est très-pauvre, & que la particule d'argent qu'il contient est également distribuée dans toute la masse de laquelle je tire les portions dont j'ai besoin; si l'on veut bien supposer encore que les coupelles qui me servent sont de la nature de celles que des expériences sans nombre ont autorisé à regarder comme les meilleures & dont l'usage a été ordonné par un règlement authentique, je n'aurai plus qu'à m'expliquer sur deux points essentiels & relatifs aux causes d'incertitude dans les essais; j'entends premièrement la matière d'argent alliée qui fera la base des expériences, & en second lieu la manière de

158 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

conduire le feu pendant l'opération : les difficultés se trouveront resserrées par-là dans un cercle plus étroit ; l'attention moins partagée se portera d'elle-même vers les objets dont il importe le plus de s'occuper, & il deviendra évident que la méthode ordinaire d'essayer, avec quelque soin qu'on la suive, ne conduit point à une exactitude constante, à moins qu'on n'y ajoute le procédé dont j'ai donné les détails en 1763\*.

\* *Mém. Acad.*  
p. 58.

Les matières d'argent alliées qui circulent dans le commerce ; soit en lingots, soit en vaisselle, sont regardées communément comme assez bien fondues pour que l'essai d'une très-petite portion de ces matières donne lieu d'assurer que le cuivre dont elles sont plus ou moins chargées est distribué également dans toute la masse ; & pour que cette opération décide de la valeur intrinsèque de leur totalité ; mais il arrive quelquefois que cette distribution n'est pas aussi parfaite qu'on l'imagine, ou par une suite de quelque fraude que je ne développerai point ici, ou par un défaut d'attention de la part des Fondateurs. On sent en effet que deux matières dont la pesanteur spécifique est différente & qui sont en fusion, ne resteront pas mêlées dans la proportion qu'on a établie ; si on les laisse tranquilles dans le creuset, & qu'on court risque d'avoir des lingots ou des pièces moulées dont le titre de chacun variera, si avant que de jeter ces matières dans des lingotières ou dans des moules, on n'a pas l'attention de les remuer à plusieurs reprises, & pour me servir des termes de l'art, de les bien *brasser* dans le creuset.

Il étoit trop important, dans les expériences dont j'étois occupé, que j'eusse une matière d'argent où l'alliage fût également répandu, pour que je ne prisse pas toutes les précautions qui pouvoient me la procurer. Convaincu par l'usage que l'argent & le cuivre fondus ensemble en petite quantité, ne se trouvent pas aussi-bien mêlés communément que lorsqu'on les fond en grande masse, parce qu'il est moins facile dans le premier cas que dans le second, de brasser parfaitement ces deux métaux, je me déterminai à tirer la portion de matière d'argent alliée que je devois soumettre à un grand nombre d'essais d'une quantité de 17 à 1800 mares d'argent, qui étoit chargée d'un douzième d'alliage ou environ, &

qui avoit été fondue tout ensemble dans un creuset de fer. Lorsqu'on eut bien brassé cette masse considérable d'argent, qu'on eut même vidé en partie le creuset, ce qui avoit contribué à un mélange plus complet de la matière, on versa dans un moule une trentaine de marcs de cet argent parfaitement en fusion & sans cesse agité: ce fut la partie la plus compacte de la matière qui sortit du moule, que je pris pour mes opérations, après l'avoir laminée & dépouillée avec soin des ordures légères qui s'y étoient attachées. On verra par le résultat de mes expériences que j'étois parvenu à mon but; que les moindres parties de l'argent que j'avois choisi, contenoient chacune, dans leur proportion, une égale quantité d'alliage, & qu'elles représentoient aussi proportionnellement l'alliage de la masse entière.

Le régime du feu dans l'opération des essais, a toujours été regardé avec raison comme un point très-important sur lequel l'Artiste n'acquiert des connoissances que par une longue habitude & par l'étude qu'il en fait, à mesure que des circonstances particulières lui donnent lieu de croire que les variations qu'il éprouve dans son travail peuvent être dûes à la manière dont il conduit le feu.

On sait que les fourneaux d'essais ordinaires sont construits de façon qu'ils ne peuvent donner qu'une chaleur modérée, mais telle que l'opération l'exige: la moufle dans laquelle les coupelles sont renfermées, reçoit la chaleur des charbons dont elle est couverte, de ceux qui tombent dans le cendrier, à mesure qu'ils se consomment & passent entr'elle & les parois intérieures du fourneau, de ceux enfin dont on garnit, ou le cendrier pour chauffer immédiatement le dessous de la moufle, ou l'embouchure de cette même moufle, afin que dans l'intérieur elle prenne plus promptement le degré de chaleur qui lui est communiqué par le dehors.

Les charbons dont la moufle est couverte, & ceux qu'on met au-dessous d'elle, ne sont animés que par l'air assez tranquille qui entre dans le fourneau à la faveur des ouvertures qui sont pratiquées au-devant & aux deux côtés du cendrier; cet air ne s'échappe par l'extrémité supérieure du fourneau, qu'autant qu'il se fait jour peu à peu autour de la moufle & à travers les petits

vides qu'y laisse le charbon en se consumant : la chaleur qu'il est capable d'exciter, le fourneau étant ainsi construit, n'a donc rien que de modéré, & ne sauroit être portée plus loin dans le cas où elle deviendrait nécessaire.

*\* Mémoires de l'Académie, page 361.* Le pyromètre dont j'ai donné la description dans un Mémoire qui fait partie du recueil de l'Académie pour l'année 1760\*, est relatif & applicable aux fourneaux d'essais tels qu'on les construit communément : il ne s'agissoit à leur égard que d'y attacher un moyen par lequel on y pût toujours obtenir le même degré de chaleur & l'y reconnoître, quelque peu d'habitude qu'on eût dans l'art d'essayer. Si je vais parler bientôt du changement momentané que j'ai fait au fourneau d'essai pour en tirer la plus grande chaleur possible & varier ainsi mes expériences, je perdrai de vue la marche du thermomètre, telle que je l'ai indiquée pour régler la chaleur du fourneau d'essai ordinaire ; il ne sera plus question de s'arrêter à un degré précis, mais d'examiner si le feu, poussé aussi loin qu'il peut l'être, devient favorable à l'opération des essais.

J'avois déjà parlé en 1760, dans le Mémoire que j'ai cité, du moyen d'augmenter la chaleur du fourneau d'essai, tantôt en l'élevant simplement au-dessus d'un second cendrier, après avoir fait une ouverture au fond de celui qui est propre au fourneau, tantôt en pratiquant aussi une ouverture au fond du second cendrier, & en plaçant le tout, en cet état, sur l'embouchure d'un fourneau à vent ordinaire, construit en briques, & qui reçoit l'air du dehors de l'endroit où ce fourneau à vent est établi : mais desirant d'obtenir du fourneau d'essai une chaleur beaucoup plus vive que celle qu'il est capable de donner avec le secours dont je viens de parler, j'ai employé un moyen qui a quelque rapport avec le précédent, mais dont l'effet est bien supérieur.

Je n'ai fait aucun changement dans le corps du fourneau ordinaire jusqu'au cendrier ; la moufle s'y trouve placée dans la situation & à la hauteur qu'on a observées jusqu'ici ; mais au lieu d'un cendrier ouvert de trois côtés, & dont l'élévation est communément de 3 à 4 pouces, j'en ai fait adapter un au fourneau qui a 14 pouces ou environ de hauteur. Un tuyau de tôle, coudé en forme d'équerre, & dont l'ouverture est de 6 pouces, passe  
par

par une de ses extrémités au travers du mur de la cheminée où le fourneau est placé, & y reçoit librement l'air extérieur; l'autre extrémité du tuyau aboutit à un des côtés du cendrier; elle s'y emboîte à la hauteur de 4 pouces du fond, & assez exactement pour que la totalité de l'air fourni par le tuyau se rende dans le cendrier. Deux barreaux de fer qui traversent ce cendrier à la hauteur de 9 pouces, soutiennent une grille, laquelle se trouve par-là immédiatement au-dessus de l'ouverture du tuyau ou ventouse dont je viens de parler, & y est exposée à tout le courant de l'air que ce tuyau fournit: les charbons embrasés qui tombent du corps du fourneau, en passant aux deux côtés de la moufle, pendant la grande action du feu, sont reçus sur cette grille; & les plus gros s'y arrêtent; mais ils ont perdu alors une partie de leur activité, & d'ailleurs étant à 3 ou 4 pouces au-dessous du plancher de la moufle, ils ne peuvent pas lui communiquer une forte chaleur. Afin d'y suppléer, j'ai pratiqué au-devant du cendrier, entre le dessous de la moufle & la grille, une ouverture de 6 pouces de largeur sur 2 de hauteur, à la faveur de laquelle je peux garnir de charbons le dessous de la moufle, & lui faire éprouver par-là toute l'activité du charbon qui commence à s'allumer. Une porte de tôle, revêtue intérieurement de terre à creuset, bouche exactement cette ouverture, tant qu'il n'est pas nécessaire de renouveler le charbon, & ne laisse d'autre issue à la flamme que celle qu'elle se forme en se portant d'abord sous le plancher de la moufle, & en circulant autour d'elle pour s'échapper par l'extrémité supérieure du fourneau.

Quelqu'avantageuse que paroisse la construction, elle ne produiroit pas cependant tout l'effet qu'elle annonce, si l'on ne prolongeoit pas en quelque façon le corps du fourneau par un moyen fort simple, & qui n'a lieu qu'autant qu'on le veut: il s'agit d'abord d'adapter à l'extrémité supérieure du fourneau une chappe de fer qui ait un pied de hauteur ou environ, dont la forme soit conique, & au-devant de laquelle on ait fait une ouverture pour avoir la liberté de renouveler le charbon au-dessus de la moufle; cette ouverture n'est pratiquée au-devant de la chappe que pour cette raison seule, elle n'est propre en effet par elle-même qu'à ralentir,

l'activité du feu; aussi est-il nécessaire d'y mettre une porte qu'on tient exactement fermée tant que la partie supérieure du fourneau est suffisamment garnie de charbons: il faut en second lieu placer au-dessus de cette chappe un tuyau de tôle, qui ait 3 pieds ou environ de longueur & 6 pouces d'ouverture. A la faveur de ces parties accessoires du fourneau, l'air extérieur, plus condensé que celui de l'endroit où l'on opère, entre avec rapidité dans la ventouse, & se développe dans tout le corps du fourneau proportionnellement à la grande raréfaction de la colonne d'air que la chappe & le tuyau renferment.

Avant que d'entrer dans le détail des expériences dont j'ai à rendre compte, qu'il me soit permis de rappeler ici en deux mots comment il est d'usage en France de désigner le titre des matières d'argent. Si ces matières sont considérées comme ne contenant aucune partie d'alliage, on dit qu'elles sont à 12 deniers de fin, & chacun de ces deniers se divise en 24 grains, ce qui forme un total de 288 grains; la suite de poids relative à cette fixation du titre, se nomme *semelle*: le principal d'entr'eux, celui qui représente 12 deniers de fin, pèse 36 grains, poids de marc; & le plus léger de tous, lequel répond à un seizième du grain de fin, est la 128.<sup>e</sup> partie du grain, poids de marc. Ainsi lorsqu'un lingot d'argent contient un douzième de cuivre, on fixe son titre à 11 deniers de fin; & lorsque l'alliage est d'un huitième, le titre du lingot est de 10 deniers 12 grains, & il en est ainsi graduellement de la détermination pour toutes les proportions d'alliage qui peuvent se rencontrer dans les matières d'argent. La manière d'énoncer leur titre chez les Étrangers tient, comme en France, à des poids fictifs qui varient dans leur dénomination, qui sont plus ou moins subdivisés, & dont il faut étudier le rapport avec les nôtres, lorsqu'il est question de rapprocher le titre qu'ils ont attaché à une matière de celui qu'on y trouve en France.

Je ne fis pas usage d'abord du fourneau d'essai en y joignant les parties que j'ai décrites, comme propres à y exciter une plus grande chaleur qu'il n'est capable seul d'en donner; je l'employai pour un grand nombre d'expériences, dans l'état simple où il suffit, lorsqu'il n'est question que des opérations communes.

Toutes mes épreuves roulèrent d'abord sur un seul & même morceau d'argent que je pris tel qu'il tomba sous ma main, & dont en général le degré de pureté m'étoit connu. Mon but étoit d'examiner si, après avoir reconnu un titre quelconque dans cet argent & n'avoir rien négligé de la méthode ordinaire, pour que ce titre fût fixé avec exactitude, je pourrois, en réitérant les épreuves, le retrouver toujours le même, & saisir toutes les circonstances de l'opération dans lesquelles je l'aurois d'abord fixé. Mes premiers essais de cet argent m'en indiquèrent le titre sur le pied de 10 deniers 21 grains; mais en soumettant la même matière à de nouvelles épreuves, je-remarquois des variations; si quelquefois mes boutons d'essais revenoient au point de 10 den. 21 grains, ils se trouvoient quelquefois un peu au-dessous, ou ils alloient un peu au-delà. Je n'ignorois pas que les coupelles aborboient une petite partie de l'argent que j'essayois; mais ce n'étoit pas encore le moment de m'en occuper; il ne s'agissoit d'abord que de perdre le moins qu'il étoit possible sur les essais, & de faire une perte égale en réitérant les opérations.

Sentant bien que ces variations, quoique peu importantes en apparence, avoient une cause très-difficile à saisir, je portai mon attention sur la durée du temps qu'on peut employer à faire un essai, en partant de l'instant où le plomb & l'argent mêlés dans la coupelle & en pleine fusion, commencent à circuler. Cette opération se fait communément en quinze ou vingt minutes. Je l'accélérai quelquefois au point de la terminer en dix ou douze minutes, & quelquefois je la rendis assez tardive pour qu'il s'écoulât une demi-heure avant qu'elle fût finie. Le moyen de faire varier la durée de l'opération, est fort simple: quoiqu'il faille en effet une chaleur assez considérable, soit qu'on veuille accélérer l'opération, soit qu'on aie le dessein de la ralentir, il n'est question dans le premier cas que de laisser l'air s'introduire librement dans la moufle, en n'y mettant point à l'entrée des charbons allumés; & dans le second cas, en agissant d'une manière opposée. La matière circule avec rapidité dans les coupelles, dès que l'air vient à les frapper; les fumées du plomb, s'élevant sans peine, se dissipent sensiblement par l'ouverture de la moufle, & la litharge



diminue à vue d'œil en s'imbibant dans les coupelles; au lieu que tout y est retardé par le défaut d'une certaine quantité d'air; & cela est si constant, qu'en mettant un gros charbon embrasé à l'entrée de la moufle, en l'ôtant un instant après, & ensuite en le remettant, on voit la matière circuler plus ou moins vite, & répondre alternativement à cette espèce de jeu de mettre tantôt le charbon à l'entrée de la moufle, & tantôt de le retirer.

De quelque manière que j'aie conduit mes essais, pour la durée de l'opération, je n'ai point saisi un point absolument fixe dans le titre; c'est-à-dire qu'il y avoit de la variété dans les essais ralentis, comme il s'en trouvoit dans ceux qui avoient été accélérés. Il est vrai que les premiers donnoient un titre un peu plus haut communément que les derniers; mais on en reconnoitra bientôt la raison lorsqu'il s'agira du détail des épreuves où elle sera développée: celles que je présente ici sommairement ne devoient pas me conduire à des résultats décisifs, parce que ces épreuves n'avoient pas pour base une matière dont je conusse sûrement le degré de pureté.

Quoique j'eusse obtenu, comme on vient de remarquer, du fourneau considéré dans l'état simple & ordinaire, une assez grande chaleur pour que des essais y eussent passé en dix ou douze minutes; cependant je m'étois aperçu que sur la fin de l'opération l'air favorable, il est vrai, à l'imbibition de la litharge, mais nuisible dans un autre sens, avoit un peu refroidi l'intérieur de la moufle, & que les coupelles n'avoient tout au plus que la chaleur nécessaire à l'entretien de la matière en fusion. Cette observation me donna lieu de penser qu'une diminution de chaleur qui étoit assez sensible dans un moment où la matière des essais approche du terme de son entière pureté, où les couleurs de l'iris s'y forment; & où elle tend à se fixer en forme de bouton dans le bassin de la coupelle, en perdant bientôt sa fluidité; cette observation, dis-je, me fit craindre que les boutons d'essais dont je parle n'eussent pas été épurés parfaitement par la raison qu'ils avoient perdu trop tôt leur fluidité, faute d'une chaleur assez considérable, & qu'ils ne recelassent encore quelques parties de cuivre ou de litharge. Cette inquiétude n'étoit pas sans fondement, & ce fut pour la

dissiper que je pris le parti d'ajouter au fourneau d'essai ordinaire, les parties dont j'ai donné la description: il devoit en résulter que la chaleur du fourneau seroit assez vive & assez long-temps soutenue pour que l'air introduit librement dans la moufle n'y occasionnât pas un refroidissement nuisible.

J'ai rendu compte à l'Académie en 1763\*, des expériences multipliées que j'ai faites pour prouver qu'il y a une perte constante de quelques parties du fin des matières sur les boutons d'essais, chaque fois que cette opération a lieu; j'ai démontré en même temps que cette perte n'est qu'apparente, & qu'il y a un moyen certain d'extraire de la coupelle la moindre particule d'argent fin que la litharge a entraînée avec elle.

\* *Mém. Acad.*  
P. 38.

Voilà un de ces points fixes dont j'ai parlé au commencement de ce Mémoire, lesquels servent à guider dans les recherches, & sont comme autant de principes avec lesquels il faut que tout s'accorde si l'on veut donner des résultats certains.

L'art d'essayer les matières d'argent est la manière de connoître la quantité fixe du fin qu'elles contiennent, & de n'en extraire que l'impureté. Si le bouton d'essai ne représente jamais proportionnellement la totalité de ce fin, si l'opération par laquelle on cherche à le découvrir, a radicalement le vice, avec quelque intelligence qu'on la suive, de ne procurer que des résultats toujours inférieurs à ceux qui devroient naître du fond intrinsèque des choses, il est hors de doute que l'art d'essayer, tel qu'on le pratique aujourd'hui, ne conduit à l'établissement du titre des matières que par approximation. Je sais qu'on ne s'éloigne que très-peu du but, qu'assez ordinairement même, avec beaucoup d'attention, on se tient à une égale distance de ce but; mais on ne le saisit pas; & pourquoi craindroit-on le travail pour y parvenir avec certitude, & n'éprouver jamais de variations, s'il y a un moyen de les éviter sans s'écarter beaucoup de la route ordinaire? l'exacte vérité mérite tous nos efforts.

Afin qu'un Essayeur puisse se rendre compte à lui-même de son travail, & répéter avec fruit ses expériences sur de l'argent allié, nous avons vu qu'il étoit d'abord essentiel que le mélange des deux matières fût parfait: sans cet article important, les échantillons

qu'il tireroit de cet argent allié l'induiroient en erreur par l'inégalité réelle de leur titre; & la constance à chercher la certitude dans des expériences sans cesse renouvelées, l'entraîneroit sans cesse dans de nouvelles variations.

Avec la précaution que j'ai prise de tirer, comme on a vu; d'une masse considérable d'argent bien brassée la portion de matière qui est devenue la base de mes expériences, j'ai écarté cette cause d'erreur, & l'on va juger de quelle conséquence il étoit que je m'en misse à l'abri.

Pour connoître le vrai titre de cette matière, & afin d'être en état ensuite de m'apercevoir des différences plus ou moins grandes que j'y remarquerois, en variant mes épreuves, je commençai par en faire quelques essais, sans ménager la chaleur, & en employant une dose de plomb plus forte que le titre apparent de cet argent ne l'exigeoit: je fis même subir aux boutons d'essais une seconde épreuve, afin qu'il ne me restât aucun doute sur leur affinage, ne m'occupant point dans ce moment de la plus grande diminution du fin qui devoit en résulter. Je fis la réduction des coupelles qui m'avoient servi; j'en ressuscitai la litharge, & j'en retirai le petit globule d'argent fin qui appartenoit à chacun de ces essais: les boutons qu'ils avoient donnés d'abord, joints aux globules qui en dépendoient, me représentèrent dans la plus grande exactitude le vrai titre de la matière: il ne s'y trouva point de variation; chaque essai l'annonça sur le pied de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$ . Il est vrai que les boutons d'essais n'étoient pas tout-à-fait égaux entr'eux, mais les globules ne l'étoient point aussi; ces derniers étoient un peu plus forts ou un peu plus foibles, relativement à l'inégalité du poids des boutons auxquels ils appartenoint; en un mot, chaque bouton réuni à son globule étoit égal en pesanteur à un autre bouton que son globule accompagnoit aussi, quoiqu'il y eût une petite différence sur le poids entre ces boutons pris séparément, & entre les globules considérés aussi en particulier.

On sent qu'ayant à partir de ce titre intrinsèque de la matière sur laquelle toutes mes expériences devoient rouler, je dus le constater à plusieurs reprises. Quand ce point n'eût pas été aussi important en lui-même qu'il l'étoit, j'avois tant de satisfaction à

trouver une exactitude constante, dans un travail sujet par la nature à des variations, que les expériences répétées ne me coûtoient rien, quelque pénibles qu'elles fussent : les résultats ont toujours été les mêmes ; toujours le petit globule d'argent fin complétoit le titre de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$ .

Cette certitude une fois acquise me servit de règle pour reconnoître dans les expériences postérieures & variées de plusieurs façons, à quel point je m'éloignois ou je me rapprochois du vrai titre de la matière. Sachant, par exemple, qu'à chaque essai une petite partie du fin est absorbée dans la coupelle, & que cette diminution qu'éprouve le bouton, roule sur deux ou trois grains, je m'appliquai à rendre cette diminution la plus foible qu'il fût possible, en cherchant une manière de gouverner le feu d'où cet avantage résultât. Je fis un grand nombre d'essais dans cette première vue ; je me contenterai d'en rapporter trois pour faire juger de la lumière que je tirois de l'établissement fixe du titre, par la réunion de la partie d'argent fin extraite de la coupelle avec le bouton d'essai.

Dans la première expérience, pour laquelle j'employai la dose de plomb ordinaire, c'est-à-dire six parties égales chacune à la portion d'argent prise pour l'essai, le titre fut de 10 deniers 21 grains. Dès-lors je conclus que la coupelle retenoit 1 grain  $\frac{1}{4}$  d'argent fin ; ou que si elle en avoit absorbé davantage, le bouton d'essai n'étoit pas épuré parfaitement : la vérité se manifesta bientôt ; la litharge ressuscitée de cette coupelle rendit 2 grains  $\frac{1}{2}$  d'argent fin, & il fut prouvé clairement par-là que le bouton d'essai tenoit encore 1 grain  $\frac{1}{4}$  d'alliage.

Le titre monta plus haut dans la seconde expérience & fut de 10 deniers 22 grains : le bouton d'essai qui en provint contenoit plus d'alliage que le premier ; la coupelle où il avoit passé restitua 2 grains d'argent fin : si l'on joignoit cette portion d'argent sortie de la coupelle au bouton d'essai, on auroit le titre de 11 deniers, & on le porteroit par conséquent sur le pied de 1 grain  $\frac{6}{8}$  plus fort qu'il n'est réellement.

L'affinage du bouton d'essai dans la troisième expérience étoit encore moins complet que dans les deux autres ; le bouton de

cette expérience se trouva au titre de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{2}$ : il devint évident pour moi dès l'instant, & sans que j'eusse besoin de faire la réduction de la coupelle employée dans cette troisième expérience, que le bouton d'essai qui en étoit résulté contenoit au moins un quart de grain d'alliage, puisque j'étois certain que la totalité du fin ne pouvoit aller qu'à 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$ : mais ce bouton, quoique net en apparence, retenoit encore 2 grains  $\frac{3}{4}$  d'alliage; la coupelle, en effet, rendit 2 grains  $\frac{1}{2}$  d'argent fin.

On pourra peut-être m'objecter qu'il n'est pas évident que les boutons des trois expériences que je viens de rapporter, fussent encore plus ou moins chargés d'alliage, comme je le prétends; & que l'inégalité de poids qu'il y avoit entre les trois produits pouvoit venir de la quantité inégale d'argent pur que la matière alliée des trois essais contenoit.

Quoique je fusse certain par plusieurs épreuves, du mélange exact de la matière alliée que j'employois, je n'avois garde cependant de laisser la moindre incertitude sur ce qui donne lieu à l'objection que je me suis proposée. Je n'hésitai point à faire plusieurs épreuves pour dépouiller des boutons d'essais de l'alliage que j'y supposois encore avec fondement, & pour connoître si la quantité fixe qui m'y étoit indiquée par le calcul, s'en trouveroit enlevée par une deuxième opération. Toutes mes expériences en ce point sont venues à l'appui de ce que j'ai avancé; je n'en citerai qu'une pour ne pas fatiguer l'Académie par de trop longs détails.

On a vu que le bouton de la deuxième des expériences dont je viens de parler, avoit annoncé le titre de 10 deniers 22 grains, & que je l'ai fait considérer comme contenant encore en cet état 1 grain  $\frac{6}{8}$  d'alliage. Je fis passer de nouveau ce bouton à la coupelle dans trois parties de plomb, quantité beaucoup plus que suffisante pour épurer de l'argent dont l'affinage étoit presque complet: le bouton nouveau qui sortit de cette seconde opération, avoit tous les caractères de la plus parfaite pureté (je dirai dans la suite ce qui la caractérise), mais il perdit 4 grains  $\frac{1}{8}$  de son poids, diminution trop considérable sans doute si le premier bouton eût

eût été pur; le nouveau ne donna plus en effet que le titre de 10 deniers 17 grains  $\frac{7}{8}$ : la coupelle où il venoit de passer avoit absorbé simplement 2 grains  $\frac{3}{8}$  d'argent fin. Nous venons d'observer cependant que le nouveau bouton avoit perdu 4 grains  $\frac{1}{8}$ ; le premier contenoit donc encore 1 grain  $\frac{6}{8}$  d'alliage, avant que de subir une seconde opération, puisque j'aurois retrouvé dans la seconde coupelle les 4 grains  $\frac{1}{8}$  qu'a perdu le nouveau bouton, si l'affinage du premier eût été parfait. Qu'on réunisse actuellement à ce bouton bien épuré & réduit au poids de 10 deniers 17 grains  $\frac{7}{8}$ , non-seulement la particule d'argent fin tirée de la première coupelle dont nous avons vu précédemment que le poids étoit de 2 grains, mais encore celle que la deuxième coupelle avoit absorbée, & qui pesoit 2 grains  $\frac{3}{8}$ , on aura un total de 10 deniers 22 grains  $\frac{2}{8}$ , qui est précisément le titre intrinsèque & plusieurs fois reconnu de la matière de l'essai.

Quelque lumière que jette sur le fait dont il s'agit, l'expérience que je viens de détailler, je crois devoir porter les choses à une nouvelle évidence: ce fait essentiel consiste à assurer que la matière d'argent que j'ai prise pour base de mes épreuves, étoit au titre de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$ , que l'alliage y étoit distribué également, & qu'en conséquence chacune des portions que j'ai essayées contenoit 103 parties de cuivre, & 1049 parties d'argent pur.

J'eus besoin en 1763, pour les expériences dont je rendis compte alors à l'Académie, d'un argent parfaitement pur; je l'obtins par une voie assez simple, & j'en donnai des preuves multipliées dans mon Mémoire. Une partie de cet argent m'étoit restée; je m'en suis servi récemment pour les expériences dont je vais parler: quoique je n'eusse aucun doute sur la pureté, cependant j'en ai fait un nouvel essai, en employant une dose de plomb aussi forte que l'eût exigé de l'argent chargé d'un douzième d'alliage. Le bouton qui est résulté de l'opération n'a annoncé d'abord que le titre de 11 deniers 22 grains, mais la coupelle a rendu les 2 grains qui manquoient pour composer les 12 deniers de fin; ainsi voilà une confirmation surabondante de la pureté de cet argent.

Ayant pour but dans l'expérience dont il va être question, de  
*Mém. 1769.* Y

la rendre correspondante à celles que j'avois déjà faites sur la matière générale de mes essais, dont le titre constant étoit de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$ , je pesai dans ma balance, avec la plus grande précision, la quantité en argent pur dont je viens de parler, qui représentoit ce titre; je pesai ensuite avec la même justesse la petite quantité de cuivre de rosette qui devoit représenter l'alliage que la matière générale de mes essais contenoit, & je renfermai le tout dans du papier: on voit par-là que le cuivre pesoit 1 denier 1 grain  $\frac{1}{4}$ , & que de son union avec les 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$  d'argent pur, il résulta un total de 12 deniers poids de semelle. Voilà foncièrement l'état de la matière alliée qui a été la base de mes essais, à cela près que l'argent fin & le cuivre y avoient été mêlés parfaitement par la fusion avant que je l'essayasse, & que dans mon expérience particulière le mélange des deux métaux que j'employois ne devoit avoir lieu que dans la coupelle, au moment même où j'en ferois la séparation.

Cet essai passé à l'ordinaire dans six parties de plomb, vint au titre de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire que j'eus, comme dans une des expériences précédentes, 1 quart de grain de plus en poids sur le bouton, qu'il n'y avoit dans l'argent pur employé: je retirai de la coupelle la petite portion de fin qu'elle avoit retenue, elle pesoit 1 grain  $\frac{7}{8}$ ; & lorsque je l'eus mise dans la balance avec le bouton auquel elle appartenoit, il en résulta le poids de 11 deniers 0 grains  $\frac{3}{8}$ . Voilà donc un excédant sur l'argent pur de 2 grains  $\frac{1}{8}$ ; il ne sauroit provenir sans doute que d'un reste d'alliage ou de litharge dont le bouton ne s'est pas dépouillé: je fis passer une seconde fois ce bouton à la coupelle dans trois parties de plomb; le nouveau qui en provint ne se trouva plus qu'au titre de 10 deniers 18 grains  $\frac{3}{8}$ , après avoir perdu 4 grains  $\frac{1}{8}$ , mais avec tous les indices d'une entière pureté. La seconde coupelle me rendit 2 grains d'argent fin que les trois parties de plomb y avoient entraînés; ces deux grains réunis au grain  $\frac{7}{8}$  que j'avois retiré de la première coupelle, & aux 10 deniers 18 grains  $\frac{3}{8}$ , poids du bouton épuré, composent un total d'argent pur de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$ , c'est-à-dire la quantité fixe qui avoit été la matière de l'essai. Le cuivre a donc

disparu entièrement à la faveur d'une seconde épreuve que le premier bouton d'essai a subie; l'excédant de poids qu'on avoit d'abord remarqué dans ce bouton, étoit donc étranger à la partie déterminée d'argent pur qu'il paroïssoit représenter. Qu'on se rappelle actuellement l'objection que je me suis proposée, & l'on sentira qu'elle s'évanouit: ce n'est point, je le répète, par les suites d'une inégalité de mélange dans la matière alliée qui a été le fondement de mes essais, qu'il y a de petites différences sur le poids des boutons dépendans des trois expériences que j'ai rapportées plus haut; c'est parce que ces boutons retenoient encore quelques parties d'alliage, & qu'il falloit leur faire subir une seconde opération; pour qu'accompagnés des petits globules d'argent fin que les coupelles avoient rendus, ils représentaient entièrement & dans toute la pureté la portion d'argent que contenoit la matière alliée dont je me suis servi pour les trois expériences dont il s'agit.

Après avoir eu pour objet dans les expériences précédentes de garantir le plus qu'il étoit possible les boutons d'essais de la petite perte en argent fin qu'ils éprouvent constamment; après avoir cherché à obtenir cette diminution par un feu modéré, mais néanmoins suffisant, & par une opération assez lente, mon dessein fut d'examiner si au contraire une chaleur très-vive & une opération prompte me procureroient cet avantage: les apparences n'y étoient pas; mais je ne voulois rien supposer; les faits seuls devoient me guider, & cette dernière façon de conduire mes essais pouvoit m'être utile à d'autres égards.

Après plusieurs épreuves j'ai observé de légères variations sur le titre, en faisant passer mes essais en dix minutes & avec toute la chaleur qu'ils pouvoient recevoir du fourneau, auquel la ventouse, la chappe & le tuyau dont j'ai parlé avoient été joints; je les ai observées dans cette circonstance, comme je les avois remarquées dans celles où l'opération avoit été moins courte & le degré du feu moins vif; mais je ne me suis point aperçu que toutes choses égales d'ailleurs, la perte sur les boutons d'essais fût plus marquée en général dans une circonstance que dans l'autre: je compterois davantage certainement sur l'affinage d'un bouton lorsqu'il auroit passé à un feu très-vif, avec la dose de plomb



nécessaire, que sur celui d'un autre bouton pour lequel la chaleur auroit été ménagée; mais il peut arriver, j'en ai fait la remarque, que l'un & l'autre bouton donnent le même titre, que leur degré d'affinage soit égal.

Lorsque je parle de l'affinage de ces boutons d'essais passés à un feu modéré ou très-vif, on sent que je n'entends point un affinage complet, & on a vu que pour l'obtenir tel j'ai eu recours à une double opération. Ainsi l'exactitude rigoureuse des essais, c'est-à-dire la connoissance de la totalité de l'argent fin qui est contenu dans une matière alliée, ne tient point certainement à la manière de conduire le feu; il faut toujours s'attendre dans la méthode connue d'essayer les matières d'argent à une perte plus ou moins considérable sur les boutons d'essais; il faut la regarder comme réelle relativement au commerce, tant qu'il ne sera point établi qu'on joindra à la première opération ordinaire celle de faire restituer aux coupelles la partie d'argent qui constitue cette perte. Si l'uniformité du titre, fondée sur une perte toujours égale, tient au contraire principalement à la manière de gouverner le feu, j'avoue que ce point est extrêmement délicat; qu'il est possible peut-être de le saisir par une longue pratique, mais qu'il sera fort difficile de transmettre à d'autres cette connoissance, puisqu'elle dépend beaucoup du coup-d'œil & d'une certaine intelligence à suivre la matière en fusion dans les coupelles, que le discours n'expliquera pas.

Lorsque nous fumes chargés par le Conseil, M. Hellot, M. Macquer & moi, de faire des expériences sur les moyens qu'il y auroit de perfectionner la méthode d'essayer, nous tournâmes principalement nos vues du côté de la matière des coupelles, de leurs proportions, de la manière de les former, & du côté des doses de plomb qu'il convient d'employer pour les essais proportionnellement au titre des matières. Le résultat de nos expériences donna lieu à un règlement qui est suivi aujourd'hui par tous les Essayeurs du royaume. Dans le temps où nous nous occupions à déterminer les quantités de plomb que l'affinage des matières peut exiger, nous n'ignorions pas qu'il y avoit une perte constante sur les boutons d'essais, & qu'elle étoit plus forte lorsque le plomb

avoit été prodigué : nous cherchames donc à peu près un terme où l'opération de l'essai fût faite, & où l'on éprouvât le moins cette perte par le ménagement sur les doses de plomb. Je me suis conformé au règlement du Conseil dans les expériences dont j'ai rendu compte, tant à l'égard des coupelles que par rapport aux doses de plomb qui sont prescrites, relativement au titre de l'argent : celui qui a fait la matière de mes épreuves contenoit à-peu-près un douzième d'alliage : il est ordonné d'employer six parties de plomb égales chacune à la portion de matière qu'on a prise pour l'essai, lorsqu'elle approche de ce degré d'alliage, & l'on a vu que je me suis renfermé à cet égard dans les bornes prescrites ; mais il n'échappera point à l'attention de l'Académie, que les boutons d'essais dont il a été question dans mes expériences, comme les produits simples d'une première épreuve dans six parties de plomb, contenoient encore quelques parties d'alliage, & sembleroient annoncer que cette dose de plomb ne suffit pas pour les épurer parfaitement. Cette observation aura quelque fondement, & néanmoins les vues du Conseil, dans le règlement qu'il a fait, n'en paroîtront pas moins sages. S'il eût été certain que dans la méthode connue d'essayer, une petite partie de l'argent fin ne se perdît pas ; si l'on n'eût pas été instruit que cette perte roule communément sur trois grains, on auroit considéré l'opération des essais sous un autre point de vue ; on auroit pris toutes les précautions possibles pour obtenir un affinage complet ; on auroit autant prodigué le plomb qu'on est attentif aujourd'hui à le ménager. D'ailleurs il étoit de la prudence de l'Administration de ne pas s'écarter dans la manière de fixer en France le titre des matières de l'usage établi en Europe : par-tout on observe une proportion dans les doses de plomb ; elles sont même plus fortes en France que dans quelques autres États. Les mines qui appartiennent à l'Espagne fournissent la plus grande quantité de l'argent qui circule dans le monde : l'usage des Essayeurs de ce royaume, & conséquemment de ceux qui travaillent dans le pays où l'on exploite ces mines, est de ne mettre que quatre parties de plomb sur l'argent à 11 deniers de fin, pendant qu'en France on a cru devoir, par des considérations particulières, ordonner qu'il en seroit

employé six. Combien ne seroit-il pas dangereux d'aller au-delà? nous sacrifierions par-là en effet aux Nations étrangères une partie de l'argent fin contenu dans les matières que nous leur enverrions; & de leur côté elles demanderoient sans doute que dans les matières qu'elles nous enverroient, nous leur tinssions compte d'un excédant de titre qu'elles y auroient trouvé, mais que nous n'y aurions pas reconnu par une méthode plus rigoureuse que la leur: il a donc fallu, dès qu'on a senti en France que la perte plus ou moins forte du fin des matières dépendoit de la quantité de plomb qui étoit employée dans les essais, qu'on se tint dans certaines bornes; qu'on étudiât la pratique des États voisins, & que l'on consultât autant les intérêts du commerce que la perfection du travail. Au surplus on va voir bientôt que six parties de plomb sont capables seules d'affiner une matière d'argent alliée sur le pied de 11 deniers, si l'on prend les précautions que j'indiquerai, & si l'on adopte les vues générales où ce procédé conduiroit.

J'ai établi comme un fait constant qu'en augmentant les doses de plomb dans l'opération des essais on augmentoit la perte sur l'argent fin; mais cette perte n'est point en raison des quantités de plomb ajoutées aux doses ordinaires, c'est-à-dire que si huit parties de plomb occasionnent une diminution de 3 grains de fin sur un bouton d'essai, il ne résulte pas une perte de 6 grains de l'emploi de seize parties: il y a plus, & j'ai déjà communiqué à l'Académie cette observation, quand la quantité de plomb est excessive, la diminution sur le bouton d'essai n'est pas plus forte que quand la quantité n'est qu'environ le double de la dose ordinaire; trente-deux parties, par exemple, n'affoibliront pas plus le produit d'un essai que seize. J'ai remarqué en effet que pendant tout le temps où l'argent allié nage dans une grande quantité de litharge l'affinage n'a lieu qu'imparfaitement, que la circulation de la matière est lente, & que la coupelle par conséquent se charge de fort peu d'alliage: comme ce n'est cependant qu'à la faveur de l'introduction du cuivre & de la litharge dans la coupelle, qu'il s'y glisse quelque portion du fin, il en résulte que l'argent doit subsister en total, ou ne perdre presque rien, pendant que l'alliage lui-même destiné à s'imbiber tout entier dans la coupelle,

ne s'y incorpore que foiblement. Cette remarque m'a fait conclure avec vraisemblance que l'épurement de la matière n'avoit bien lieu que lorsqu'elle circuloit avec activité dans une quantité modérée de litharge, & qu'alors aussi la perte sur le fin pouvoit avoir lieu; les expériences suivantes viennent à l'appui de ce raisonnement.

Je fis deux nouveaux essais de la matière qui avoit été la base de tant d'autres épreuves, & j'y employai six parties de plomb; mais au lieu de les mettre toutes ensemble dans la coupelle, je me bornai d'abord à quatre pour le premier essai: lorsqu'elles s'y furent totalement imbibées, & que l'argent, prêt à se fixer en bouton, eut donné quelques couleurs de l'iris, je mis dans la coupelle les deux autres parties de plomb; elles s'y éclaircirent bientôt; la circulation des matières s'établit; l'argent à la fin de l'opération donna les plus belles couleurs de l'iris, & j'eus un bouton qui ne me laissa aucun doute sur la pureté; il étoit à 10 deniers 18 grains  $\frac{3}{4}$ : il avoit perdu par conséquent 3 grains  $\frac{1}{2}$ . Mais la coupelle me les rendit; ainsi le montant du total fut de 10 deniers 22 grains  $\frac{3}{4}$ , qui est précisément le titre de la matière essayée qu'on a vu paroître tant de fois.

Quant au deuxième essai, je mis d'abord cinq parties de plomb dans la coupelle, & la sixième, lorsque les autres s'y furent imbibées: le produit de ce deuxième essai se trouva égal à celui du premier; le bouton vint au titre de 10 deniers 18 grains  $\frac{3}{4}$ .

Il paroît concluant, d'après ces deux expériences, 1.<sup>o</sup> que six parties de plomb sont suffisantes pour l'affinage complet d'une matière alliée sur le pied de 11 deniers ou environ, si l'on ne les emploie pas toutes à la fois; il paroît, en second lieu, que cet affinage réussit mieux, par la raison que j'ai exposée plus haut: en effet, dans le procédé dont il s'agit, l'argent allié se trouve réduit deux fois à n'être mêlé qu'avec une petite quantité de litharge, avec deux parties, ou même une seule; dans cette circonstance il circule avec plus de vivacité qu'auparavant, & il semble tendre davantage à s'épurer. De quelque manière que cet effet ait lieu, il est très-positif que s'il faut une certaine dose de plomb, en supposant qu'on l'emploie toute à la fois, pour affiner une matière, il ne faudra pas, pour y réussir également,

une dose à beaucoup près aussi forte, pourvu qu'on l'emploie par parties, & qu'on soutienne la chaleur du fourneau; il est vrai que, par ce dernier procédé, la perte sur le fin deviendra plus considérable; mais il n'est pas question dans ce moment-ci d'apprécier cette perte: d'ailleurs elle n'est pas réelle; un procédé de plus a bientôt tout rétabli.

À mesure que mon travail se développe, on sent mieux combien l'objet en étoit intéressant, & devoit me porter par lui-même à recourir à tous les moyens dont je pouvois, au moins en apparence, tirer quelque parti avantageux. On fait que le bismuth produit pour l'affinage de l'argent, le même effet que le plomb; je fis plusieurs tentatives à ce sujet, soit en employant le bismuth pur, soit en le mêlant avec du plomb, & en l'appliquant toujours à la matière ordinaire de mes essais. Je ne me suis point aperçu qu'il y eût plus de constance sur le titre par l'emploi du bismuth pur ou mêlé, que par l'usage du plomb. Je conviens qu'à doses égales le premier purifie mieux l'argent que le second, mais il a l'inconvénient d'entraîner dans la coupelle un peu plus d'argent fin. Six parties de bismuth, quoiqu'employées toutes à la fois, ont fait descendre le titre de la matière de mes essais à 10 deniers 18 grains  $\frac{1}{8}$ , tandis qu'on a vu plus haut que six parties de plomb mises dans la coupelle par parties différentes, & plus capables par-là d'occasionner une diminution sur le bouton d'essai, l'ont encore laissé au titre de 10 deniers 18 grains  $\frac{3}{4}$ . Mais cet inconvénient très-réel, quand on suit la méthode ordinaire d'essayer, n'en seroit plus un, si l'on ne bornoit pas la fixation du titre au simple produit des boutons.

Il a été prouvé par un grand nombre d'expériences que les meilleures coupelles d'essais sont celles dont la matière n'est que de pure chaux d'os: cette matière doit avoir été calcinée jusqu'au blanc, passée au tamis de soie & bien lessivée: l'on a senti de plus combien il étoit avantageux que les coupelles composées de cette matière fussent formées sous la presse dans des moules où elles acquerroient toute l'égalité dont elles sont susceptibles. Quoique je n'espérasse pas beaucoup d'utilité d'un changement de peu de  
conséquence

conséquence dans l'usage de ces coupelles, cependant je fis quelques épreuves: Je voulus savoir si devenues plus compactes après avoir servi, & imbibées plus ou moins de litharge, elles absorberoient moins de fin, que lorsqu'elles étoient neuves, & avoient toute leur porosité. Je broyai en conséquence, soit des coupelles que la litharge avoit pénétrées totalement, soit d'autres qui, n'ayant absorbé que peu de plomb, conservoient encore intacte la moitié ou environ de leur matière; je fis passer au tamis de soie la poudre qui en provint, avec l'attention de distinguer celle qui contenoit beaucoup de litharge, de celle qui en étoit moins chargée; & après avoir humecté ces matières, j'en formai d'autres coupelles sous la presse. Lorsqu'elles furent sèches je m'en servis pour plusieurs essais; l'opération s'y fit aussi-bien que dans des coupelles neuves, mais je n'y trouvai point l'avantage que j'aurois désiré, je veux dire la propriété de moins absorber l'argent fin. La seule utilité qu'on puisse retirer de cette expérience, si elle mérite qu'on s'y rende attentif, c'est que la matière des coupelles qui ont déjà servi, fût-elle totalement imbibée de litharge, est bonne pour en composer d'autres: c'est une ressource lorsqu'on est dépourvu de la matière pure, dont la préparation demande quelque temps, & exige des soins. Je n'ai pas besoin de faire remarquer que ces sortes de coupelles, si l'on en ressuscitoit la litharge, ne seroient pas propres à concourir à la fixation du titre intrinsèque des matières d'argent, puisqu'elles rendroient une certaine quantité de plomb qui seroit étrangère à celle du dernier essai, & causeroient par-là une augmentation illusoire dans la restitution du fin.

Je me suis restreint, dans ce Mémoire, au détail d'une partie des expériences que j'ai faites sur la matière importante que j'y traite: Quelque nombreuses & variées qu'aient été les opérations où il a fallu que je me sois livré, j'ai cru qu'il suffiroit d'en tirer les faits qui méritent le plus d'attention, & qui, rapprochés eux-mêmes les uns des autres, fournissent un résultat certain par la lumière mutuelle qu'ils se prêtent. Si l'Académie daigne donc regarder le compte que je viens de lui rendre comme un précis

fidèle de mes expériences ; si elle considère d'un autre côté qu'une longue habitude dans ce genre de travail m'a rendu circonspect lorsque les cas l'exigeoient , & m'a fait parler avec assurance lorsque des vérités que j'avois reconnues plusieurs fois se monroient de nouveau , je n'aurai plus qu'à conclure mon Mémoire par un résumé des faits principaux qu'il contient , & par quelques réflexions auxquelles ils donnent lieu.

1.° Il est certain que dans l'opération des essais , telle qu'on la pratique en Europe , il y a une perte plus ou moins forte , mais toujours constante , sur la partie d'argent fin qui , avec l'alliage , compose la matière qu'on essaie ; cette perte a toujours lieu aussi sur l'argent le plus pur qu'on fait passer à la coupelle.

2.° Il est également certain que la portion d'argent fin qui constitue cette perte , a été entraînée dans la coupelle par la litharge , & que cette litharge étant ressuscitée & passée ensuite à la coupelle , restitue la totalité de cette portion d'argent fin.

3.° Quand on supposeroit qu'un Essayeur a pris toutes les précautions que la Docimasia prescrit pour l'exactitude des essais & l'uniformité des rapports , dans des épreuves répétées plusieurs fois & dans des temps différens , sur une même matière dont l'alliage a été mêlé parfaitement avec l'argent , cet Essayeur ne pourra pas répondre qu'il trouvera toujours cette matière au même titre : cela est si constant , qu'il arrive quelquefois que deux essais destinés à se servir mutuellement de contrôle , & pour lesquels on ne doit admettre d'autre différence que celle qui résulte de l'endroit qu'ils occupent dans la moufle , ne viennent pas à un titre égal.

4.° L'égalité du titre , abstraction faite de la perte plus ou moins considérable qu'il y a toujours sur les essais , ne tient point à une chaleur excessive ou à une chaleur modérée du fourneau ; elle ne dépend point encore de la promptitude ou de la lenteur de l'opération ; c'est-à-dire que dans toutes ces circonstances , considérées séparément , un Essayeur pourra remarquer quelques variations dans le titre , ne pas le trouver toujours le même , s'il fait plusieurs essais dans la vue d'obtenir cette égalité ; elle paroît

sans doute dépendre davantage de la conduite du feu què de toute autre cause. Mais quel est le degré de chaleur qui décide d'un point aussi délicat? & s'il est possible de le connoître avec précision, combien ne paroît-il pas difficile de procurer aux essais ce degré de chaleur déterminé, soit dans la circonstance où l'humidité de l'air arrête l'activité du feu, soit lorsque cette activité est augmentée par un air sec & froid? cette difficulté n'a-t-elle pas encore une cause dans la qualité du charbon qu'on emploie; dans la construction du fourneau d'essai, dans le vide plus ou moins grand que la moufle laisse autour d'elle pour que la braise menue s'en dégage, enfin dans la chaleur considérable que le fourneau conserve, lorsque le feu y a été entretenu pendant plusieurs heures, & que l'état d'un Essayeur exige qu'il y fasse continuellement des essais. Si un homme consommé dans cette partie a pu parvenir à distinguer ce degré de chaleur duquel nous supposons que dépend l'égalité du titre, il a un coup d'œil, je le répète, qui est le point essentiel de son art; il le doit à un très-long usage, & les meilleures instructions ne le donneront pas.

S'il y a tant de causes de variation dans l'opération des essais, si elles sont difficiles à écarter, si même en y réussissant, on ne donne jamais le titre réel de la matière qu'on essaie, pourquoi se borneroit-on au procédé ordinaire, & n'y ajouteroit-on point celui de faire restituer aux coupelles la partie d'argent fin qu'elles ont recelée? Par ce supplément de travail, on se mettroit à l'abri des variations, & l'on reconnoitroit avec certitude le titre intrinsèque des matières. Plusieurs des expériences que j'ai détaillées ne laissent aucun doute sur l'exactitude de l'opération, quand on la rend ainsi complète; & on a vu que des particules d'argent impalpables, des huitièmes\* de grain de fin viennent se réunir au bouton d'essai pour composer le total de l'argent par que la matière de l'expérience contenoit.

Peut-être sera-t-on surpris que je parle d'une manière aussi positive de l'argent extrait des coupelles, comme d'une portion de la matière des essais, pendant qu'il ne paroît pas que les Chimistes

\* La cent vingt-huitième partie d'un grain; poids de marc.



qui ont écrit sur la Docimastie aient été attentifs à cet article, tout important qu'il est. Ce silence de leur part, s'il n'a rien de concluant, sembleroit au moins porter à quelque doute sur un fait que je n'hésite point à donner pour certain : j'ai senti moi-même, lorsque j'ai voulu le constater, que les autorités me manquoient, & je n'en ai mis que plus de soin dans les expériences qu'il a exigées; mais elles m'ont paru si décisives pour l'établissement de ce fait, que je n'ai point balancé à les présenter à l'Académie sous cet aspect. Si l'on considère d'un autre côté que dans les épreuves pour lesquelles la Docimastie donne des règles, il ne s'agit communément que de déterminer avec une sorte d'exactitude la quantité inconnue d'un ou de plusieurs métaux qui par nature se trouvent confondus, & non de retrouver avec la dernière précision & dans cette vue directe une quantité connue d'un métal qui a été allié exprès avec un autre; si l'on considère, dis-je, la différence de ces deux objets de travail, on sera moins surpris que les Chimistes ne se soient point occupés d'une particule d'argent impalpable que les coupelles recèlent : leur bassin est net, lorsque l'opération a réussi; il n'y reste au fond qu'un bouton d'essai brillant & bien formé, tout est rendu en apparence. J'avois besoin moi-même, je l'avoue, du motif de l'intérêt public, & il falloit que, par certaines circonstances, mes vues fussent déterminées vers le fait dont il s'agit, pour que je m'en occupasse spécialement : je l'ignorerois peut-être aujourd'hui, si une discussion importante sur la partie des essais ne m'eût donné lieu de l'approfondir.

Lorsque j'ai annoncé dans le courant de ce Mémoire, que la fixation du titre des matières deviendroit invariable, à la faveur du procédé par lequel on extrairoit des coupelles la petite partie d'argent fin qu'elles retiennent toujours, je n'ai point dissimulé que ce procédé rendroit l'opération des essais plus longue, plus délicate & un peu plus pénible qu'elle ne l'est. L'exactitude du travail dédommageroit sans doute les Essayeurs des peines qu'il auroit exigées d'eux, puisqu'ils auroient toujours des résultats certains & ne seroient pas exposés, comme ils le sont sans cesse, à faire des reprises d'essais, à cause des variations qu'ils éprouvent; mais il

feroit à desirer que l'avantage de connoître sûrement le titre réel des matières, ne dépendit pas d'un aussi long travail : j'ai fait quelques expériences pour l'abrégé; elles conduisent à la précision, il est vrai, mais je ne répondrois pas qu'elles la donnassent constamment, & dès-lors il n'en résulte pas l'exactitude dont il faut s'occuper. Voici en quoi elles consistent.

J'ai observé en général dans les essais, qu'il y a un peu moins de variation sur le titre, lorsqu'on s'applique plutôt à obtenir un bouton épuré parfaitement, qu'à le garantir le plus qu'il est possible de la perte qu'il éprouve toujours.

En conséquence de cette observation, j'ai cherché par le tâtonnement, quelle étoit la quantité de plomb, & en même temps quelle étoit la manière de l'employer par intervalles, pendant l'opération, qui me procureroit un bouton d'essai bien affiné, en faisant perdre à ce bouton une partie d'argent fin déterminée : j'ai remarqué en général que huit parties de plomb, dont six étoient employées d'abord seules, & les deux autres servoient, lorsque les premières s'étoient imbibées dans la coupelle; j'ai remarqué, dis-je, que ces huit parties de plomb ainsi employées, affinoient complètement le bouton \* d'essai, & entraînoient 4 grains ou à

\* On reconnoît qu'un bouton d'essai d'argent est pur lorsqu'il est peu adhérent au bassin de la coupelle, qu'il est net en-dessous, grenu, sans soufflures, & d'un blanc mat; qu'il est brillant en-dessus, bien bombé & comme couvert de petites lames ou écailles qui ont le plus bel éclat. Cette surface écailleuse est remarquable à la loupe simple; elle devient tout autrement frappante sous la lentille la moins forte du microscope : alors il semble que ces petites lames brillantes affectent en général la figure d'un pentagone dont les côtés sont irréguliers : cette figure y est plus ou moins grande, les côtés en sont plus ou moins inégaux; mais j'ai cru remarquer, autant qu'il m'a été possible de bien distinguer

cette figure, qu'elle tend plutôt à présenter celle d'un pentagone que toute autre. Ces écailles ne sont pas placées de manière à former sur le bouton une surface unie; les unes sont un peu plus élevées que les autres, & la tranche en est sensible : chacune de ces écailles est striée; les petits filamens qu'on y observe partent des différens côtés pour se rendre à un point qui est ordinairement au centre de l'écaille; ce point m'a paru même un peu plus enfoncé que le reste de la lame; & il sembleroit qu'il se seroit fait un léger affaissement dans l'endroit de la lame où les filamens viennent aboutir. Il seroit assez naturel que de l'argent parfaitement pur, qu'on a mis dans l'état de fluidité par l'opération de

peu près d'argent fin dans la coupelle. Six parties seulement de plomb m'ont paru produire le même effet que huit, lorsqu'au lieu de les faire passer en deux fois à la coupelle comme les huit parties, on les y met en trois fois, & en observant d'employer d'abord trois parties, d'en mettre deux parties ensuite, & de faire servir la sixième, lorsque la coupelle a absorbé les cinq autres.

Cette observation m'indiqua la quantité d'argent fin que devoit contenir le plomb dont je me servirois pour tenir lieu de celle que le bouton d'essai perdrait : j'avois 4 grains à remplacer en argent fin ; il ne me fut pas difficile d'allier du plomb avec de l'argent pur dans les proportions où huit parties enrichissent l'essai de 4 grains de fin. Mes expériences eurent encore pour base la matière d'argent alliée sur le pied de 10 deniers 22 grains  $\frac{1}{4}$  ; titre que j'avois si souvent reconnu par la réunion du globule d'argent fin, restitué par la coupelle, avec le bouton d'essai. Ce même titre reparut dans les expériences dont il s'agit ici, & je l'obtins dans le poids du seul bouton d'essai : la litharge qui l'avoit épuré, étoit

l'essai, qui s'y est soutenu pendant quelque temps, & qui est parvenu lentement à sa consistance ordinaire, il seroit assez naturel, dis-je, que cet argent affectât un certain arrangement dans ses parties, & le montrât toujours le même, ou à peu près, lorsqu'aucun corps étranger ne le trouble. Cela est d'autant plus vraisemblable que les boutons d'essais où il reste encore quelques parties d'alliage, n'ont pas tous les caractères que nous venons de remarquer ; s'ils se détachent quelquefois de la coupelle avec assez de facilité, s'ils sont grenus en-dessous & n'y retiennent que peu d'ordures vers les bords, ils sont moins bombés que les boutons purs, moins bien arrondis ; leur surface n'a pas l'éclat de ceux-ci ; les petites lames ou écailles dont nous venons de parler n'y sont pas sensibles, ou y sont mal terminées ; les stries qu'on y aperçoit ne sont pas

dans un certain ordre, & on y voit même de petites taches noirâtres qui sont un reste de l'alliage dont le bouton se trouve chargé. Ainsi, sans qu'un Essayeur ait besoin d'avoir recours au microscope pour juger de toutes les particularités que j'ai remarquées dans un bouton d'essai bien pur, il lui suffira d'examiner simplement à la loupe si ceux qu'il obtient dans ses opérations ont une surface brillante, & si cet éclat vient des petites lames ou écailles dont il s'agit : car il arrive quelquefois qu'un bouton d'essai a toute la beauté de l'argent poli sans être pur ; mais dans cette circonstance la surface du bouton est unie comme si elle étoit enduite d'un vernis ; il n'a jamais le brillant qui est dû aux petites lames striées & peut-être encore à des reflets de lumière qui résultent d'une certaine inégalité imperceptible dans la position de ces lames.

encore chargée, il est vrai, de 4 grains de fin, mais ils lui appartiennent foncièrement, & il n'y avoit en total que la quantité fixe d'argent fin qui étoit entrée dans l'opération; ainsi voilà des essais où, sans s'écarter de la méthode ordinaire, on parvient à ne rien perdre sur le fin des matières, ou pour mieux dire, à tirer du procédé même qui occasionne la perte, un moyen de la réparer.

On remarquera peut-être, en se prêtant ici un moment aux vues que j'y donne pour la facilité & l'exactitude du travail, que le moyen dont il s'agit, tout simple qu'il paroît, n'est pas cependant le plus aisé dont on puisse se servir; qu'il sembleroit plus naturel d'employer du plomb totalement dépouillé d'argent, & lorsqu'on peseroit les boutons d'essais pour en établir le titre, d'ajouter au montant des poids la quantité des grains de fin dont on supposeroit la perte.

Cette manière de rétablir par le calcul ce qui aura été enlevé aux boutons d'essais, après qu'on se sera assuré, par des expériences antérieures, du point précis où doit aller la perte; ce moyen de la réparer est plus simple, j'en conviens, que celui que j'ai proposé; mais j'ai senti qu'étant très-difficile de trouver du plomb qui ne contienne point quelques parties d'argent, il valoit mieux en ajouter la quantité nécessaire pour que les doses de plomb qu'on emploieroit, fournissent aux essais le montant de leur perte, que de proposer aux Essayeurs un moyen qui les obligeroit à se pourvoir d'un plomb parfaitement pur; ou s'ils en employoient qui contînt un peu d'argent, à défalquer le poids de cet argent sur celui qu'ils ajouteroient au poids du bouton d'essai, afin de compenser la perte qu'il auroit essuyée.

Quoi qu'il en soit du choix qu'on pourroit faire de l'une ou de l'autre manière de couvrir une perte déterminée dans les essais, j'ai déjà dit qu'il n'en résulte pas une certitude telle qu'une opération aussi importante le demande. Le point essentiel dans ce moyen abrégé de suppléer à la diminution de poids qu'éprouvent toujours les boutons d'essais, consiste à rendre cette diminution égale, & à la compenser ensuite, soit par une addition réelle d'argent fin, soit simplement par le calcul: or quel est l'Essayeur, d'après

les expériences que j'ai rapportées dans ce Mémoire, qui pourra répondre d'une perte toujours égale sur les boutons d'essais, lorsqu'il répétera plusieurs fois les épreuves, lors même qu'en les faisant, il aura l'attention de ne pas admettre la plus légère différence dans le procédé qu'il a d'abord suivi? Il faut donc conclure que, si le moyen que je viens d'indiquer met un Essayeur sur la voie de la vérité, il ne l'y met pas invariablement; & que ce ne sera jamais, qu'en restituant à chaque bouton d'essai bien épuré la partie propre d'argent fin qui lui aura été enlevée par la litharge, qu'on pourra connoître le titre réel de la matière qui aura produit ce bouton.

Il se présente ici une réflexion à faire, qui ne tient pas, il est vrai, à la partie physique de l'opération des essais, mais qui prouvera combien ce travail mérite d'être perfectionné.

Il semble, au premier coup d'œil, qu'une particule d'argent impalpable, telle qu'on la retire des coupelles, ne doit presque point influer sur la valeur des masses considérables auxquelles cette particule d'argent est relative, & l'on seroit disposé à croire que, si on l'a négligée jusqu'ici, c'est parce que ne tirant qu'à une foible conséquence, elle ne méritoit pas qu'on en fit l'objet particulier d'une recherche; mais pour peu qu'on se rende attentif au rapport bien déterminé qu'a cette particule d'argent avec la portion de matière prise pour l'essai, & si l'on considère ensuite que cette portion assez foible de matière d'argent représente des masses plus ou moins considérables, on sentira que quelques grains de fin, représentés eux-mêmes par une particule qui échappe aux yeux, ont une valeur relative, & méritent qu'on s'en occupe.

L'argent au titre de 11 deniers intrinsèquement, contient 264 grains de fin; s'il est essayé, il ne sera paraphé assez ordinairement par un Essayeur que sur le pied de 10 deniers 21 grains. Voilà donc une perte de 3 grains sur le titre; elle n'est qu'apparente, je l'avoue: mais elle est réelle pour le commerce, puisque l'argent n'y a de valeur qu'en proportion du titre apparent. Ces trois grains de diminution sont cependant la quatre-vingt-huitième partie de la totalité du titre; l'objet est essentiel sans doute;

doute : n'importe ; le bouton d'essai a éprouvé cette perte : son poids fait la règle, & par une conséquence nécessaire, la masse entière perd la quatre-vingt-huitième partie de sa valeur.

Qu'on juge actuellement de quelle importance devient la particule d'argent fin que la coupelle absorbe : elle répond à  $1 \frac{12}{88}$  pour cent de la quantité immense d'Argent monnoyé qui circule dans le commerce, & à  $1 \frac{8}{92}$  ou à peu près pour cent de toute la matière qui a trait à l'Orfèvrerie : je néglige celle qui passe dans les galons, dans les étoffes, & généralement dans tous les ouvrages où l'Argent est employé. Qu'on observe encore que toutes les Nations ayant, quant au fond, la même méthode d'essayer l'Argent, que nous pratiquons en France, doivent perdre aussi, soit un peu plus, soit un peu moins que nous, sur la valeur des matières qui circulent chez elles ; & alors on sentira que d'une particule d'argent négligée, il résulte des non-valeurs dont le montant a de quoi étonner ; je dis des non-valeurs simplement parce que les fonds existent, & qu'ils n'auroient besoin pour entrer dans le commerce de toutes les Nations que du concert des Princes qui les gouvernent. Je ne me dissimule point à moi-même la grande difficulté qu'il y auroit à établir ce concert parmi les Puissances, quelque utile qu'il fût par l'augmentation prodigieuse de matière d'argent alliée, & l'invariabilité du titre qui en feroient les suites. Il y auroit lieu d'espérer sans doute que la méthode que j'indique, ou plutôt la vérité que je propose, pourroit s'accréditer de proche en proche, si elle étoit une fois adoptée par un État, tel que la France, sur lequel les autres ont les yeux, ou tel que l'Espagne que des mines abondantes mettent à portée continuellement d'en verser le produit. Mais tel est le sort de certaines vérités en Physique qui sont liées au grand mobile d'un État ; à quelque évidence qu'on les porte, & quoique leur utilité soit démontrée, il est rare qu'on puisse les établir au moins dans toute leur étendue, dès que ces vérités exigent un changement dans des pratiques reçues & autorisées par des formes authentiques : on craint les secousses momentanées qu'elles occasionneraient, & l'on tolère par circonspection les inconvénients dont elles feroient le remède.

186 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

S'il est donc de la sagesse du Gouvernement de ne pas faire usage quelquefois de ces sortes de vérités, & d'attendre du temps la facilité de les mettre en vigueur ; il n'est jamais avantageux de les ignorer : elles sont indépendantes de l'ordre politique ; leur lumière subsiste lors même qu'on arrête l'effet général où elles tendent, & s'il vient à s'élever quelque système spécieux qui ait du rapport avec ces vérités, elles se présentent d'abord à l'esprit comme autant de points immuables sur lesquels ce système est bientôt jugé.



## OBSERVATIONS

DU

*PASSAGE DE VÉNUS SUR LE DISQUE DU SOLEIL;**Faites en présence DU ROI, au château de Saint-Hubert,  
sous la latitude de  $48^{\text{d}} 43' 25''$ .*

Par M. LE MONNIER.

SA MAJESTÉ nous a honorés de sa présence pendant tout 7 Juin 1769 le temps des observations qui ont été faites au château de Saint-Hubert; & Elle a bien voulu agréer que M. de Chabert qui est de retour de son expédition du Levant, s'y rendit pour y concourir au succès de nos observations. Son zèle infatigable & son exactitude ne sont pas même ignorés du Monarque ni du Ministère qui a su répandre & rallumer parmi les autres Souverains, la Philosophie & ce génie curieux qui la cultive, en protégeant les Sciences & leur accordant des distinctions éclatantes.

J'avois inséré en 1761, dans un Écrit public, tous les détails du passage de Vénus, observé au château de Saint-Hubert, & l'on en trouve aussi un extrait avec d'autres détails d'un genre peu différent, concernant la marche de la pendule, dans nos Mémoires de 1761.

Je suivrai aujourd'hui le même ordre, y étant porté d'autant plus naturellement, qu'il n'est pas possible de recueillir dans un premier extrait, tel que nous le communiquons à l'Assemblée, les recherches ultérieures qui dépendent d'éléments que le temps & les circonstances amèneront à une plus grande précision, à mesure que l'on doit s'en occuper. J'ai observé, par exemple, avec beaucoup de soin à midi, au mois de Mai, les vraies longitudes du Soleil; mais celles du mois de Juin, déjà moins fréquentes à cause de la saison pluvieuse, ne pourront être recueillies successivement qu'après le passage par l'apogée, qu'il sera important de reconnoître.

A a ij



Cependant je vais rendre compte des observations que M. de Chabert & moi avons faites le 3 Juin, de l'entrée de Vénus sur le Soleil, & j'y joindrai aussi celles de l'éclipse de Soleil du 4 Juin, que nous avons faites au même lieu.

M. de Chabert s'est servi de la même lunette de 18 pieds que j'avois employée en 1761, mais dont la bonté est telle que nous avons cru devoir y substituer cette fois-ci, un oculaire de 3 pouces de foyer; elle grossissoit presque autant en cet état, que ma lunette acromatique dont l'objectif a  $10\frac{1}{2}$  pieds de foyer, ayant deux oculaires plan-convexes, dont l'un est de 27 lignes de foyer, & l'autre de 9 lignes, suivant la règle ordinaire d'Optique: les ouvertures des objectifs étoient 2 pouces 4 lignes, & 3 pouces 6 à 7 lignes pour le verre acromatique.

Toutes ces précautions avoient été prises dans la supposition que nous verrions les deux contacts externe & interne de Vénus au disque du Soleil, par un temps parfaitement serein, afin d'en comparer l'effet avec celui qu'auront pu voir dans les mêmes contacts, ceux qui les auront aperçus fort près du zénit, ainsi que j'en ai averti l'année dernière dans un Écrit publié à la suite de celui qui a paru à l'Imprimerie du Louvre en 1761.

Nous n'avons pu observer à Saint-Hubert que l'entrée du centre de Vénus sur le disque, parce que le ciel venoit de s'éclaircir, & le contact interne qui s'est fait à ma lunette acromatique à 7<sup>h</sup> 34' 56"  $\frac{1}{2}$  de temps vrai; avec une lunette de 18 pieds M. de Chabert a vu le contact interne à 7<sup>h</sup> 35' 32"  $\frac{1}{2}$ .

CONTACT  
interne.

Nous ayons pris la veille avec le quart-de-cercle de M. de Chabert la hauteur du bord supérieur du Soleil de 2<sup>d</sup> 30' à 7<sup>h</sup> 39' 32"  $\frac{1}{2}$ , qui répondent à 7<sup>h</sup> 38' 23"  $\frac{2}{3}$  de temps vrai, & à 7<sup>h</sup> 45' 59"  $\frac{1}{2}$ , ou plutôt à 7<sup>h</sup> 44' 50"  $\frac{1}{2}$  de temps vrai, de 1<sup>d</sup> 40': ces hauteurs ont besoin de quelques corrections, parce que le quart-de-cercle hausse de 11' 00", ainsi que nous l'avons supposé par les hauteurs méridiennes du bord supérieur du Soleil qu'on rapportera ci-après. Cette correction sera déterminée encore plus exactement par les hauteurs de la Polaire, par l'épi de la Vierge & par *Arcturus*, dont les hauteurs méridiennes observées le 2 Juin, donneront enfin la latitude du château de

Saint-Hubert plus exactement qu'on ne l'a supposée jusqu'à ce jour.

Ainsi le bord supérieur du Soleil, au moment que j'ai observé le contact interne de Vénus, étoit élevé de  $2^d \frac{3}{4}$  sur l'horizon; & quoiqu'il y fut plus élevé qu'à Paris, nous ignorons entièrement la réfraction variable qui convient à  $2^d 45'$  de hauteur. Comme, le jour précédent, l'atmosphère étoit précisément au même état, & qu'un nuage fixe & électrique avoit caché le Soleil pareillement vers les  $7^h \frac{1}{4}$  du soir, nos observations de la hauteur du bord supérieur du Soleil ne seront peut-être pas inutiles pour une pareille recherche; la réfraction qui résultera de nos observations, pourra jeter quelque lumière sur la comparaison des contacts internes, vus ailleurs aux environs du zénit, & par nous à  $2^d 45'$  là où le bord supérieur, que Vénus a touché, a dû paroître affecté par la décomposition des rayons du Soleil, dont les extrêmes sont en ce cas les rayons bleus, lesquels ont dû paroître les plus élevés.

Nous avons vu Vénus très-distinctement, mais sous une forme d'autant plus irrégulière, qu'elle approchoit de l'horizon.

À  $7^h 45'$  de temps vrai, je l'ai jugée loin du bord de tout son diamètre; mais ce bord étant irrégulier, nous n'avons pas jugé à propos d'en mesurer la quantité qui varioit à chaque instant.

*OBSERVATIONS pour la correction de la Pendule & pour la latitude du lieu.*

*Hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil.*

	au matin.		au soir.
2 Juin 1769...	10 <sup>h</sup> 13' 17"	... 56 <sup>d</sup> 30'	... 1 <sup>h</sup> 48' 24"
	10. 13. 46	... + 99 $\frac{1}{2}$ Part.	... 1. 47. 53
	10. 15. 57 $\frac{3}{4}$	... 56. 50	... 1. 45. 38 $\frac{1}{2}$
	10. 16. 28	... + 99 $\frac{1}{2}$	... 1. 45. 08 $\frac{1}{2}$
	10. 31. 48 $\frac{1}{2}$	... 58. 40	... 1. 29. 52

La hauteur du matin n'étoit pas exactement de  $56^d 50' 00''$ ; il s'en falloit  $5''$  à  $10'''$ : on y a eu égard dans la correction du midi, que l'on a conclu à  $0^h 00' 46''$ , ou bien  $46'',3$  selon

# 190 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

la dernière hauteur qui a été prise par M. de Chabert; nous avons observé, ce jour-là & le suivant, les passages du Soleil à la ligne méridienne, le ciel ayant été le 3 Juin à midi parfaitement serein.

Le 2 à 12<sup>h</sup> 2' de la Pendule, le bord supérieur 64<sup>d</sup> 00' 14  $\frac{1}{2}$  <sup>part.</sup>, & par conséquent la hauteur méridienne 64<sup>d</sup> 00' 35  $\frac{3}{4}$  sur le quart-de-cercle. Mon observation à 12<sup>h</sup> 6  $\frac{3}{4}$  de temps vrai donne — 30  $\frac{1}{2}$  <sup>part.</sup> & la hauteur méridienne 64<sup>d</sup> 00' 56", ayant eu égard à la variation proportionnelle aux quarrés des temps écoulés, dans la supposition que 4 minutes d'heure répondent à 43 secondes d'abaissement à cette hauteur, ainsi qu'il résulte de ma Table.

Le 3 Juin, il ne nous a pas été possible de prendre le matin les hauteurs correspondantes à celles que nous avons vu le soir, de sorte qu'il a fallu en faire le calcul. Midi à 0<sup>h</sup> 01' 56  $\frac{1}{2}$ .

A 9 <sup>h</sup> 34' 09 $\frac{1}{2}$ le bord supérieur à l'orient. . . . .	51 <sup>d</sup> 10'
9. 34. 14 $\frac{1}{2}$ . . . . .	+ 99 $\frac{1}{2}$ <sup>part.</sup>
9. 56. 50 $\frac{1}{2}$ . . . . .	54. 20
9. 57. 17 . . . . .	+ 99 $\frac{1}{2}$

Le 3 à midi,

A 0 <sup>h</sup> 1' 20" le bord supérieur corrigé. . . . .	64 <sup>d</sup> 08' 52 $\frac{1}{2}$
0. 4. 15 . . . . .	64. 08. 19 $\frac{1}{2}$
0. 6. 30 . . . . .	64. 07. 52 $\frac{1}{2}$

ou bien par un vent impétueux en ce moment,

Le bord supérieur du Soleil . . . . .	64 <sup>d</sup> 10' — 32 <sup>part.</sup>
	— 52
	— 82 $\frac{3}{4}$

La première & la deuxième hauteur observée diffèrent de 32  $\frac{1}{2}$  à cause du vent, & la hauteur méridienne par un milieu a été conclue de 64<sup>d</sup> 08' 35".

*au soir.*

A 3 <sup>h</sup> 14' 50 $\frac{1}{2}$ le bord supérieur du Soleil à l'occident. 44 <sup>d</sup> 20'	
3. 23. 16 $\frac{1}{4}$ ou 16 . . . . .	43. 00

Temps de la pendule.

A  $8^h 30^{\frac{1}{2}}$  l'Épi de la Vierge.....  $31^d 19' 57^{\frac{1}{2}} + 70^{\frac{1}{2}} \text{ Paris}$

9. 20 *Arcturus*.....  $61. 50. 00 + 55^{\frac{1}{2}}$

Nous avons observé le 2 au soir, temps de la pendule;

A  $8^h 11^{\frac{1}{2}}$  la Polaire au-dessous du pôle, élevée de  $46^d 50' + 260^{\frac{1}{2}} \text{ P.} = 46^d 59' 32''$

8. 31 l'Épi.....  $31. 30 + 67^{\frac{1}{2}} = 31. 32. 28$

Le 4 au matin, temps de la pendule,

A $8^h 12' 18''$	Hauteur du bord supérieur du Soleil du côté de l'orient.	$38^d 20'$
8. 17. $23^{\frac{1}{4}}$		$39. 10$
8. 34. 58		$42. 00$
8. 44. 21		$43. 30$
9. 08. $53^{\frac{1}{2}}$		$47. 20$

La première Observation calculée, & comparée avec les deux suivantes, nous ont donné l'accélération de la Pendule de  $2' 37''$  à  $8^h \frac{1}{4}$  du matin, au lieu que celles du soir précédent, donnoient à  $3^h \frac{1}{4}$  l'accélération de  $2' 31''$ ; ainsi la Pendule avançoit à minuit sur le temps vrai de  $2' 34''$ , & en 12 heures elle a avancé régulièrement de  $36''$  sur le temps vrai. C'est dans ces suppositions que nous avons corrigé les temps de la Pendule ci-dessus pour les réduire au temps vrai: il en faut excepter le contact interne.

Minuit plus exactement à  $0^h 02' 31''$  de la pendule, & en douze heures,  $34^{\frac{1}{2}}''$  d'accélération sur le temps vrai.

### *Éclipse de Soleil du 4 Juin 1769, au matin.*

Nous n'avons pas encore eu le temps de comparer nos Observations avec nos Tables, ni au calcul rigoureux qu'en a fait M. du Vaucel. La vraie conjonction 4' après la fin observée.

Temps  $\left\{ \begin{array}{l} 6^h 45' 51'' \text{ Commencement.} \\ \text{vrai} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} 8. 24. 44 \text{ Fin de l'Éclipse, } 4^d \text{ au-dessous du centre du Soleil.} \end{array} \right.$

Voici les phases prises au micromètre objectif d'un télescope de  $9^{\frac{1}{2}}$  pouces, l'immersion des taches du Soleil, leur émerision, & la distance des cornes aux bords horizontaux du Soleil, prises au micromètre du quart-de-cercle mobile. A  $7^h 08' 09''$ , entre

192 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

les bords inférieurs,  $599\frac{1}{2}$  qui valent  $21' 52''\frac{1}{2}$ , les cornes horizontales: à  $7^h 18' 13''\frac{1}{2}$  de temps vrai,  $0^d 18' 23''\frac{1}{2}$  entre les bords inférieurs des deux astres: la grosse tache s'étoit éclipsée  $5' 56''$  de temps auparavant, & elle a reparu  $0^h 18' 37''$  après à la pendule: à  $7^h 57' 39''$  de temps vrai, émerison de la dernière tache: au micromètre objectif à  $\left\{ \begin{matrix} 7^h 38' 40'' \\ 7. 40. 30 \end{matrix} \right\}$  temps vrai  $\left\{ \begin{matrix} 0^d 13' 52''\frac{1}{2} \\ 0. 13. 39\frac{3}{4} \end{matrix} \right\}$  phases observées; d'où l'on a conclu la plus courte distance des centres de  $\left\{ \begin{matrix} 0^d 18' 48'' \\ 0. 18. 52\frac{1}{2} \end{matrix} \right\}$ , c'est-à-dire;  $0^d 18' 51''$ , ayant égard à l'accourcissement causé par les réfractations: or à  $7^h 38' 40''$ , le lieu du Soleil corrigé étoit  $H 13^d 49' 38''\frac{2}{5}$ , l'ascension droite du milieu du ciel  $7^d 07' 16''\frac{1}{2}$ , l'angle parallactique dans la sphère  $38^d 43' 23''\frac{1}{2}$ . Si l'erreur des Tables des Institutions est additive  $2' 24''$ , la longitude de la Lune corrigée sera  $H 13^d 19' 40''$ . Les formules d'Euler donnent la parallaxe d'azimut  $21'' 42''$ , & celle de hauteur qui convient à  $56^d 55'\frac{1}{2}$  de distance apparente au zénit  $51' 23''\frac{2}{3}$ ; ainsi l'angle parallactique dans le sphéroïde sera  $39^d 03' 38''\frac{1}{2}$ , la parallaxe de longitude  $32' 23''\frac{1}{4}$ , celle de latitude  $39' 54''\frac{1}{2}$ . Le Soleil paroïsoit donc  $2' 20''\frac{1}{2}$  moins avancé en longitude que la Lune; d'où l'on tire, si la latitude des Tables est  $58' 49''\frac{1}{2}$ , une distance des centres plus grande de 15 secondes que par observation.

On pourroit donc conclure que les Tables des Institutions donnent la latitude trop grande de  $\frac{1}{4}$  ou  $\frac{1}{5}$  de minute, si ce n'est que cette détermination seroit plus certaine, si on la compare aux durées vues à Saint-Hubert & à Paris.



MÉMOIRE

## M É M O I R E

*Sur la nature des Suites infinies, sur l'étendue des Solutions qu'elles donnent, & sur une nouvelle méthode d'approximation pour les Équations différentielles de tous les ordres.*

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

LORSQU'ON suppose qu'une quantité inconnue, fonction d'une ou de plusieurs variables, a une certaine forme indéfinie, dont elle n'est pas réellement susceptible, il arrive souvent qu'en cherchant à déterminer les coefficients de la forme indéfinie, on en trouve pourtant la valeur, en sorte que la différence entre la fonction cherchée & la forme indéfinie, poussée jusqu'à un terme  $n$ , ne contienne que des termes d'un degré plus élevé, & que cependant quel que soit  $n$ , ces termes ne se trouvent pas être nuls.

Cette forme indéfinie étant trouvée pour une fonction connue ou inconnue & ses coefficients déterminés, on dit que la fonction est réduite en série, & la série est telle que les termes successifs sont des fonctions semblables de variables & de  $n$ , en sorte que les coefficients & les exposans successifs sont donnés par une équation finie & indéfinie en  $n$ , ou par une semblable équation entre un exposant ou un coefficient & ceux qui le précèdent. Ces équations s'appellent la *loi de la suite*.

Si je prends l'expression analytique de la somme de la suite jusqu'à un terme  $n$ , & que je l'appelle  $S$ , soit  $F$  la fonction réduite en série, &  $F'$  la fonction qui y étant semblablement réduite, donneroit les termes de la première série, postérieurs au terme  $n$ , j'aurai  $F = S + F'$ , & par conséquent pour que  $F' = S$ , il faut que  $F' = 0$ .

L'équation  $F = S$  ne peut avoir lieu dans l'hypothèse,

Mém. 1769.

B b

lorsque  $n$  est un nombre fini. Si donc  $n$  est supposé plus grand qu'aucune quantité finie, il peut arriver ou que  $F'$  soit plus petit qu'aucune quantité finie comme dans les suites de la forme  $a + b x + c x^2 + e x^3 \dots$  lorsque  $x < 1$ , ou que  $F'$  soit plus grand qu'aucune quantité finie comme dans les mêmes suites lorsque  $x > 1$ , ou enfin que  $F'$  soit fini comme dans les suites de la forme  $a + b \cos x + c \cos 2 x + e \cos 3 x \dots$

Dans la première hypothèse, la somme de la série prise en supposant  $n$  plus grand qu'aucune quantité donnée, est égale à la fonction qui, par son développement, a produit la série, parce qu'elle n'en diffère que d'une quantité plus petite qu'aucune grandeur donnée, & l'on peut prendre l'une pour l'autre.

La même chose n'a pas lieu dans les autres hypothèses, parce que dans l'une la même différence est plus grande qu'aucune quantité donnée, & que dans l'autre elle est finie.

Dans la première hypothèse où j'ai  $F = S$ , lorsque  $n$  est plus grand que toute grandeur donnée de ce que je puis avoir  $S$  en général, il suit que je puis avoir aussi une expression générale de  $F$ , d'où je pourrai éliminer  $n$  à l'aide des expressions connues de fonctions transcendentes en fonctions qui contiennent  $\infty$ . On pourra également avoir  $S$ , lorsque  $F$  sera possible. Dans la même hypothèse, quelle que soit la question proposée, & de quelque manière que la suite donnée entre dans une solution, on peut indifféremment lui substituer la somme ou la fonction qui l'a produite, parce qu'elle représente nécessairement l'une ou l'autre, & qu'ici ces deux qualités sont identiques.

Il n'en est pas de même dans la seconde. Soit, par exemple;

la suite  $\left\{ \begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 \\ + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \end{array} \right\}$ , la fonction qui étant développée donne la première partie, est  $\frac{1}{1-x}$ ; celle qui donne la seconde est  $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1$ ; ce qui, en les ajoutant ensemble, donne 0, en sorte que si cette suite entre dans un

Problème, & qu'elle y tienne la place de la fonction qui l'a pu produire, elle sera 0, & la série une quantité nulle qui se présentera sous une forme illusoire; au lieu que la somme de la même

suite est  $\frac{x^{\infty+1}-1}{x-1} + \frac{\frac{1}{x^{\infty+1}}-1}{\frac{1}{x}-1} - 1$ , qui étant réduite,

est  $\frac{x^{\infty+1}-\frac{1}{x^{\infty}}}{x-1}$ , & c'est cette expression qu'il faut

substituer à la suite, si c'est la somme de la suite qui doit se trouver dans les équations du Problème.

Dans la troisième hypothèse, il faut observer de plus que comme la valeur de la somme y est finie, & a une certaine quantité de valeurs différentes au bout desquelles elle se renouvelle, la quantité qui l'a produite par son développement, ne peut être égale à aucune de ces valeurs, excepté dans le cas particulier où toutes deviennent égales, mais qu'elle l'est à la somme de toutes ces valeurs divisées par leur nombre. En effet, soit prise une de ces valeurs, & que je la réduise en suite, il en naîtra la même suite que la proposée, mais qu'il faudra arrêter à un certain terme, & la même chose aura lieu pour toutes les valeurs consécutives; donc aucune de ces expressions ne peut représenter la fonction qui a produit la suite; mais leur somme, divisée par leur nombre, peut la représenter, parce que cette somme étant réduite en série & divisée par le nombre, il en naît la suite proposée sans être obligé de s'arrêter à un terme plutôt qu'à un autre: en effet, supposant que la suite formée s'arrête à un terme plus loin que la première valeur, alors en augmentant toutes les sommes particulières d'un terme, il est clair que cette somme totale restera la même, & qu'ainsi l'expression de la fonction ne changera point; l'ordre des valeurs restera le même, mais on commencera à les compter à un autre point.

Ainsi dans ces Problèmes, on peut prendre indifféremment la fonction ou la somme de toutes les valeurs de la somme divisée par leur nombre, soit pour  $x$  en général, soit pour une



de ses valeurs particulières, lorsqu'il est question d'avoir la fonction; & lorsqu'il est question d'avoir la somme, on prendra une de ces valeurs qui satisfasse aux conditions du Problème.

Si j'ai une suite, & que je veuille lui en substituer une autre, dont il soit plus aisé d'avoir la somme ou la fonction génératrice, & que les coefficients de la nouvelle suite soient donnés par une suite infinie. Il suit de ce qui précède, 1.<sup>o</sup> que si on veut avoir la fonction génératrice, il faut substituer à la suite qui représente les coefficients, non leurs sommes, mais leurs fonctions génératrices, & prendre ensuite la fonction génératrice de la nouvelle suite. 2.<sup>o</sup> Que si on cherche la somme, il faut prendre la somme de la suite des coefficients & la somme de la suite nouvelle. 3.<sup>o</sup> Que la fonction génératrice de l'un & la somme de l'autre, & réciproquement, ne se peuvent prendre pour la suite ou la somme qu'avec les restrictions des articles précédens. 4.<sup>o</sup> Que pour avoir la fonction génératrice de la suite des coefficients, il faut dans une suite  $a + b + c + d + e + \dots$  multiplier les termes par  $y^0, y^1, y^2, y^3, y^4, \dots$  prendre la fonction génératrice, & faire  $y = 1$ .

Soit, par exemple, la suite  $1 + \cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \dots$  & que faisant  $\cos. x = z$ , je veuille avoir une suite  $a + bz + cz^2 + cz^3 + \dots$  j'ai en suivant la méthode ci-dessus,  $a = 1 - y^2 + y^4 - y^6 + \dots$ ,  $y$  étant, ce qui me donne  $a = \frac{1}{1+y^2}$ , lorsque  $y = 1$ ;

c'est-à-dire,  $a = \frac{1}{2}$ ; j'ai de même  $b = y \times 1 - 3y^3 + 5y^5 - 7y^7 + \dots$  ce qui me donne  $b = \frac{y \times 1 - y^7}{(1+y^2)^2} = 0$ .

J'ai de même  $C = 2y^2 \times 1 - 4y^4 + 9y^6 - 16y^8 + \dots$   
 $= 2y^2 \times \frac{1-y^4}{(1+y^2)^2} = 0$ ;

& ainsi de suite, en sorte que la fonction cherchée de  $z$  est  $\frac{1}{2}$ , ou si l'on veut  $\frac{1}{2 + 2z} + \frac{z^2}{2 + 2z}$ ; car en

réduisant cette fonction ensuite, on aura  $\frac{1}{2} + 0z + 0z^2 + 0z^3 + 0z^4 \dots$

Je suppose que j'aie une courbe donnée par une équation différentielle d'un ordre  $n$ , & que supposant son abscisse  $x$  divisée en  $m$  parties égales  $x'$ , je prenne, au lieu de la courbe, les angles d'un polygone inscrit qui ait  $m$  coté, j'aurai l'expression de la  $m^e$  ordonnée de ce polygone par une équation entre  $y$ ,  $n$  ordonnées supposées connues  $m$  &  $x'$ ; & supposant dans l'équation donnée que  $dx$  soit  $x'$ , &  $dy$  la différence entre deux ordonnées du polygone, j'en pourrai tirer l'équation du polygone d'autant plus approchée que  $m$  est plus grand, en sorte que lorsque  $m$  est infini, cette équation devient une suite infinie & en même temps la vraie équation du polygone & de la courbe qui se confond alors avec lui.

Si je somme cette suite, & que je mette  $x$  à la place de  $mx'$ ; & au lieu de  $m$  &  $\frac{1}{m}$  leurs valeurs transcendantes, j'aurai une fonction sans  $m$  qui représentera la valeur de  $y$ ; & si cette fonction est réduite en série, ce ne sera point la somme de cette nouvelle série, mais la fonction génératrice qu'il faudra prendre; d'où il suit que, si avant de sommer la première équation en série, j'en cherche une nouvelle où  $m$  &  $x'$  ne se trouvent pas, mais seulement  $y$  &  $x$ , ce ne sera pas la somme qu'il faudra prendre, mais la fonction génératrice.

Si j'ai une équation indéfinie pour un nombre indéfini de lignes, de points, & que je cherche ce que devient cette équation lorsque le nombre est infini, il suit des mêmes principes que si j'appelle  $dx$  les petits espaces supposés constants, que je fasse la même chose pour les autres quantités semblables, & que chassant le nombre infini par l'hypothèse de  $mdx = x$  ou autre semblable, j'aie une équation à intégrer, au lieu d'une somme à trouver, il faudra prendre les fonctions génératrices des séries qui resteront dans l'équation différentielle, & non pas leur somme.

Ces réflexions me paroissent établir suffisamment, qu'en regar-

dant les séries divergentes comme de fausses expressions d'une fonction à qui on a supposé une forme qu'elle ne pouvoit avoir, on peut sans inconvénient les employer dans les solutions des Problèmes en déduisant ensuite de la loi qu'elles suivent, la fonction qu'on y aura été égale. Mais il ne suffit pas que la série fournisse une solution du Problème proposé, il faut encore que cette solution puisse représenter toutes celles du Problème. Je vais donc comparer ici les solutions par les séries aux solutions directes dans ce qui en concerne l'étendue.

J'examinerai cette matière, 1.<sup>o</sup> pour les équations finies; 2.<sup>o</sup> pour les équations différentielles.

1.<sup>o</sup> Si j'ai  $y$  égal à une suite de puissances rationnelles des variables, cette suite ne donne qu'une valeur de  $y$  pour chaque valeur de  $x$ ,  $z$ , &c. en sorte que si le Problème est tel qu'il doive  $y$  en avoir plusieurs, les coefficients des premiers termes seront donnés par des équations qui auront un pareil nombre de racines, & les termes suivans seront une fonction rationnelle des premiers; en sorte que la série présentera des valeurs discontinues, tandis que l'expression réelle les donne continues, il y aura des angles finis, au lieu d'une courbe continue; & qu'ainsi si la série est convergente, la valeur de  $y$  qui en naîtra, différera très-peu de la vraie valeur, quant à la grandeur, mais en différera pour l'expression. Il y a des cas où cela est indifférent, d'autres où cet inconvénient est réel, lorsqu'une seule racine de l'équation doit servir à la même solution du Problème, il est indifférent que l'expression des deux racines suive ou ne suive pas la loi de continuité; mais si une solution unique embrasse successivement diverses racines, il faut qu'elles aient une expression commune, sans quoi la solution seroit illusoire. Ainsi le mouvement d'un corps qui se meut dans une ellipse dont l'équation est donnée par une équation entre l'abscisse & l'ordonnée, ne peut pas être censé se mouvoir dans les deux courbes paraboliques discontinues entre elles, qui donnent les valeurs approchées de chaque valeur de l'ordonnée. Il faut donc, lorsqu'on veut employer une série convergente à la solution d'un Problème, que chaque valeur de la série ait l'étendue de la solution complète

du Problème proposé ; il n'en est pas ainsi des séries divergentes, parce qu'en y substituant leur fonction génératrice, la solution se trouve avoir d'elle-même l'étendue & la forme nécessaire.

Lorsqu'il est question d'une équation différentielle aux différences ordinaires, il reste un nombre de coefficients arbitraires, égal à l'ordre de l'équation, & un coefficient donné par une équation d'un degré dépendant de celui où montent les variables dans la proposée. Ainsi dans ce cas la suite convergente ne donne en elle-même aucun moyen de distinguer si l'intégrale est algébrique ou non. Cette connoissance ne peut se tirer que de la loi de la suite ; dans le cas où la vraie expression de l'équation seroit une courbe continue mais transcendante, elle ne donne à la place que des portions discontinues de courbes paraboliques ; d'ailleurs on ne peut déterminer quelles portions on doit choisir, parce qu'il faudroit pour cela donner aux arbitraires la forme générale qui leur convient, & qu'il n'est point possible de connoître indépendamment de la loi de la suite & de la fonction génératrice. Il faut donc pour employer une série convergente à la solution d'une équation différentielle, lui supposer une forme aussi compliquée que celle qu'elle peut avoir rigoureusement. La même chose a lieu dans les autres équations différentielles, & plus la solution en est compliquée, plus les inconvéniens se multiplieront.

Ma dernière réflexion enfin, est que si on a une suite de plusieurs variables égale à zéro, & qu'on veuille en tirer, soit une équation finie entre ces variables, soit la valeur d'une d'elles, il faut donner à la solution qu'on en tire l'étendue dont est susceptible la solution de l'équation qu'on auroit en prenant la fonction génératrice de l'équation proposée. Je vais éclaircir tout ceci par des exemples tirés de la théorie des équations finies, différentielles, aux différences finies & partielles.

#### EXEMPLE I.<sup>er</sup>

Soit  $y = (\sqrt{1 - a^2} - 2ax - x^2)$ ,  $x$  étant très-petit &  $a$  très-peu différent de 1, en sorte que  $(\sqrt{1 - a^2})$  soit

de l'ordre  $(\sqrt{x})$ , j'ai  $y = \pm (\sqrt{1 - a^2}) \mp \frac{1}{2}$ ,

$$\frac{2ax + x^2}{(\sqrt{1 - a^2})^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2 x^2}{(1 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$$
 pour équation approchée ; d'où il

suit 1.<sup>o</sup> qu'au lieu du cercle qui est le lieu de l'équation proposée, j'ai deux portions de courbes paraboliques pour le lieu de la série convergente qui, à cause de deux valeurs de  $(\sqrt{1 - a^2})$ ,

a deux valeurs discontinues entr'elles. 2.<sup>o</sup> Que  $\frac{dy}{dx}$  devient

$\frac{1}{0}$ , lorsque  $y = 0$  dans le cercle & dans la proposée, & que

lorsque  $y = 0$  dans la série convergente & dans les deux para-

boles,  $\frac{dy}{dx}$  est égal à une quantité finie, en sorte qu'au lieu

d'une seule courbe continue quant à son équation & à sa description, j'ai deux courbes discontinues quant à l'une & à l'autre.

#### EXEMPLE II.

Soit  $dy = \frac{dx}{(\sqrt{1 - x^2})^2}$  ; j'ai en réduisant en série  $dy =$

$$dx \times 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \frac{7}{128} x^8 \dots$$

$$\text{ \& intégrant, } y = a + x + \frac{1}{2 \times 3} x^3 + \frac{3}{5 \times 8} x^5$$

$$+ \frac{5}{7 \times 16} x^7 + \frac{7}{9 \times 128} x^9 \dots$$
 si  $x$  représente un

sinus, & qu'il soit conséquemment plus petit que 1, la série ci-dessus est convergente, mais pour qu'elle représente d'une manière approchée toutes les valeurs de  $y$ , il faut que l'arbitraire  $a$  soit l'angle plus petit que la demi-circonférence qui répond à

$x = 0$  plus  $\frac{m\pi}{2}$ ,  $m$  étant un nombre entier. Et alors on

aura une suite convergente qui donnera la valeur de  $y$ , & qui aura les inconvénients dont j'ai parlé dans l'article précédent.

Mais si cette série m'étoit proposée, & que je ne fusse pas d'ailleurs quelle valeur doit avoir  $a$ , je ne pourrois l'apprendre

qu'en

qu'en cherchant immédiatement la fonction génératrice de la suite, & la série convergente ne m'apprendroit rien sur l'étendue que peut ou doit avoir la solution, parce que j'ignorerois au bout de quel temps les valeurs discontinues qu'elle donne pour  $y$ , doivent changer, & que je ne pourrois le savoir exactement, qu'en comparant continuellement une infinité de valeurs de  $y$ , connues d'ailleurs, avec celles que donne la proposée. Au reste, cette quantité  $a$  qui doit être  $a' + \frac{m\Pi}{2}$  explique, & comment la série qui représente l'arc en sinus ou cosinus, donne toutes les valeurs possibles de cet arc, & comment (faisant pour abréger  $a' = 0$ ) l'expression connue du sinus en l'arc, représente le sinus de tous les arcs.

$$\begin{aligned} \text{En effet, j'ai } x = \sin y = \left( y - \frac{m\Pi}{2} \right) - \\ \left( y - \frac{m\Pi}{2} \right)^3 + \left( y - \frac{m\Pi}{2} \right)^5 - \dots \dots \dots \& \text{ faisant} \\ \left( y - \frac{m\Pi}{2} \right) = z \times \sin \left( z + \frac{m\Pi}{2} \right) = z - \frac{z^3}{2 \times 3} + \frac{z^5}{4 \times 3 \times 4 \times 5} - \dots \dots \dots \end{aligned}$$

## EXEMPLE III.

Soit l'équation  $\phi(x + q) - \phi(x) = 0$ , je fais  $\phi x = a + bx + cx^2 + ex^3 \dots \dots \dots$

& j'ai  $a = a + bq + cq^2 + eq^3 \dots a = \phi q,$

$b = b + 2cq + 3eq^2 \dots b = \frac{d\phi q}{dq},$

$c = c + 3eq \dots c = \frac{d^2\phi q}{2dq^2},$

On voit donc d'abord que la série proposée ne peut représenter  $\phi x$ , que lorsque la valeur de  $a$ , dont dépend toutes les autres, a toute l'étendue dont elle est susceptible, étendue qui dépend de la solution générale de l'équation proposée, puisqu'il faut que

$a = 0$ . Soit maintenant l'équation . . . . .

$$\frac{dy}{dx} q + \frac{d^2y}{dx^2} q^2 + \frac{d^3y}{dx^3} q^3 + \dots = 0,$$

équation ensuite à laquelle se rappelle la solution du même Problème, & qu'on peut déduire des valeurs de  $a, b, c$ , &c. trouvées ci-dessus.

J'ai d'abord en multipliant par  $dx$

$$a + qy + \frac{dy}{dx} q^2 + \frac{d^2y}{dx^2} q^3 + \dots = 0.$$

Multipliant ensuite par  $ef^x dx$  pour avoir une nouvelle intégrale,

$$j'ai l'équation de condition  $qf + \frac{q^2 ff}{2} + \frac{q^3 f^2}{2 \times 3} + \dots = 0,$$$

c'est-à-dire,  $e^{qf} - 1 = 0,$

$$\& \text{ l'intégrale est } a' + \frac{aef^x}{f} + \frac{q^2}{f} e^{fx} +$$

$$\frac{q^3 - 2fq}{f^2 \times 1 \times 2} e^{fx} dy, \dots \text{ d'où soit en supposant des intégrations}$$

successives, soit en prenant toutes les intégrales qui donnent les différentes valeurs de  $f$ , on aura  $y = A + Be^{fx} + Ce^{fx} + De^{fx} + Ee^{fx} + \dots$  où  $A, B, C, D$ , sont des arbitraires, & la suite est infinie; ainsi un nombre indéfini de ses termes ne peut représenter  $y$ , il doit avoir une forme plus générale, & on trouve en effet que c'est une fonction quelconque de  $ef^x$ , telle pourtant que substituant  $x + q$  pour  $x$ , c'est-à-dire, mettant  $ef^q ef^x$  à la place de  $ef^x$ , les deux valeurs qui en naissent pour l'expression de la fonction, ne se trouvent pas les racines inégales d'une même équation.

Ainsi, 1.<sup>o</sup>  $y$  peut être égale à toute fonction de  $ef^x$  qui contienne des radicaux composés & des exponentielles ou des logarithmiques, en exceptant la fonction  $le^{fx}$  qui se réduit à  $fx$ , toutes ces fonctions peuvent être mises sous la forme infinie de la série ci-dessus, mais ne peuvent être représentées en général par un nombre indéfini de termes de cette série. 2.<sup>o</sup> Les termes

$e^{\frac{fx}{2}}$  &  $\sin. (fx)^{\frac{1}{2}}$  ou  $\cos. (fx)^{\frac{1}{2}}$  peuvent également

entrer dans les fonctions, en observant que  $e^{f'}$  doit être 1, ce qui a lieu pour une de ses valeurs; car ayant  $a \equiv 0 \frac{f'1}{\pi}$  l'hypothèse me donne  $a'' \equiv 1 \equiv 0$  qui a pour racine  $a \equiv 1$ ; ainsi pour que la fonction soit une vraie valeur de  $y$ , il faut prendre cette racine, & les autres en donnent une fautive comme dans la courbe dont l'équation seroit  $y \equiv \sqrt{(a \pm \sqrt{ax})}$ ; la racine est réelle lorsque  $x > a$  si on prend le signe  $+$ , & imaginaire si on prend le signe  $-$ . 3.<sup>e</sup> Les fonctions  $\sin. \frac{f''}{\pi}$ ;  $\cos. \frac{f''}{\pi}$  en sont exclues lorsque  $\frac{\pi}{\pi}$  n'est pas un nombre entier, parce que la valeur de  $\sin. \frac{f'1}{\pi}$ ,  $\cos. \frac{f'1}{\pi}$  doit être 0 ou 1 pour satisfaire à l'équation, & que la vraie valeur de ces fonctions ne peut être supposée telle sans que  $\cos. \frac{f''}{\pi}$  ne soit  $\cos. \frac{f''}{\pi}$ ,  $f$  étant une autre valeur de  $f$ . Soit, par exemple, la fonction  $\cos. \frac{f''}{\pi}$  & que je l'appelle  $z$ , j'aurai  $2zz \equiv 1 \equiv \cos. fx$ , & appelant  $z'$ ,  $\cos. \frac{f'1 + f''}{\pi}$  j'ai  $2z'z' \equiv 1 \equiv \cos. f'q + f''x \equiv \cos. fx$  par l'hypothèse; donc  $z \equiv \pm \frac{\sqrt{(1 + \cos. f'q)}}{2}$ ,  $z' \equiv \pm \frac{\sqrt{(1 + \cos. f'q)}}{2}$ . Mais si je prends le signe  $+$  pour la valeur de  $z$ , il faudra prendre le signe  $-$  pour la valeur de  $z'$  toutes les fois que  $f'q$  ne sera pas égal à  $2\pi$ .

## EXEMPLE IV.

Soit l'équation  $\frac{dz}{dx} \equiv \frac{m dz}{dy}$ , & que pour la résoudre j'emploie la substitution de la suite infinie  $z \equiv a + bx + b'y + cx^2 + c'xy + c''y^2 + ex^3 + e'x^2y + e''xy^2 + e'''y^3 \dots$



Comparant les coefficients, j'ai  $b = b' m$ ,  $2c = c' m$ ,  $c' = 2c'' m$ ,  
 $3e = e' m$ ,  $e' = e'' m$ ,  $e'' = 3e''' m$ ; & ainsi de suite, en  
 sorte que faisant les substitutions, la suite devient  $a + b(x + \frac{x}{m})$   
 $+ c(x + \frac{x}{m})^2 + e(x + \frac{x}{m})^3 \dots$  les  $a, b, c$ , restant  
 arbitraires, d'où je conclus que  $z = \phi(x + \frac{x}{m}) + N$ ,  
 $N$  étant arbitraire de même que  $\phi$ .

## E X E M P L E V.

Soit l'équation  $\frac{ddz}{dx^2} = \frac{c^2 ddz}{dt^2}$ , & que je suppose  $z = a +$   
 $a'x + b't + a''x^2 + b''xt + c''t^2 \dots + (n)^{(n)}x^n +$   
 $(n-1)^{(n)}x^{n-1}t + (n-2)^{(n)}x^{n-2}t^2 \dots$   
 $+ (1)^{(n)}xt^{n-1} + (0)^{(n)}t^n + \dots$  Cette série étant  
 infinie, j'aurai pour déterminer les coefficients, les équations  
 $(n)^{(n)}n(n-1) = (n-2)^{(n)}1 \times 2 \times c^2$ ,  $(n-1)^{(n)}$   
 $(n-1) \times (n-2) = (n-3)^{(n)}2 \times 3 \times c^2 \dots$   
 & en général  $(n-m)^{(n)}(n-m) \times (n-m-1) =$   
 $(n-m-2)^{(n)}(m+1) \times (m+2) c^2$ , en sorte que  
 dans chaque rang les coefficients  $(n)^{(n)}$  &  $(n-1)^{(n)}$  resteront  
 arbitraires.

Je suppose maintenant la fonction ordonnée par rapport à  $t$ ,  
 & j'ai le terme en  $x$  purs  $(0)^{(0)} + (1)^{(1)}x + (2)^{(2)}$   
 $x^2 + (3)^{(3)}x^3 \dots + (n)^{(n)}x^n \dots$  le terme multiplié  
 par  $t^2$   $(0)^{(2)} + (1)^{(2)}x + (2)^{(2)}x^2 + (3)^{(2)}x^3 \dots$   
 $\dots + (n-2)^{(n-2)}x^{n-2} \dots$   
 & ainsi de suite, appelant le 1.<sup>er</sup>  $A$ , & le second  $A'$ , j'ai en  
 comparant avec les équations ci-dessus,  $A' = \frac{ddA}{1 \times 2} c^2$ , & en  
 général le coefficient de  $t^m + 2$  sera égal à la seconde différence  
 du coefficient de  $t^m$  multipliée par  $c^2$  & divisée par  $(m+1) \times$

$(m + 2)$ . J'ai donc cette partie de la série qui contient les puissances paires de  $t$  égale à  $\phi(x + ct) + \phi(x - ct)$ .

On aura également pour les puissances impaires le coefficient de  $t$  égal à  $(0)(1) + (1)(2)x + (2)(3)x^2 \dots + (n-1)(n)x^{n-1}$ , & celui de  $t^3$   $(0)(3) + (1)(4)x + (2)(5)x^2 \dots + (n-1)(n+2)x^{n-1}$ ,

& ainsi de suite, ce qui donne, appelant le premier  $B$ , & le second  $B'$   $B' = \frac{d^2 B}{dt^2} c^2$ , & généralement le coefficient de  $t^{m+2}$  égal à la seconde différence de celui de  $t^m$  multiplié par  $c^2$ , & divisé par  $(m+1) \times (m+2)$ , ce qui donne pour la somme de ces puissances impaires de  $t$ ,

$$\begin{aligned} \phi'(x + ct) - \phi'(x - ct); \text{ on aura donc en général} \\ z = \phi(x + ct) + \phi(x - ct) \\ + \phi'(x + ct) - \phi'(x - ct). \end{aligned}$$

Si, cela posé, on veut que  $x$  étant zéro,  $z$  le soit, quelque valeur qu'ait  $t$ , on aura dans chaque rang le terme en  $t$  nul, & par conséquent les coefficients de toutes les puissances paires de  $x$  le seront aussi; donc  $\phi$  sera une fonction impaire, &  $\phi'$  une fonction paire.

Si on veut ensuite que lorsque  $t = 0$ ,  $z = 0$ , ou  $\frac{dz}{dt} = 0$ , quel que soit  $x$ , on aura pour le premier cas  $\phi = 0$ , &  $\phi' = 0$  pour le second. Si on veut enfin, que faisant  $x = a$ ,  $z = 0$ , quel que soit  $t$ , on aura  $\phi(x + ct) = -\phi(x - ct)$  &  $\phi'(x + ct) = \phi'(x - ct)$ , ce qui donne  $\phi'$  fonction de  $\cos\left(\frac{\pi}{2ca} \times (x + ct)\right)$ , &  $\phi$  fonction de  $\cos\left(\frac{\pi}{4ca} \times (x + ct)\right)$ , cette seconde fonction ne devant point contenir de cosinus multiples pairs de  $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4ca} \times (x + ct)\right)\right)$ .

c'est-à-dire, étant semblable à la première multipliée par cot

$$\frac{\pi}{4ca} \times (x + ct).$$

Le dernier de ces deux exemples fournit une solution très-simple du Problème des cordes vibrantes, & tous deux prouvent également ce que j'ai avancé; on voit en effet que la suite substituée, ou telle autre qu'on voudra, donne une forme fautive pour la valeur de  $z$ , en sorte que, même lorsque  $y$  &  $x$  sont très-petits, on ne peut employer l'expression indéfinie. Mais on peut faire ici une remarque; c'est que, dès que l'équation est telle qu'on peut déterminer les coefficients de la suite, ce qu'il est toujours facile de faire par des substitutions, il y aura dans chaque rang de la suite autant de nouveaux coefficients arbitraires que de fonctions arbitraires dans l'intégrale, cette remarque est inutile à l'intégration de ces équations, parce que (de même que dans les équations aux différences ordinaires) la forme de l'intégrale dépend de celle de la loi de la suite, mais elle est très-importante en ce qu'elle fait connoître le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans cette intégrale, connoissance sans laquelle il n'est pas possible d'avoir l'intégrale complète de ce genre d'équations.

L'emploi des suites ne peut donc être avantageux qu'autant que la forme que doit avoir l'équation est connue, du moins pour chaque cas particulier, à moins qu'on ne veuille passer de la connoissance d'une suite divergente à celle de la fonction génératrice, travail souvent plus difficile que celui d'une solution directe, & si on fait quelle doit être la forme de la série, elle ne donne de solutions plus commodes que la solution exacte, que lorsqu'on ne peut avoir exactement  $y$  égale à une fonction de  $x$ , & la connoissance de la forme que doit avoir la série dépendant de la forme que doit avoir la solution rigoureuse, il est aisé de voir qu'on ne peut guère employer les séries que dans la vue de rendre le calcul plus court, & qu'on ne peut avoir de méthode vraiment générale pour la solution approchée, sans en avoir pour la solution exacte.

Les méthodes d'approximation où dans une proposée  $a + \delta y + cy^2 + ey^3 \dots = 0$ , on néglige les termes

supérieurs à  $by$ , sont fondées sur la supposition que dans  $a + by + cy^2 \dots = (a' + b'y) \times (a'' + b''y + c''y^2 \dots$  les quantités  $a'', b'', c''$ , sont finies; en effet, dans ce cas j'ai  $a = a' a'', b = a' b'' + a'' b'$ ; donc faisant  $a + by = 0$ , j'ai

$$y = - \frac{a'}{b' + \frac{b''}{a''} a'} , \text{ au lieu de la vraie équation.}$$

$$y = - \frac{a'}{b'}. \text{ Mais ces deux équations ne diffèrent entr'elles}$$

que d'un terme de l'ordre  $y^2$ , parce que  $\frac{b''}{a''} a'$  est du même ordre que  $a'$  & que  $y^2$ . Il faut donc pour que les méthodes d'approximation soient légitimes, que si j'ai  $z$  en  $x$ , & que je sache que  $z = X + y$ ,  $z$  n'ait qu'une seule valeur en  $x$ , ou qu'il n'en ait du moins qu'une seule qui soit  $x$  à peu près. Il en est de même lorsqu'on ne néglige qu'une puissance supérieure à  $y^2, y^3, \dots$  il faut également qu'il n'y ait qu'un facteur de la forme  $a' + b'y + c'y^2, a' + b'y + c'y^2 + e'y^3$ , qui donne  $y$  très-petit. Si dans la même hypothèse d'une seule valeur très-petite de  $y$ , j'ai l'équation différentielle  $ay + bdy + cdy^2 \dots + X = 0$ . Je remarque 1.<sup>o</sup> que si l'intégrale ne contient pas de logarithmes élevés à des puissances supérieures ou multipliés les uns par les autres, on a pour l'ordre  $n$ ,  $n$  équations  $a'A + b'dA = 0$ ,  $A$  étant le facteur qui rend la proposée une différentielle exacte, &  $a' b'$ , des fonctions algébriques de  $x$  & des fonctions de  $x$  qui se rencontrent dans  $a, b, c$ . 2.<sup>o</sup> Que si l'intégrale contenoit un terme  $(lX)^2$  seulement, j'aurois en général  $(B) \times dy + b'dy + c'dy^2 \dots + p'd^{n-1}y + (lX)^2 + X lX + X'' = 0$ . Différentiant, j'aurai  $(C) a''y + b''dy + c''dy^2 \dots + p'd^{n-1}y + \left(\frac{2dX}{X} + dX'\right) lX + \frac{X'dX}{X} + dX'' = 0$ , d'où tirant la valeur de  $lX$  qui contient une arbitraire & la substituant dans l'équation  $(B)$ , j'aurai une seconde intégrale de la proposée, où  $y$  sera au second degré; & comme la différence doit donner la proposée, le facteur doit être du 1.<sup>er</sup> degré en  $y$ , & ne point

contenir  $y$  dans son dénominateur. Il en sera de même de l'équation dont l'intégrale contiendrait  $(IX)^3, (IX)^4, (IX)^5, \dots$  en sorte qu'en général pour ce cas de l'intégrale, on peut supposer que le facteur est  $A, A + By + Cdy, \dots, A + By + Cdy, \dots + A'y^2 + Bydy + C'dy^2, \dots$  & ainsi de suite jusqu'au degré  $n$ . 3.° Si l'intégrale contenoit  $IX/X'$  qui demande trois différenciations, on trouvera de même deux intégrales linéaires de l'ordre  $n - 1$ , & une du second degré, ce qui donne deux facteurs  $A$  & un  $A + By + Cdy, \dots$  en sorte qu'en général, lorsque l'intégrale ne contient que des produits de logarithmes au numérateur seulement, on peut supposer le facteur  $A + Bdy + Cdy, \dots + A'y^2 + B'ydy + C'dy^2, \dots + A''y^3, \dots$  jusqu'au degré  $n$ , une des valeurs au moins de  $B, C, \dots$  étant zéro, deux au moins des valeurs des  $A', B'$  étant zéro, trois au moins des valeurs des  $A'' \dots$  étant zéro, & ainsi de suite, les quantités  $B \dots A' \dots A'' \dots$  sont algébriques. 4.° Si on multiplie par  $A$  l'équation  $ay + bdy + cd^2y, \dots + X = 0$ , on a  $A$  par une équation de l'ordre  $n$  &  $n$ , valeurs de  $A$ , qui donnent les intégrales de la proposée.

Je vais donc chercher maintenant les moyens de trouver  $A$  en général, & ensuite  $y$ , & pour cela je remarque que l'équation qui donne  $A$  est toujours de la forme

$$dA + b'dA + c'd^2A, \dots + q'd^nA = 0;$$

& que supposant que j'en eusse l'intégrale,

$$A = nA' + A' \int (nA'' + A'' \int (nA''' + A''' \int (nA^{(4)} + A^{(4)} \dots$$

& ainsi de suite. Je pourrai faire  $n = 0$ , le reste de la valeur de  $A$  sera alors un facteur, & par conséquent  $nA'$  en sera un aussi. Cela posé, il est clair que  $A'$  peut ne pas contenir d'arbitraires, & par conséquent point d'autre transcendante qu'une exponentielle; en effet, sans cela, supposant d'abord l'équation du second ordre  $nA' + A' \int n'A''$ , valeur complète de  $A$ , contiendrait plus de deux arbitraires, ce qui est impossible; & si on donne à  $nA'$  une valeur qui contienne deux arbitraires, alors les trois qui se trouveroient dans  $nA' + n'A' \int A''$ , se réduiront à deux,

à deux, & par conséquent il y aura une autre valeur de  $nA'$  qui ne contiendra qu'une arbitraire. On fera le même raisonnement pour les autres ordres, & on en conclura en général que quel que soit l'ordre de l'équation, on pourra faire  $Ac + dA = 0$ ,  $c$  étant algébrique.

Mais lorsque la proposée ne contient pas de radicaux,  $c$  peut-il en contenir, & quels doivent-ils être? Il est clair qu'en général  $c$  doit être rationnel, & qu'il n'y a que certaines déterminations des coefficients de  $x$  dans  $c$  irrationnel qui puissent faire évanouir ces irrationalités, & il y a de telles déterminations; en effet, le principe général que toute équation différentielle sans radicaux, & où les plus hautes différences sont à la première puissance, a un facteur rationnel, n'a point d'application ici; parce que dans les équations au-dessus du premier ordre, ce facteur rationnel peut n'être pas fonction de  $x$  seulement. Pour le prouver, soit pour le second ordre  $V + N = 0$  &  $V' + N' = 0$ , les intégrales du premier ordre d'une équation proposée, différentiant une fonction quelconque de ces deux intégrales, on aura  $BdV + BdV' = 0$ , & appelant  $A$  le facteur qui a rendu la proposée égale à  $dV$ , &  $A'$  celui qui l'a rendu  $dV'$ , on aura  $BA + B'A$  pour le facteur général de la proposée; & comme  $B$  &  $B'$  sont des fonctions quelconques de  $V$  &  $V'$ , avec cette condition que

$$\frac{dB}{dV} = \frac{dB'}{dV'}, \text{ il peut se faire que } A \text{ \& } A' \text{ étant rationnels;}$$

& contenant  $y$ ,  $BA + B'A$ , soit irrationnel & sans  $y$ . Pour en donner un exemple, soit l'équation  $y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} \dots + q = 0$ , où  $a, b, c, \dots, q$  sont des fonctions de  $x$ ; je dis que différentiant & faisant  $dx$  constant, j'aurai successivement les équations rationnelles

$$(A) \frac{dy}{dx} + a'y^{m-1} + b'y^{m-2} \dots + q' = 0;$$

$$(B) \frac{ddy}{dx^2} + a'' \frac{dy}{dx} + b''y^{m-2} \dots + q'' = 0;$$

$$\& \text{ enfin } (M) \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + a \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + b \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} \dots + q = 0;$$

(les  $a', b', \dots, q', a'', b'', \dots, q'', \dots, a, b, \dots, q$ , étant des

fonctions rationnelles de  $x$ ). En effet, différentiant la proposée, substituant dans l'équation  $(A)$  la valeur de  $\frac{dy}{dx}$  qu'elle fournit, faisant évanouir le dénominateur, & substituant pour  $y^m, y^{m+1} \dots$  leurs valeurs tirées de la proposée, j'aurai une fonction  $Ay^m + By^{m-1} \dots + Q$ , telle que  $A = 0, B = 0 \dots Q = 0$ . Or ces équations sont au nombre de  $m$ , le nombre des coefficients  $a', b' \dots q'$  est aussi  $m$ , & ils n'y entrent que sous une forme linéaire; donc, &c. On trouvera de même en prenant deux différentielles successives de la proposée, des valeurs rationnelles pour les  $a'', b'' \dots q''$ , & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve également des valeurs rationnelles pour  $a, b, \dots q$ . Supposant maintenant que j'aie  $a \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + b \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} \dots q + N = 0$ , pour une des intégrales, qui étant différenciée & divisée par une fonction de  $x$ , donne l'équation proposée; il est clair que  $a, b, \dots q$  doivent avoir un nombre  $m - 1$  de valeurs algébriques, pour que, en éliminant les différences supérieures, la valeur de  $y$  qui en résulte soit la racine de la proposée; donc  $c$  doit contenir des fonctions irrationnelles, parce que sans cela la racine ne contiendrait que des radicaux simples, ce qui n'est pas vrai au-dessus du second degré.

Sachant donc que  $A$  peut contenir des fonctions irrationnelles, j'observe 1.<sup>o</sup> que les radicaux contenus dans  $c$  ne peuvent être d'un degré plus élevés que l'ordre de l'équation: en effet, chaque valeur de  $c$  donne une intégrale différente, & si les radicaux étoient d'un ordre plus élevé,  $c$  auroit plus de valeurs qu'il ne doit y avoir d'intégrales. Je dis que  $c$  ne contient pas de radicaux plus élevés que l'ordre de l'équation, & non pas qu'il est donné par une équation d'un degré égal ou moins élevé, parce qu'il suffit que  $c$  ne donne pas un trop grand nombre d'intégrales différentes, ce qui n'a lieu nécessairement que dans le premier cas.

J'observe 2.<sup>o</sup> que s'il y a dans une équation proposée un radical qui ne se trouve pas sous un autre signe radical, & qu'ayant différencié cette équation, je veuille que ce radical

n'y entre plus, la plus haute différence restant sous une forme linéaire, l'arbitraire sera le coefficient de ce radical, parce que la différence du radical est égale au radical multiplié par une fonction qui ne le contient pas; or il est aisé de voir que les radicaux qui entrent dans la valeur de  $c$ , ne sont pas ceux dont le coefficient est arbitraire, sans quoi les faisant zéro,  $c$  deviendrait rationnel; donc on peut supposer que ces derniers radicaux n'entrent point dans la valeur de  $c$ . J'observe enfin que le degré de l'équation en  $c$  ne peut être plus grand que  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots n + 1$ , divisé par le plus petit diviseur de  $n + 1$ , la proposée étant de l'ordre  $n$ . Car une équation plus élevée produiroit nécessairement plus de  $n$  valeurs de  $A$ , ce qui ne doit pas être.

Cela posé, j'aurai  $c$  par une équation de l'ordre  $n - 1$ , & je saurai qu'il suffit d'en tirer  $c$  par une équation algébrique, ce qui me donne le moyen de le trouver par la méthode des coefficients indéterminés.  $c$  étant trouvé, j'aurai  $A$  par les quadratures, & par conséquent l'intégrale finie. On peut avoir cette intégrale donnée en  $x$  & en  $c$ , sans avoir résolu l'équation en  $c$  &  $x$  (*Voyez ci-dessous*); mais pour avoir l'intégrale en  $x$ , il faudra résoudre cette équation en  $c$  &  $x$ , or c'est ce qui sera toujours possible. En effet, différentiant cette équation en  $c$ , & la mettant sous la forme  $ac + bdc \dots + d''c + X = 0$ ,

appelant  $A'$  son facteur, & supposant  $A'c' + dA' = 0$ , il suit de la seconde observation que l'équation en  $c'$  sera ou moins élevée que l'équation en  $c$ , ou du moins ne sera pas d'un degré plus élevé que  $\frac{1 \times 2 \times 3 \dots n + 1}{4}$  ou  $1 \times 2 \times 3 \dots$

$n + 1$  divisé par le produit des deux plus petits diviseurs de  $n + 1$  ou  $n + 1$ , & le plus petit diviseur de  $n$ , si  $n + 1$  est un nombre premier; ayant cette équation, on la mettra en différen-

tiant sous la forme  $a'c' + b'dc' \dots + d''c' + X = 0$ , & appelant  $A''$  son facteur, & faisant  $A''c'' + dA'' = 0$ , on aura l'équation algébrique en  $c''$  moins élevée que celle en  $c'$  ou que  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots n + 1$  divisé par les trois plus petits diviseurs de  $n + 1$ , ou  $n + 1$  & les deux



plus petits de  $n$ , &c. D'où il suit que répétant cette opération autant de fois moins une que  $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \dots n + 1$  a de diviseurs, on aura enfin  $c$  par une équation rationnelle. On voit que par la même méthode on parviendrait à résoudre une équation algébrique ordinaire d'un degré quelconque. *Voyez les Recherches profondes que M. Bezout a faites sur cette matière.*

Lorsque je n'ai qu'une intégrale d'un ordre moindre & non finie, on peut ou chercher les autres valeurs de  $A$ , ou traiter l'équation intégrale en  $y$ , qu'on a trouvée comme on a traité la proposée; cette seconde manière est d'autant plus facile, que  $A$  est nécessairement ou algébrique ou exponentielle, & qu'ainsi l'équation intégrale trouvée ne contient de transcendantes que dans son dernier terme en  $x$  purs, terme qui n'entre ni dans la valeur du facteur, ni conséquemment dans celle de  $c$ . La première seroit plus avantageuse, si les valeurs de  $A$  ne pouvoient pas contenir des transcendantes logarithmiques, mais elles en peuvent contenir: soit en effet  $y = \int (XfX' dx + NX) dx + N'$ , il est clair

que j'ai en général l'équation  $d \times \frac{dy}{X} = X' dx$ , dont une des intégrales du premier ordre qui contient l'arbitraire  $N$ , est  $\frac{dy}{X} = \int X' dx + N$ . Mais l'autre équation qui est

$d \times \frac{y - N' - \int (XfX' dx) dx}{\int X dx}$  ne peut se trouver sans qu'on con-

noisse  $\int X \int X' dx$ , & contient cette fonction; les cas que j'ai développés au commencement de cet article sont les seuls où l'on puisse se passer d'intégrations répétées, lorsqu'on veut se servir d'une méthode particulière de résoudre la proposée, & par conséquent ce sont les seuls où il soit plus avantageux de chercher toutes les valeurs de  $A$ . (*Voyez ci-dessus*), & en général la seconde méthode est préférable.

Soit maintenant prise pour exemple l'équation du second ordre;

$$Xy + \frac{X' dy}{dx} + \frac{X'' d^2 y}{dx^2} + X''' = 0, \text{ \& que } A$$

soit le facteur qui la rende une différentielle exacte, j'ai l'équation  $(X - dX' + d^2 X'') \times A - (X' - 2dX'') \times dA + X'' dA = 0$ .

je fais  $Ac + dA = 0$ , &  $d^2 A = -Adc + Ac^2$ ,  
 & par conséquent, l'équation (A),  $X - dX' + d^2 X'' +$   
 $c(X' - 2dX'') + X''c^2 - X''dc$ . Je dois avoir une équation  
 (B)  $c^2 + A'c + B' = 0$ ,  $A'$  &  $B'$  étant des fonctions  
 algébriques & rationnelles de  $x$ ; j'ai donc  $c^2 = -A'c - B'$ ,  
 &  $dc = \frac{A'dA' - 2dB'c + 2B'dA' - A'd'B'}{A'^2 - 4B'}$ , je fais disparaître

de l'équation (A)  $c^2$  &  $dc$ , & égalant à zéro le coefficient de  $c$   
 & le terme en  $x$ , j'ai deux équations en  $A'$ ,  $B'$ ,  $dA'$  &  $dB'$ ,  
 & éliminant, j'ai  $A'$  en  $B'$ , &  $B'$  donné par une équation, en  
 $B'$ ,  $dB'$ , &  $d^2 B'$ , où l'on fait que  $B'$  peut être une fonction  
 rationnelle & algébrique de  $x$ ; l'ayant trouvée, j'aurai  $A$ ,  $c$ , &  
 le reste par les quadratures; soit donc  $X = 2 + 8x +$   
 $8x^2 + x^3$ ,  $X' = -12 - 8x - 7x^2 - x^3$ ,  $X'' = 3 - 6x - x^2$ ,  
 je trouverai, en faisant les opérations ci-dessus,  $A' = 1 + x$ ,

$B' = 1 - x$ ,  $c = -\frac{1+x}{2} \pm \sqrt{\frac{-3}{4} +$   
 $3x + \frac{1}{4}x^2}$ , & par conséquent  $A = [e^{\frac{1+x}{2}}$   
 $\pm \sqrt{-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}x^2}] dx$ , ce qui donne deux

valeurs de  $x$ , & par conséquent  $y$  par deux intégrations  
 successives. Soit l'équation de Ricaty,  $dy + y^2 dx' + p x'^2$

$dx' = 0$ , je fais  $y = \frac{dm}{mdx}$ ,  $dy = \frac{ddm}{mdx} - \frac{dm^2}{m^2 dx}$ .

& substituant  $ddm + mp x'^2 dx^n = 0$ , je fais ensuite  
 $x' = x^n$  &  $dx$  constant, ces deux suppositions me conduisent  
 à l'équation  $xd^2 m - (n-1)dm + n^2 pm = 0$ ,

ou  $n = \frac{1}{q+1}$ . Soit  $A$  le facteur qui rend cette équation une

différentielle exacte, j'ai  $pn^2 A + ndA + xd^2 A = 0$ ,  
 je fais  $dA = cA$ , & j'ai  $pn^2 + nc + xc^2 +$   
 $xdc = 0$ ; je fais  $c^2 = Bc + C$ , & j'ai les deux  
 équations  $4pn^2 C - pn^2 BC + 4xBC - xB^2 C$   
 $+ 2CdB = B dC = 0$ ,  $n4C = nBC +$

$4xC^2 - xBC^2 + 3BdB + dC = 0$ . Au lieu de  $B$  &  $C$ , je mets  $\frac{B}{D}$ ,  $\frac{C}{D}$ ,  $D$  étant un dénominateur commun, afin de n'avoir à traiter que des fonctions entières, & j'ai les équations  $4p^n CD^2 - p^n BCD + 4xBCD - xB^2C + 2CDdB - BCdD - BDdC = 0$ , &  $(n) 4CD^2 - (n) BCD + 4xC^2D - xBC^2 + 3BDdB - 3B^2dD + D^2dB - BDdD = 0$ . Je suppose ensuite que

$$B = a + bx + cx^2 \dots + (p)x^p \dots$$

$$D = a'' + b''x + c''x^2 \dots + (p)''x^p \dots$$

$$C = a' + b'x + c'x^2 \dots + (p)'x^p \dots$$

& il est aisé de voir que les  $a$ , & un quelconque des  $b, c, \dots$   $p$  resteront indéterminés, & qu'il faudra les déterminer par la condition que tous les termes au-dessus de  $x^p$  se trouvent nuls. On pourra toujours remplir cette condition; en effet, il est clair 1.<sup>o</sup> que les deux équations différentielles en  $B$  &  $C$  doivent donner une valeur algébrique de ces quantités (il en est de même de toutes les équations différentielles possibles, & cela suit de la forme dont leurs intégrales sont susceptibles). 2.<sup>o</sup> Que les valeurs de  $B$  &  $C$  doivent être rationnelles; en effet, si elles ne l'étoient pas, on auroit plus d'une valeur pour  $B$  &  $C$ , plus de deux par conséquent pour  $c$ , plus de deux pour  $A$ , & par conséquent plusieurs valeurs différentes de  $m$  qui devroient avoir lieu en même temps, ce qui est impossible.

L'intégration des équations, dont je parle ici, se réduit donc à des quadratures répétées, c'est-à-dire à trouver  $\int y dx$ , lorsqu'on a  $A dy + B dx = 0$ ; en effet, soit  $\int X dx$  à trouver, & que  $X$  contienne deux transcendentes, faisant  $X = y$ , on aura  $\int y dx$  &  $A dy + B dx = 0$ ,  $A$  &  $B$  contenant l'autre transcendente: trouvant donc une différentielle exacte de  $y$  & de  $x$ , intégrant par rapport à  $y$ , il ne restera à intégrer par rapport à  $x$  qu'un terme qui contiendra une transcendente; le Problème se réduit donc à trouver une fonction de

$x, y, dx, dy$ , différentielle exacte qui devienne  $y dx$ , lorsque  $dy = -\frac{B dx}{A}$ . J'ai traité ailleurs de ce Problème; je remarquerai seulement ici que faisant  $\int y dx = X + Ay + By^2 + Cy^3 \dots$  &  $dy = a + by + cy^2 \dots$ ,  $A, B, C \dots X$  étant des fonctions de  $x$  de même que  $a, b, c \dots$ , ce qu'on fait pouvoir toujours supposer après une substitution convenable, j'aurai les équations  $A = -\frac{dX}{a}$ ,  $B = \frac{Ab - dA + 1}{2a}$ ,

& ainsi de suite; ce qui me donne la série  $X + Ay + By^2 \dots$  au premier terme près; différentiant cette série, le terme qui multipliera  $dy$  & celui qui multipliera  $dx$ , seront des séries récurrentes, & il restera à déterminer par cette condition le terme  $X$  qui est aussi une série récurrente. Au reste, le cas de  $X =$  à une constante doit être examiné le premier, & peut-être même cette supposition est-elle générale.

Si la quantité  $y$  a  $m$  valeurs très-petites, ou que je ne veuille négliger que des termes de l'ordre  $y^m$ , j'aurai une équation de l'ordre  $n$  & du degré  $m$ , qui ne contiendra que des puissances rationnelles & entières de  $y$  & ses différences, & où  $d^n y$  ne sera qu'au premier degré. La fonction qui multiplie  $d^n y$  est du degré  $m - 1$ , celle qui n'est pas multipliée par  $d^n y$  du degré  $m$ , & toutes deux de l'ordre  $n - 1$ . Supposons qu'on ait une différentielle exacte du même ordre & du même degré, & telle qu'elle ne diffère de la proposée que des termes du degré  $m + 1 \dots$  il est clair que cette hypothèse laisse, pour remplir les conditions qui sont nécessaires pour que la fonction soit réellement une différentielle exacte, autant de coefficients qu'il y a de termes dans une fonction de l'ordre  $n - 1$  & du degré  $m - 1$ ; or ce nombre est suffisant. En effet, il est clair 1.<sup>o</sup> qu'une fonction rationnelle & entière de  $y$  & de ses différences, n'est une différentielle exacte, que lorsque chaque rang de la fonction ordonnée par rapport à  $y$ , se trouve l'être aussi. 2.<sup>o</sup> Que pour que  $AZ + BdZ + Cd^2Z + Dd^3Z \dots$  soit une différentielle exacte, il suffit d'une seule condition. 3.<sup>o</sup> Que par cette raison, si j'ai une fonction homogène de  $y$  & de ses différences, qui doit être une

différentielle exacte, soit  $m$  le degré &  $n$  l'ordre des différences; j'ai 1.<sup>o</sup> le terme en  $d^n y$  &  $y^{m-1}$  qui est le dernier terme de  $d^n y^m$ , ce qui me donne  $n$ , termes de la fonction pour lesquels il suffit d'une condition. 2.<sup>o</sup> J'ai chaque terme  $y^p dy^{m-1-p} d^n y$  qui est le dernier terme de  $d^{n-1} \cdot y^p dy^{m-p}$ , ce qui me donne à chaque terme,  $n - 1$  termes de la fonction pour lesquels il ne faut qu'une condition. 3.<sup>o</sup> J'ai chaque terme  $y^p dy^q d^n y^{m-1-p-q}$ , qui est le dernier terme de  $d^{n-2} y^{m-p-q} dy^{m-p-q}$ , ce qui pour chaque terme me donne  $n - 2$ , termes de la proposée, pour lesquels une condition suffit. 4.<sup>o</sup> Par conséquent le nombre des conditions est égal au nombre des termes d'une fonction de l'ordre  $n - 1$  & du degré  $m - 1$ , & il me reste à prouver que le nombre des termes, pour lesquels ces conditions suffisent, est égal à celui de la proposée. Or la proposée peut être représentée sous cette forme  $y^{m-1} \times ay + bdy \dots + p d^n y$ , plus tous les termes du degré  $m - 1$ , en  $y$ , &  $dy$ , sans termes en  $y$  purs multipliés par  $b' dy$ ,  $c' d^2 y \dots p' d^n y$ , plus tous les termes du même degré en  $y$ ,  $dy$ ,  $d^2 y$ , sans termes en  $y$ , &  $dy$  purs multipliés par  $c'' d^2 y \dots p'' d^n y$  & ainsi de suite, & le nombre des termes d'une fonction ainsi ordonnée, est égal à celui pour lequel on a les conditions. Donc, &c.

Soit, par exemple,  $n = 3$ ,  $m = 3$ , j'ai la fonction

$$Ay^3 + By^2 dy + Cy dy^2 + Ddy^3 + Ey^2 ddy + Fy dy ddy + Gdy^2 ddy + Hy ddy^2 + Idy ddy^2 + Kddy^3 + Ly^2 d^3 y + My dy d^3 y + Ndy^2 d^3 y + Oydddy^3 + Pdy d^3 y + Qddy^3 d^3 y.$$

$$\text{Et } A'y^3 + B'd \times y^3 + C'd^2 \times y^3 + D'd^3 \times y^3 \dots$$

Quatre termes & une condition.

$$+ A''y dy^3 + B''d(y dy^2) + C''d^2(y dy^2) \dots$$

Trois termes & une condition.

$$+ A'''dy^3 + B'''d \times (dy)^3 + C'''d^2(dy)^3 \dots$$

Trois termes & une condition.

$$+ A''''$$

$$+ A^{iv} y d^3 y^3 + B^{iv} d \times (y d d y^3) \dots\dots\dots$$

Deux termes & une condition.

$$+ A^v d y d d y^3 + B^v d \times (d y d d y^3) \dots\dots\dots$$

Deux termes & une condition.

$$+ A^{vi} \times d d y^3 d d^1 y^3 + B^{vi} d \times (d d y^3) \dots\dots\dots$$

Deux termes & une condition.

En, tout seize termes & six conditions, nombre des termes multipliés par  $d^3 y$ ; prenant ensuite ces six termes, on trouvera que celui qui est en  $y$  purs se trouve multiplié dans toute la proposée par quatre termes  $d^3 y$ ,  $d^2 y$ ,  $dy$ ,  $y$ ; que les deux qui contiennent  $y$  &  $dy$ , sont multipliés par trois termes  $d^3 y$ ,  $d^2 y$ ,  $dy$ ; que les trois qui restent sont enfin multipliés par deux termes  $d^3 y$ ,  $d^2 y$ , ce qui me donne également seize termes. Ainsi en général toutes les fois qu'on a une équation approchée pour  $y$  du degré  $m$ , & qu'on peut négliger les termes supérieurs à ce degré, on peut trouver une fonction du même degré égale à des termes supérieurs près, & qui soit une différentielle exacte.

La valeur des coefficients en  $x$  purs est toujours donnée ici par des équations où ils ne montent pas au-dessus du premier degré. Ainsi le nombre des équations étant égal à celui de ces coefficients, & leur ordre à celui de l'équation, on aura pour chacun un pareil nombre de valeurs, & par conséquent on aura toutes les intégrales de la proposée d'un ordre immédiatement inférieur, & on en déduira son intégrale finie. La partie de l'intégrale qui est multipliée par  $y$ , ou ses différences, se trouve immédiatement, & celle du terme en  $x$  purs se trouve par les quadratures.

Revenons à la méthode d'approximation. Il est aisé de voir 1.<sup>o</sup> que les seules équations dont l'intégrale est susceptible de la forme sous laquelle elle les présente, sont sûrement résolues par elle; & qu'ainsi comme cette forme n'est pas générale, la méthode ne l'est pas non plus. 2.<sup>o</sup> Que quand bien même elle réussit, on ne peut pas juger par le degré qu'on néglige dans l'équation différentielle, de celui qu'on néglige dans l'intégrale. Ce ne peut donc être que d'après la connoissance des intégrales

qu'on trouve pour la proposée, qu'on peut juger si la méthode s'y applique & à quel degré il faut s'arrêter.

Voici un exemple fort simple du procédé de la méthode, & de la manière de l'employer.

Soit, par exemple, l'équation proposée

$$X + ay + bdy + cd^2y + edyddy + gyddy + hy^2 + i y dy + K dy^2 = 0,$$

& que je cherche une équation de la même forme qui n'en diffère que de puissances de  $y$  supérieures à la seconde, & qui soit différentielle exacte, j'ai en multipliant par  $A + B y + C dy$ ,

$$\begin{aligned} \text{l'équation } AX + Aa \times y + Ab \times dy + Acddy + Agyddy + Aedyd^2y \\ + BX + CX + Bc + Cc \\ + Ah y^2 + A i y dy + A K dy^2 = 0, \text{ \& les trois conditions} \\ + Ba + Bb + Cb, \\ + Ca \end{aligned}$$

$$d^2 \times Ac - d \times (Ab + CX) + Aa + BX = 0,$$

$$d^2 (Ag + Bc) - d \times (Ai + Bb + Ca) + 2 \times (Ah + Ba) = 0;$$

$$d \times (Ae + Cc) - 2 \times (Ad + KC - Ag - Bc) = 0.$$

On a donc les trois coefficients  $A, B, C$ , donnés pour des équations linéaires, je les suppose résolues, & que j'aie les deux valeurs de ces coefficients  $A, A', B, B', C, C'$ , j'aurai les deux intégrales  $\int AX + Ac dy + [Ab + CX - d(Ac)]y + \frac{Ag + Bc}{2} d \times y^2 + \frac{Ac + Bb + Ca}{2} y - \frac{d \times Ag + Bc}{4} y^2 + \frac{Ae + Cc}{2} dy^2 = 0$ ; desquelles éliminant  $dy$ , j'ai l'intégrale

finie; & si les fonctions qui multiplient les  $y^2, y dy, dy^2$  sont du même ordre, quant à la grandeur, que les coefficients de  $y$  &  $dy$ , on aura des valeurs approchées de  $y$ .

Si on vouloit avoir une méthode d'approximation qui fût réellement générale, on pourroit l'avoir en observant qu'elle doit pouvoir donner la vraie valeur de  $y$ , lorsqu'on a  $y$  égal à une fonction de  $x$ , & que lorsque cela n'est pas possible, elle doit en donner une valeur approchée; on aura donc en général, si la proposée n'a point de radicaux,

$$\frac{A + A'y + Bdy + \dots + A'y^n + B'y dy + \dots}{P + P'y + Qdy + \dots + P'y^n + Q'y dy + \dots} + N = 0,$$

pour une des intégrales de la proposée où tous les coefficients sont des fonctions de  $x$  données par des équations de la forme  $aA + b dA = 0$ , avec cette condition que  $n$  étant l'ordre de l'équation, &  $m$  le degré où montent les  $y$ , l'intégrale de l'ordre  $n - 1$  puisse être égale à une fonction rationnelle en  $y$ , où  $d^m - y$  soit au premier degré & multiplié par une autre fonction semblable: ces conditions donnent pour les  $A, A', B'$  des conditions qu'il faut remplir, & qui serviront à déterminer les coefficients.

En négligeant un degré quelconque, le nombre des conditions égalera celui des indéterminées; mais il faut observer qu'ici les  $A, A', \dots$  ne sont plus donnés par des équations linéaires, & qu'il faut nécessairement employer les intégrations successives; que cependant il n'est pas possible d'avoir une méthode d'approximation générale qui soit plus simple, à moins qu'on ne prouve qu'en général une fonction transcendante de  $x$  dont la valeur soit grande ou petite, peut toujours être changée en une fonction d'une autre forme qui n'en diffère que très-peu; ce qui me paroît devoir être vrai, pourvu que la valeur approchée ait la même étendue que la vraie valeur: alors la méthode proposée ci-dessus seroit générale, mais il me semble que cette matière mériterait d'être encore examinée.

M. de la Grange a donné dans les Mémoires de l'Académie de Turin, *tom. III, page 262 & suiv.* une méthode qui s'étend à tous les ordres & à tous les degrés, mais qui suppose que  $x$  ne se trouve pas dans la proposée, ce qu'on peut toujours faire par une différentiation; celle que je propose ici a seulement l'avantage d'être déduite immédiatement des principes généraux du Calcul intégral.

Cette méthode réduit les Problèmes à la sommation des suites récurrentes, ou à la recherche de fonctions rationnelles de quantités données, & je crois devoir terminer ce Mémoire par quelques réflexions sur cette matière, qui peuvent être, ce me semble, de quelque utilité.



Soit  $a + bx + by + bz + cx^2 + cxy + cy^2 + c^2xz + c^2yz$   
 $+ c^2z^2 \dots \dots \dots + (m, n, p) x^m y^n z^p =$

$P.$

$$A + Bx + Cy + Dz \dots \dots + Qx^m y^n z^p$$

où  $P.$  est une fonction rationnelle entière & finie des variables;  
 &  $A, B, C, \dots \dots Q$ , des constantes. Il est clair que lorsque  
 $m > m', n > n', p > p'$ , & que le terme  $x^m y^n z^p$  ne se trouve  
 plus dans  $P$ , on a en général  $A(m, n, p) + B(m-1, n, p) +$   
 $C(m, n-1, p) + D(m, n, p-1) \dots \dots \dots + Q$   
 $(m-m', n-n', p-p') = 0$ , où je désigne en général  
 par  $(m, n, p)$  le coefficient  $x^m y^n z^p$ ; dans la série, on aura  
 donc le coefficient  $(m, n, p)$  donné en général par une équation  
 linéaire d'un nombre de termes fini indépendant de la valeur de  
 $m, n, p$ , & égal à celui des termes du dénominateur, & si  
 on connoît la loi d'une série, qu'elle soit donnée par une équation  
 pareille, & qu'on cherche la valeur des coefficients du dénomi-  
 nateur de la fonction que cette série représente, on aura en  
 général le coefficient de  $x^{m'} y^{n'} z^{p'}$  dans le dénominateur égal  
 à celui de  $(m-m', n-n', p-p')$  dans la loi de la  
 série; cette théorie n'a pas plus de difficulté que celle des suites  
 récurrentes à une seule variable, & quel qu'en soit le nombre, elle  
 peut s'y appliquer également.

Je suppose que j'aie une fonction

$\frac{A' + By + Cy^2 + \dots \dots \dots + (M-1)y^{M-1}}{A + By + Cy^2 \dots \dots \dots + (M-1)y^{M-1}}$ ; que de plus  
 j'aie une équation  $y^m = (m-2)y^{m-2} + (m-3)y^{m-3} +$   
 $(m-4)y^{m-4} \dots \dots + a$   $A, B, C, \dots (M-1); A', B', C \dots$   
 $(M-1)', (m-2) (m-3) \dots \dots a$  sont des fonctions  
 rationnelles, entières & finies de  $x$ . Je réduis cette fonction en  
 série de la forme.

$(0)'' + (1)'' y + (2)'' y^2 \dots \dots \dots + (M-1)'' y^{M-1}$  les  
 fonctions  $(0)'', (1)'', (2)'', \dots \dots \dots (M-1)''$  étant des  
 suites infinies en  $x$ . Je multiplie cette série par le dénominateur;  
 mais avant que d'en développer le produit, il me faut chercher  
 quel est le coefficient de  $y^p$  dans  $y^{m-2} + (m-3)y^{m-3} \dots$   
 place de  $y^m$  la valeur  $(m-2)y^{m-2} + (m-3)y^{m-3} \dots$

& je trouve qu'il est

$$(p-n) + (m-2)(p-n+2) + V(p-n+4) + Z(p-n+6) + T(p-n+8) \\ + (m-3)(p-n+3) + V'(p-n+5) + Z'(p-n+7) + T'(p-n+9) \text{ \&c.}$$

où  $V$  est ce que deviennent les termes précédens en y faisant  $p = m + n - 4$ ;  $V'$  ce que deviennent les mêmes termes lorsque  $p = m + n - 5$ ;  $Z, Z'$  ce que deviennent les termes précédens lorsque  $p = m + n - 6$ , ou  $m + n - 7$ ;  $T, T'$  ce que deviennent les précédens lorsque  $p = m + n - 8$  ou  $m + n - 9$ , & ainsi de suite. Cette formule ainsi ordonnée a un nombre  $n$  de termes; &

les produits des coefficients sont du degré  $\frac{n}{2} + 1$  ou  $\frac{n+1}{2}$  selon que  $n$  est pair ou impair. Si donc les  $x$  montent à un degré  $p'$  dans les coefficients de la valeur de  $y^m$ , ils monteront au degré  $\left(\frac{n}{2} + 1\right) p'$  ou  $\left(\frac{n+1}{2}\right) p'$  dans les coefficients de la valeur de  $y^{m+n}$ .

Cela posé, désignant par  $(p)^{(n)}$  le coefficient de  $y^p$  pour le terme  $y^{m+n}$ , j'aurai

$$A = A' \times (0)^n + (0)^{(n)} \times \frac{B'(M-1)^n + (1)^n(M-1)' + C'(M-2)^n + (2)^n(M-2)'}{P^0} \\ + (0)^{(1)} \times \frac{C'[(M-1)^n + (2)^n(M-1)' + (3)^n(M-2)' + (3)^n(M-2)']}{P^1} \\ + (0)^{(2)} \times \frac{[D'(M-1)^n + (3)^n(M-1)' + (4)^n(M-2)' + (4)^n(M-2)']}{P^2} \text{ \&c.}$$

& ainsi de suite jusqu'au terme  $0^{(m-1)}$ , j'aurai semblablement

$$B = (0)^n B' + A' (1)^n + (1)^{(0)} P + (1)^{(1)} P' + (1)^{(2)} P'' \dots \\ C = (0)^n C' + A' (2)^n + B' (1)^n + (2)^{(0)} P + (2)^{(1)} P' + (2)^{(2)} P'' \dots \\ \text{Et } (M-1) = (M-1)^n \times A' + (M-2)^n B' + (M-3)^n B' \dots \\ + A''(M-1)' + (M-1)^{(0)} P + (M-1)^{(1)} P' + (M-2)^{(2)} P'' \dots$$

En sorte que dans ces formules, on doit avoir égal à zéro, chaque coefficient d'une puissance de  $x$  supérieure à la plus haute puissance de  $x$  dans le numérateur; j'appelle cette puissance  $q$ , &

je remarque 1.<sup>o</sup> que chacun des coefficients de  $x^q$  qui doit être égal à zéro, contient la première puissance des coefficients de  $x^q$  dans toutes les séries  $(0)'' (1)'' (2)'' (3)'' \dots$  2.<sup>o</sup> Qu'il contient également la première puissance des coefficients qu'ont dans ces séries les puissances inférieures à  $x^q$ ; mais que la puissance la plus basse, dont il puisse contenir le coefficient sera, appellant  $q'$  la plus haute puissance de  $x$  dans le dénominateur,

$$q - q' \left\{ - \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \right\} p', \quad n \text{ étant successivement } 0,$$

1, 2, 3,  $(m - 1)$ .

Ainsi on aura en général le coefficient de  $x^q$  dans  $(0)''$ ,  $(1)''$ ,  $(2)''$  donné par une équation linéaire qui contiendra le coefficient de  $x^{q-q'}$  dans  $(0)''$ , celui de  $x^{q-q'-p'}$  dans  $(1)''$ , celui de  $x^{q-q'-2p'}$  dans  $(2)''$ , celui de  $x^{q-q'-\frac{n}{2}p'}$  ou  $x^{q-q'-\frac{n+1}{2}p'}$  dans  $(M-1)''$ ; & ceux des puissances supérieures jusqu'à  $x^q$ .

Si maintenant on a une suite donnée dont les coefficients suivent une pareille loi, & qu'on en cherche le dénominateur, la valeur de  $y^m$  étant connue, c'est-à-dire,  $m$  &  $p'$ ; substituant dans les formules que donne la théorie ci-dessus les valeurs des coefficients de  $x^q$ , égalant à zéro les quantités qui multiplient les coefficients des puissances inférieures, on parviendra à déterminer les coefficients du dénominateur; mais il faut observer que lorsqu'on a le terme général donné par une équation qui contient les coefficients des termes inférieurs, non-seulement dans la même série, mais dans toutes les séries  $(0)''$ ,  $(1)'' \dots (M-1)''$  on peut en avoir une valeur qui ne contienne que les coefficients des puissances inférieures de la même série  $(0)''$ , par exemple, également en nombre fini: en effet, soit  $n'$  le nombre des termes des autres séries qui entrent dans cette valeur, je prends les équations que donnent les coefficients de  $x^{q-1}$ ,  $x^{q-2} \dots x^{q-n'}$  dans chaque série; les équations sont au nombre  $(m+1) \times n'$ , & ne contiennent que  $m \times n'$  coefficients des séries différentes de  $(0)''$ ; Donc on pourra éliminer tous les coefficients; donc le coefficient de  $x^q$  dans  $(0)''$  dépendra de  $n'$

termes pris dans cette même suite. Par conséquent, chaque suite  $(0)'' (1)'' \dots (M+1)''$  sera elle-même une suite récurrente, ce qui est évident d'ailleurs; en effet, soit une fonction  $A' + B' y + C' y^2 \dots + (M-1)' y^{m-1}$ , & que je la multiplie par une fonction semblable du même nombre de termes, & que je mette à la place de  $y^m$  la valeur, j'aurai une fonction d'un nombre  $m$  de termes, & j'aurai  $m$  facteurs indéterminés, & par conséquent je pourrai en trouver des valeurs convenables pour que les termes multipliés par  $y$  s'évanouissent, & qu'il ne reste que le terme constant, car cette condition n'exige que de satisfaire à  $m - 1$ , équations linéaires.

Ces réflexions me fournissent deux moyens de sommer les sortes de séries que je vais appliquer successivement au même exemple.

Soit la série

$$1 + x + ax^2 + bx^3 + cx^4 \dots \dots \dots + (1 + x + a'x^2 + b'x^3 + c'x^4 \dots) \sqrt{3 + \frac{1}{2}x},$$

& que j'aie  $a = -3$ ,  $a' = 0$ , & en général le coefficient de  $x^p$  dans la première série étant  $p$ , celui de  $x^p - 1$   $p'$ , celui de  $x^p - 2$   $p''$ ; &  $n, n', n''$ , les coefficients des termes correspondans de la seconde  $p + p' + n' + n'' = 0$   $2n + n' - n'' = 0$ . Je suppose que le dénominateur

soit  $A + Bx + (A' + B'x) \sqrt{3 + \frac{1}{2}x}$ , j'ai les équations

$$Ap' + Bp + An + Bn' = 0$$

$$Ap + Bp' + 3An + 3n'B + \frac{1}{2}An' + \frac{1}{2}Bn'' = 0.$$

Substituant dans la première les valeurs de  $p$  & de  $n$ , & égalant à zéro les coefficients de  $n' n'' p$ , j'ai  $A = 2A', B = 2A, B' = A'$ , valeurs qui satisfont également à la deuxième. Pour déterminer le numérateur, je trouve qu'il ne peut être que

$$A'' + B''x + (A''' + B'''x) \sqrt{3 + \frac{1}{2}x}, \text{ \& j'ai}$$

$$A'' = A + 3A', A''' = A + A', B'' = A + B + 3x(A' + B') + \frac{1}{2}A'.$$

Et comme  $A'$  se trouve à tous les termes du numérateur & du dénominateur, la fonction cherchée sera

$$\frac{5 + \frac{2+1}{2}x + (3+6x)\sqrt{3 + \frac{1}{2}x}}{2 + 2x + (1+x)\sqrt{3 + \frac{1}{2}x}}.$$

Telle est la première méthode; voici la seconde: j'ai d'abord  $2n + n' - n''$  qui, suivant la théorie connue, à cause des premiers termes  $1 + x \dots$  donne la fonction  $\frac{2+3x}{2+x-x^2}$ ; j'ai ensuite  $p' + p' + n' + n'' = 0$ , & à cause de  $p' + p'' + n'' + n''' = 0$ , & de  $2n' + n'' - n''' = 0$ ,  $2p + p' - p'' = 0$ , d'où, à raison des trois premiers termes  $1 + x - 3x^2 \dots$  j'ai la fonction  $\frac{2+3x-6x^2}{2+x-x^2}$ ; la fonction totale sera donc  $\frac{2+3x-6x^2}{2+x-x^2} + \frac{(2+3x)\sqrt{3+\frac{1}{2}x}}{2+x-x^2}$ , fonction qui est la même que ci-dessus, en multipliant le numérateur & le dénominateur par  $2 + 2x - (1+x)\sqrt{3 + \frac{1}{2}x}$ .

De ce que toute fonction algébrique de  $x$  & de  $y$ , lorsque  $y$  est donné par une équation  $y^m = (m-2)y^{m-2} + (m-3)y^{m-3} \dots$  se trouve être de la forme  $A + By + Cy^2 + Dy^3 + \dots + Qy^{m-1}$ , ou  $A, B, C, D \dots Q$  sont des fonctions égales à une série récurrente; il est aisé de voir que j'ai à intégrer une fonction semblable de  $x$  & de  $y$ , je pourrai toujours m'assurer si elle a une intégrale algébrique, & si elle en a une, la trouver par la somme d'une série récurrente; en effet, quel que soit l'intégrale, pourvu que j'aie fait la substitution de  $x + g$ , afin d'avoir un terme constant dans toutes les fonctions; j'aurai cette intégrale de la forme  $A' + By' + Cy'^2 + \dots + Q'y'^{m-1}$ ,  $A', B', C', \dots Q'$  étant des séries, & il faudra pour que la proposée soit algébrique, que le coefficient de  $x^i$  dans chacune de ces séries, dépende d'un nombre fini de termes pris dans toutes les séries indifféremment; alors

alors on aura immédiatement l'intégrale par les méthodes que je viens d'exposer, cette manière d'intégrer des fonctions, quoiqu'affectées de radicaux, peut être très-commode dans la pratique.

Appliquant maintenant aux suites de sinus & de cosinus multiples, les principes que je viens d'exposer.

Soit donc premièrement une série

$$a + b \cos. x + c \cos. 2x + e \cos. 3x \dots \dots \dots + b' \sin. x + e' \sin. 2x + e' \sin. 3x \dots \dots \dots$$

Si la fonction dont le développement l'a produite est une fonction rationnelle, on aura le coefficient de  $\cos. nx$  donné par un nombre fini de coefficients de  $\cos. (n - 1)x \dots$  & de  $\sin. (n - 1)x \dots$  ou bien, mettant la série sous la forme

$$a + b \cos. x + c \cos. 2x + e \cos. 3x \dots \dots \dots + (a' + b' \cos. x + c' \cos. 2x \dots \dots \dots) \sin. x \dots$$

on aura deux séries dont la somme sera rationnelle, & par conséquent le coefficient de  $\cos. nx$  dépendra d'un nombre déterminé de termes, ainsi la recherche de coefficients du dénominateur n'aura aucune difficulté, soit qu'on considère la loi de la suite sous un point de vue ou sous l'autre, & dès que l'équation entre les coefficients est linéaire & d'un nombre constant de termes, la fonction génératrice est rationnelle.

Soit de plus un angle  $\frac{\pi}{p}$ ,  $p$  étant un nombre entier, la suite ne contiendra que les termes  $\cos. mx + \frac{p'}{p} x$ ,  $\sin. mx + \frac{p'}{p} x$  où  $m$  est un entier positif, de même que  $p'$  &  $p' < p$ ; il est clair encore que les coefficients de  $\sin.$  ou  $\cos. \left(m + \frac{p'}{p}\right) x$  seront donnés par des équations d'un nombre fini de termes qui contiendront les coefficients des  $\sin.$  &  $\cos.$  où  $m$  se trouve être plus petit,  $p'$  ayant successivement toutes les valeurs.

Mais si l'on veut mettre la suite sous la forme

$$A + B \cos. \frac{x}{p} + C \cos. \frac{x^2}{p} \dots \dots \dots$$

$$+ B' \sin. \frac{x}{p} + C' \sin. \frac{x^2}{p} \dots \dots \dots$$

$A, B, C \dots \dots \dots B' \dots C' \dots$  seront des fonctions rationnelles de sinus  $x$  & cosinus  $x$ . En effet, de l'équation qui donne les coefficients de  $\cos.$  ou  $\sin. (m + \frac{p'}{p} x)$ , on déduit très-facilement les équations entre les coefficients de  $\sin.$  ou  $\cos. mx$  dans  $A, B, C \dots B', C'$ , en observant qu'ici  $p'$  ne peut être plus grand que  $\frac{p+1}{p}$ , & qu'au lieu de  $\cos. (m - 1 + \frac{p'}{p})x$  qui donne  $\cos. (m - 1)x \cos. \frac{p'}{p}x$ , il faut prendre  $\cos. (m - \frac{p-p'}{p})x$  qui donne  $\cos. mx \cos. \frac{p-p'}{p}x$ , lorsque  $p'$  est plus grand que  $\frac{p+1}{p}$  . . . . . On aura donc un moyen sûr de sommer si

une telle série de sinus & de cosinus (qui en faisant  $p$  égal aux produits de tous les dénominateurs des angles sous-multiples, se trouve être très-générale) lorsqu'elle a une somme algébrique. Cette méthode peut être très-commode lorsqu'on emploie les approximations; en effet, en intégrant, on trouve dans ce cas l'angle  $x$  & les sinus & cosinus, & si la somme de la suite en sinus n'est pas algébrique, & que cependant on puisse n'avoir aucun égard aux différentes valeurs que peuvent fournir les transcendentes, on pourra sans beaucoup d'erreur supposer entre les coefficients, l'équation qui donne une somme algébrique, & la trouver, quoique souvent la série elle-même soit divergente.

Lorsque les suites contiennent un angle  $px$ ,  $p$  étant irrationnel; on aura la loi des coefficients de la suite, lorsque la fonction génératrice est rationnelle, comme on l'a pour deux variables;

& on peut tirer les mêmes avantages de cette manière de déterminer les fonctions rationnelles. En général, toutes les fois que le coefficient d'un terme quelconque est donné par une équation linéaire & d'un nombre fini de termes, quelles que soient les fonctions qui entrent dans la série, la fonction génératrice est une fonction rationnelle des variables & de ces fonctions.

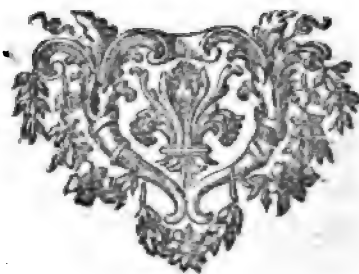
Lorsqu'on a  $a + by + cy^2 + ey^3 + \dots$  série récurrente de  $y$  & de  $x$ , on voit aisément qu'il suffit que  $a, b, c, \dots$  étant des fonctions rationnelles, on ait entre ces coefficients des équations linéaires d'un nombre déterminé de termes, & dans lesquels les facteurs soient des fonctions de  $x$ .

On remarquera de plus que lorsqu'il est question de s'assurer si une série proposée est récurrente, il est souvent plus commode de chercher son terme général en  $n$ ,  $n$  étant l'exposant de  $x$  dans ce terme. Cela est sur-tout utile lorsque la série a d'autres fonctions génératrices que des fonctions rationnelles, & que celles-ci ne sont que des valeurs particulières : dans ce cas on remarquera que faisant le terme général égal à  $e^{an}b$ , il satisfera à l'équation linéaire en  $(n)$ ,  $(n-1)$ , &c. qu'on a pour une série récurrente, & qu'on aura  $e^a$  pour une équation d'un degré égal à  $m-1$  si l'équation linéaire va jusqu'au terme  $n-m$ ; & il est aisé de voir 1.° que  $b$  reste arbitraire; 2.° soit  $e^a, e^{a'}, e^{a''}$ , &c. les racines de l'équation en  $e^a$ ; la vraie expression du terme général sera  $e^{an}b + e^{a'n}b' + e^{a''n}b''$ , &c.  $b, b', b''$ , &c. étant des arbitraires différentes; 3.° que si l'équation en  $e^a$  a deux racines égales  $a = a'$ , il faudra, au lieu de  $e^{an}b + e^{a'n}b'$ , mettre  $e^{an}(b + b'n)$ , & ainsi de suite pour un plus grand nombre de racines égales. Quant aux séries qui représentent des fonctions algébriques non rationnelles, on a en général l'équation



$$\left. \begin{array}{l} a (n)^{(m)} + b (n-1)^{(m)} + \dots \\ a' (n)^{(m-1)} + b' (n-1)^{(m-1)} + \dots \\ + a, (n) + b, (n-1) \dots \dots \dots \end{array} \right\} = 0.$$

Cette équation ayant un nombre déterminé de termes, cette manière d'exprimer le terme général est suffisante pour trouver la somme d'une série de ce genre lorsque  $m$  est connu, ce qui a lieu dans tous les cas dont je me suis occupé ici, & qu'on a une autre équation de ce terme général, à qui il la faut comparer; mais le cas où  $m$  seroit inconnu est beaucoup plus indéterminé, & renfermeroit beaucoup plus de difficultés.



*OBSERVATION  
DU PASSAGE DE VÉNUS  
SUR LE DISQUE DU SOLEIL,*

*Faite à l'Observatoire royal le 3 Juin 1769.*

Par M. CASSINI DE THURY.

LES nuages nous cachèrent le Soleil jusqu'à  $7^h 38'$  du soir, 7 Juin 1769. que nous commençâmes à apercevoir son bord supérieur, sortant d'un nuage, & Vénus dont le disque ne nous parut pas encore entré sur le Soleil; j'ai jugé le contact intérieur à  $7^h 38' 53''$  avec une lunette de Dollond de  $3^d \frac{1}{2}$ .

M. le duc de Chaulnes a estimé ce contact 4 secondes plus tard, comme on le verra par le détail de son Observation.

M. du Séjour a jugé le contact 10 secondes plus tôt avec une lunette achromatique du sieur Létang, qui faisoit l'effet d'une lunette de 6 à 7 pieds.

Pendant le temps où Vénus paroissoit le plus distinctement, je n'ai rien aperçu sur son disque, ni couleur, ni anneau, ni allongement sensible; j'ai essayé de déterminer le diamètre de cette Planète, que j'ai trouvé de  $1' 1''$ , & une seconde fois de  $1' 1'' \frac{1}{2}$ : mais les vapeurs faisoient paroître les bords de Vénus & du Soleil, ondoyans, & je doute beaucoup de l'exactitude de cette détermination.

Les deux observations que j'ai faites dans l'intervalle d'un quart-d'heure pour déterminer la route de Vénus sur le Soleil, en faisant passer cette Planète par les fils horizontal & vertical d'un quart-de-cercle, ne nous promettent pas une précision suffisante pour pouvoir en conclure la route de cette Planète, & les autres.

éléments; à  $7^h 48'$  la distance du bord du Soleil au bord inférieur de la Lune a été trouvée de  $1' 12''$ .

J'ai avancé, dans un Mémoire sur la parallaxe du Soleil, qui fait partie de la relation de mon voyage en Allemagne, que j'avois trouvé le temps de la conjonction de Vénus avec le Soleil en 1761 à 2 minutes près de celui que donnoient les Tables de mon père, corrigées; & ayant calculé le lieu de Vénus pour le temps de la conjonction dernière, marquée dans la Connoissance des Temps à  $10^h 9' 53''$ , j'avois trouvé le lieu de Vénus pour ce temps, de  $8^f 13^d 36' 53''$ , plus petit de 17 secondes que celui du Soleil, qui étoit alors de  $2^f 13^d 27' 10''$ ; d'où j'avois conclu que la conjonction arriveroit plus tard de 4 à 5 minutes de temps, & j'en avois prévenu les Astronomes qui devoient faire l'Observation avec moi: j'avois aussi trouvé la latitude géocentrique de Vénus de  $10' 15''$  en supposant le lieu du nœud de  $2^f 14^d 35' 45''$  selon la correction que j'ai indiquée dans le même Mémoire.

*Relation du  
Voyage.*

Mon père qui avoit calculé dès 1737 les deux conjonctions de Vénus de 1761 & de 1769, & les phases de ces deux éclipses, avoit remarqué que, tandis que selon les Tables de M. Halley, on ne devoit pas voir à Paris l'entrée de Vénus sur le Soleil dans le passage de 1769, qu'on la verroit selon les Tables, une heure avant le coucher du Soleil, & il avoit déterminé l'heure du contact intérieur à  $7^h 43' 18''$ , sans tenir compte de la parallaxe qui devoit faire paroître l'entrée plus tôt de  $7' 10''$ , qu'il faut retrancher pour avoir l'immersion totale à  $7^h 36' 8''$ , à 2 minutes près de celle qui a été observée.

*Mém. Acad.  
année 1737.*

J'ai encore fait une autre remarque dans le même Mémoire sur la parallaxe du Soleil, que je ne croyois pas que l'Observation de la phase du contact intérieur fût aussi facile à déterminer, que plusieurs Astronomes l'avoient annoncée; j'étois fondé sur l'expérience\*, & cette remarque a été confirmée en dernier lieu non-seulement par mes propres observations, mais par celles de

\* Voyez dans mon Mémoire, la Table des différences dans l'heure du contact intérieur, déterminé par les Astronomes de l'Académie.

tous ceux qui les ont fait de concert avec moi, & qui m'ont dit qu'ils n'avoient pas distingué cette phase, avec cette évidence qui ne laisse aucun doute sur le moment précis d'une Observation.

*OBSERVATION de l'Éclipse de Soleil du 4 Juin 1769.*

Le ciel a été plus favorable pour l'Observation de l'éclipse du Soleil; je me suis servi de la même lunette de Dollond pour déterminer le commencement de l'Éclipse que j'ai jugé à 6<sup>h</sup> 46' 49".

Il a été observé quelques secondes plus tard par M.<sup>rs</sup> du Séjour & du Vaucel.

J'ai quitté cette lunette pour observer avec une autre de huit pieds, garnie d'un micromètre, la quantité de l'Éclipse, & mon fils rendra compte de la quantité des doigts qu'il a mesurés; j'ai déterminé avec la lunette de Dollond, les instans où le bord de la Lune éclipsoit les taches que l'on apercevoit sur le bord du Soleil, & l'émergence des mêmes taches: cette dernière phase est incertaine à cause de la quantité des taches dont le disque du Soleil étoit couvert, & de la difficulté de reconnoître la même tache à l'entrée & à la sortie.

A 6<sup>h</sup> 51' 39" la tache *A* à moitié éclipcée.

7. 13. 24

7. 14. 20 une autre tache *O* éclipcée.

7. 23. 14 une tache *B*.

7. 23. 43 entièrement éclipcée.

7. 26. 14 le bord de la Lune touche à une autre tache.

7. 28. 16 le bord touche plusieurs petites taches *C*.

7. 33. 26 une tache sort.

7. 42. 7 le bord a une tache.

7. 45. 59 une tache *C* sort.

7. 53. 24 } les taches *CC* sortent.

7. 54. 59 }

232 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

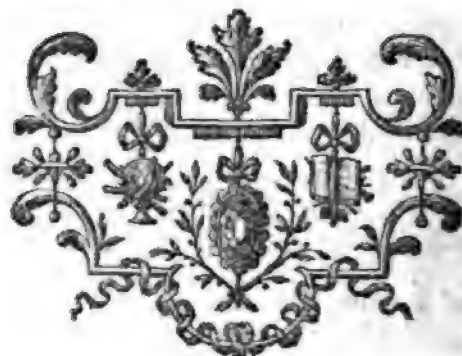
A 7<sup>h</sup> 57' 44" la tache B fort.

8. 21. 24 une tache A fort.

8. 23. 4 la tache fort.

8. 27. 18 fin de l'Éclipse.

La grandeur m'a paru de 5 doigts  $\frac{1}{2}$ : j'ai examiné avec la plus grande attention pendant toute la durée de l'Éclipse, la conférence du disque de la Lune, & je n'ai remarqué ni inégalité, ni altération, ni couleur: les cornes paroissent fort aiguës par les extrémités.



MÉMOIRE

## M É M O I R E

*Sur l'éboulement qui arrive quelquefois à des portions de Montagnes & autres terrains élevés; & sur les moyens de prévenir ces éboulemens & de s'en garantir dans plusieurs circonstances.*

Par M. PERRONET.

ON voit quelquefois des terrains assez considérables; le 5 Juillet 1769.  
des montagnes & descendre dans la plaine, en ravageant tout ce qui se rencontre sur leur passage. Par exemple, l'accident arrivé en 1733, à Pardines, paroisse en Auvergne; le terrain, sur environ quatre cents toises de longueur & trois cents de largeur, descendit sur une plaine assez éloignée, avec les maisons, les arbres & ce qui étoit dessus; tout fut culbuté & mis dans une espèce de cahos; une vigne de vigne assez considérable, s'est cependant conservée en étant exploitée utilement pour le propriétaire du terrain sur lequel elle étoit descendue, & il a continué d'en jouir depuis ce temps.

Les montagnes entières peuvent aussi quelquefois s'écrouler, comme cela est arrivé à une montagne fort haute & presque adossée à celle de Chimborazo, province de Quito, la plus élevée des Cordillères.

On voit encore des portions considérables de terrains emportés; par des réservoirs supérieurs d'eau, dont les digues viennent à se rompre, ou par une fonte subite de neige, telle que celle qui est arrivée en 1742, sur la montagne ou volcan de Cotopaxi, aussi province de Quito, laquelle renversa cinq à six cents maisons, fit périr environ neuf cents personnes, & entraîna dans sa chute une grande partie du terrain qu'elle parcourut; la vitesse des eaux étant prodigieuse, à cause de la hauteur de sept à huit cents toises dont elles étoient descendues.

Mém. 1769.

G g

Des évènements de cette nature doivent être attribués à des tremblemens de terre, des volcans, ou à des causes qui dépendent plus particulièrement de la disposition & de la qualité du terrain; celles-ci seulement sont plus à portée d'être observées & prévues; il est intéressant d'en faire la recherche pour connoître les terrains qui sont les plus exposés à s'ébouler, afin de n'y pas faire d'édifices publics, ni d'habitations, & pour garantir, s'il y avoit moyen, les ouvrages qui s'y trouveroient établis. C'est cette recherche, & celle des glaciis que prennent les terres & autres matières ébouées ou jetées, après avoir été fouillées pour en former des digues, des chemins ou des terrasses élevées, qui sont essentiellement l'objet du présent Mémoire.

Je vais commencer par exposer quelques observations & expériences qui me serviront à établir ce que j'ai à dire.

La terre, le sable & les autres matières semblables doivent être considérées comme étant contiguës & faisant masse, ce que l'on nomme communément *terre vierge*, ou bien comme étant divisées après avoir été fouillées & remuées, ou par quelque autre cause que ce soit.

La terre en masse, les pierres & tous les autres corps ne sauroient rouler ni descendre que leur centre de gravité ne soit mis en mouvement; les plus grandes masses & celles qui sont dures, étant aussi les plus difficiles à déplacer: on conçoit qu'une certaine portion de terrain un peu considérable, qui aura existé un nombre de siècles dans le même état de repos, y restera toujours, s'il ne survient quelques changemens à son état naturel.

Ces changemens peuvent arriver dans la masse des corps.

Si l'on vient, par exemple, à charger le sommet d'un terrain qui auroit peu de consistance, & dont le glaciis seroit roide, soit en y portant des terres, ou en y élevant des édifices trop pesans, les terres qui pouvoient auparavant se soutenir, seront sollicitées à s'ébouler dans une partie inférieure à cette surcharge, & formeront après leur chute & celle de l'édifice, un nouveau glaciis, qui sera moins roide que le premier.

Si l'on vient à couper au pied d'un terrain qui est en glaciis, une portion de la masse, la partie supérieure sera aussi sollicitée

à descendre, à moins que la force de la cohésion ne la retienne, comme cela arrive assez ordinairement dans les terres vierges d'une certaine consistance, & dans celles qui sont pierreuses ou garnies de racines d'arbres.

Il est aisé de reconnoître ces terrains au coup d'œil, & de juger, à peu près, jusqu'à quel point on pourroit, sans trop risquer, les charger au sommet des glacijs, ou les fouiller à leur pied.

Il peut arriver du changement dans les parties qui composent une masse de terre.

L'eau, en s'introduisant dans cette masse, peut la diviser & en diminuer la cohésion, pour lors il devra s'en ébouler une portion, le glacis naturel changera & deviendra plus incliné avec l'horizon.

La pesanteur de l'eau qui se sera introduite dans la terre, en chargera aussi la partie supérieure; l'équilibre pourra être rompu, & cette cause se trouvant réunie avec la diminution de la cohésion, il en résultera un plus grand & plus prompt éboulement du terrain.

La terre la plus légère, la plus douce & poreuse est aussi la plus facile à être pénétrée & atténuée par l'eau; cette sorte de terre s'y met même en quelque sorte en dissolution pendant que le fluide est en mouvement sur le terrain en pente qu'il parcourt, & sur lequel il fait aussi des ravines souvent profondes, & des éboulemens plus ou moins considérables.

On connoît en Tiérache & dans plusieurs autres endroits de la France, de la terre de cette espèce, dans les temps secs elle se rapproche & se raffermi cependant assez considérablement.

Si on fouille une terre vierge, les côtés de cette fouille prennent un glacis naturel, qui varie suivant les différentes consistances & cohésions des terres. On en connoît de fortes, telles que la terre à pot qui se tient à plomb jusqu'à 30 pieds & plus de hauteur; les terres franches & de certains sables gras se tiennent aussi assez verticalement, les terres légères, les sables fins & secs les plus désunis prennent un talus d'environ 30 degrés avec l'horizon.

La terre qui a été anciennement fouillée a moins de cohésion



que la terre vierge, & celle qui est nouvellement remuée en a encore moins, étant jetée à terre coulante elle prend différens talus ou glacis, lesquels paroissent avoir quelques rapports avec le premier état de consistance de ces terres.

La terre la plus forte, par exemple, prend, d'après l'examen que j'en ai fait, un talus de 35 à 36 degrés, avec l'horizon, au lieu de 45 degrés, que beaucoup de personnes font dans l'usage de lui attribuer; la terre plus légère & le sable prennent (comme les terres vierges de la moindre consistance qui ont été fouillées & qui s'éboulent); un glacis d'environ 30 degrés, les autres terres à proportion. La plus grande différence de l'angle n'est que de 6 degrés pour les terres & les sables remués; on en excepte cependant les terres glaises humectées, lesquelles se placent sur un plus petit angle qui se réduit quelquefois à 18 degrés, & même encore moins.

Du gros gravier, des cailloux ou des pierres cassées, forment un angle de 40 jusqu'à 45 degrés au plus.

Tous ces angles ont été mesurés au sommet des terrains rapportés, ou qui se sont éboulés, leurs glacis pouvant être considérés dans cette partie comme étant en ligne droite; ce qui arrive effectivement quand le glacis a peu de hauteur; & qu'il est fait de sable ou de terre légère, mais j'ai reconnu que dans les cas contraires, les glacis se forment une courbure qui est occasionnée par l'accélération que les corps, qui sont d'une certaine figure & grosseur, acquièrent en roulant; la corde de cette courbure peut former, avec l'horizon, un angle d'environ 2 degrés de moins que ceux qui sont indiqués ci-devant, ce qui peut cependant encore varier, suivant les différentes hauteurs des levées & la nature des terrains: je vais rapporter un exemple très-sensible de cette courbure.

La vallée des bois de Haie, au-delà de Toul, route de Paris à Nanci, a été comblée principalement avec des roches & pierres cassées sur 142 pieds de hauteur, pour y faire passer le nouveau chemin; cet ouvrage, qui est très-considérable, seroit vraiment digne des Romains; j'y ai reconnu que le glacis forme une courbure très-sensible, dont la plus grande flèche ou abscisse,

mesurée perpendiculairement à la courbure du glacis, se trouve vers les deux tiers, à compter du sommet du chemin; cette flèche a 6 pieds 8 pouces de longueur: il ne paroît pas que l'on ait jusqu'à présent fait attention à cette courbure que forme le glacis des grands remblais (a).

L'angle & la courbure du glacis des remblais sont importans à connoître pour le toisé de ces remblais. Un Ingénieur qui auroit un pont à faire construire sous un chemin élevé, devroit aussi y avoir égard pour déterminer la longueur de ce pont; faute de cette attention, il est souvent arrivé que l'on a fait les ponts trop courts, & d'autant plus que le chemin étoit plus élevé.

Indépendamment des angles & de la courbure que prennent les différens terrains qui s'éboulent, ou que l'on porte en remblai, je dois aussi, pour le but que je me propose, examiner l'inclinaison des plans sur lesquels les grosses masses de terrain peuvent commencer à se mettre en mouvement.

J'ai reconnu, par l'expérience, que si l'on pose des pierres taillées, de différens poids & grosseurs, & successivement, sur une pièce de bois qui soit seulement sciée sans avoir été rabotée, ces pierres ne commencent à glisser que lorsque la pièce de bois fait, avec l'horizon, un angle de 39 à 40 degrés.

On fait qu'un corps poli étant posé sur un plan qui le soit aussi, ne commencera à glisser que lorsque ce plan formera, avec l'horizon, un angle de 18<sup>d</sup> 26 à 27', & pour lors la hauteur de ce plan sera le tiers de sa base; cette inclinaison est communément nommée *l'angle des frottemens*.

L'angle des frottemens que l'on vient de citer, a été établi par M. Parent (b), d'après les expériences de M. Amontons, rapportées dans les Mémoires de l'Académie, année 1699; ces expériences servent communément encore aujourd'hui de règle aux Mécaniciens pour le calcul du frottement des machines; ce qui peut convenir lorsque l'on n'a à mouvoir que des poids peu considérables, & qui soient proportionnés à la force des

(a) Terrain remué & déposé au-dessus du terrain naturel.

(b) Voyez le premier Mémoire de M. Parent, inséré dans le Recueil de ceux de l'Académie, année 1704.

ressorts que M. Amontons a employés pour établir les expériences, ou à des pressions médiocres ; mais s'il étoit question du déplacement de plus grosses masses, telles que celles que j'ai à considérer dans le présent Mémoire, l'angle d'inclinaison sur lequel elles pourroient se mettre en mouvement deviendroit beaucoup plus petit que celui de  $18^{\text{d}} 26'$  à  $27'$  que l'on vient de citer ; c'est ce qu'il est intéressant d'examiner pour rectifier à cet égard les idées que nous ont donné les expériences de M. Amontons.

Les Constructeurs sont dans l'usage de ne donner que depuis 10 jusqu'à 13 lignes d'inclinaison par pied, aux plans sur lesquels les Vaisseaux sont construits & portés sur leurs quilles, que l'on graisse de suif, pour être lancés à la mer. Le vaisseau *le Prudent*, de 74 canons, & celui de *la Ville de Paris* de 90 canons, que j'ai vus lors de leur construction à Rochefort, ont été lancés à la mer sur des plans inclinés de 11 & 12 lignes par pied ; plusieurs Constructeurs ne donnent que 10 lignes par pied pour les plus gros Vaisseaux de guerre ; & celui de la Ville auroit vraisemblablement pu être construit sur une pareille inclinaison. A l'égard des frégates & des vaisseaux marchands, on donne 12 à 13 lignes au plus d'inclinaison par pied à ces plans. La moindre inclinaison est donc de 10 lignes, & la plus grande de 13 lignes par pied, ce qui donne 3 degrés 58 minutes pour la plus petite inclinaison & 5 degrés 9 minutes pour la plus grande, & pour angle moyen 4 degrés 33 minutes  $\frac{1}{2}$ , que je nommerai l'*angle des frottemens pour les grosses masses*, afin de le distinguer de celui qui a été calculé par M. Parent.

Il y a lieu de présumer que de plus grosses masses encore, telles que des portions considérables de terrains, pourroient être mises en mouvement sur un plus petit angle, les autres circonstances étant d'ailleurs supposées les mêmes.

L'inclinaison que l'on donne aux plans pour lancer les vaisseaux à la mer, réduit le frottement seulement aux douzième & quinzième au lieu du tiers ou à peu près, de la pesanteur des corps mus, à quoi il a été évalué par M. Amontons, quelle que fût d'ailleurs leur masse & la superficie de leur base ; on suppose au surplus que ces bases sont planes & graissées : ce frottement pourra

être encore plus petit pour de plus fortes masses, comme je viens de l'expliquer.

M. Bouguer, dans son *Traité du Navire*, page 74, dit que l'on donne souvent 6 lignes d'inclinaison sur chaque pied de longueur au plan sur lequel on bâtit les navires pour les lancer à la mer, ou 2 degrés un tiers. Cet habile Académicien aura vraisemblablement été trompé par les personnes qu'il aura consultées à ce sujet ; car suivant les connoissances que j'ai prises avec soin sur différens ports de mer, il est constant que l'on ne doit pas donner moins de 10 lignes par pied à ces plans, & que le vaisseau qui auroit été construit sur un plan dont l'angle avec l'horizon seroit plus petit, courroit risque de ne pouvoir pas être lancé à la mer.

Dans l'application que je dois faire des expériences & des observations précédentes, aux masses de terrain qui pourroient se déplacer, on doit avoir égard à l'irrégularité & à la grandeur (c) des surfaces planes des corps qui les soutiennent, & dont elles viendroient à se détacher, ainsi qu'au plus ou moins d'aspérité des corps, ce qui doit augmenter l'inclinaison du plan & peut-être le rapprocher de celui de 39 à 40 degrés rapportés-ci-devant dans l'expérience que j'ai faite avec la pierre qu'on fait glisser sur le bois.

Je vais présentement examiner les autres circonstances essentielles, dans lesquelles les terrains montueux sont exposés à s'ébouler par les causes les plus ordinaires ou par le travail des hommes.

Si dans la tranchée ou coupure à faire dans une montagne pour l'établissement d'une maison ou d'un chemin, il se trouve un banc de sable fin ou de terre glaise d'une certaine hauteur, ce sable pourra s'ébouler, la terre glaise se gerçera & se fendra en tous sens en se séchant vers la partie entamée qui se trouvera exposée à l'air ; elle tombera successivement par morceaux, & le terrain supérieur n'étant plus porté, s'éboulera nécessairement

(c) On voit par les *Mémoires de l'Académie de 1703*, page 105, & par les *Expériences de M. l'Abbé Nollet*, tome 1, page 235, que contre l'opinion qu'avoit M. Amontons, on doit, dans le calcul des frottemens, avoir égard à l'étendue, l'irrégularité & aspérité des corps.

sans qu'il soit possible de l'empêcher, ni même d'achever l'ouvrage qui aura été commencé, si l'on tarde trop d'y remédier.

S'il ne s'y trouvoit que du sable fin, il suffiroit de couper les glacis sur un angle de 30 degrés ; mais la glaise étant une fois *éventée*, c'est-à-dire, exposée à l'air, il sera nécessaire de la masquer avant qu'elle ait eu le temps de trop se gerfer dans la partie qui aura été entamée : pour cet effet, un mur construit en moëlon & mortier, le mortier, ne fut-il même que de terre, pourra suffire ; il préviendra la chute des terres supérieures, n'étant question pour cela que d'empêcher la glaise de se sécher à l'air.

L'épaisseur réduite de ce mur pourra être fixée à moitié de sa hauteur, non compris celle de sa fondation ; il conviendra de donner à ce mur un talus de 6 pouces par pied de hauteur.

Si le banc de glaise se trouvoit trop élevé au-dessus du chemin, comme de 30 & 40 pieds, & qu'il fût d'une hauteur & qualité à faire craindre la chute d'un terrain supérieur trop considérable, la construction du mur que je propose, pourroit devenir de trop grande conséquence & difficulté dans l'exécution, à moins que le terrain qui seroit situé peu au-dessous de cette glaise, ne fût rocheux ou assez ferme pour y établir le mur mentionné ci-devant : ce mur pourroit dans ce cas être élevé à plomb en-dedans ; il conviendrait de lui donner à son parement extérieur un talus égal au glacis des terres.

Le banc de glaise sans avoir été entamé, pourroit être incliné suffisamment ; pour que le terrain du dessus n'étant plus retenu par celui que l'on auroit enlevé, soit pour y établir un chemin, ou pour un autre motif, vînt à glisser, & cela pourroit même arriver avec un peu d'inclinaison, parce que la surface des bancs de glaise est ordinairement assez plane & unie ; rien ne pourra dans ce cas empêcher les grandes masses de descendre, il faudra abandonner les ouvrages qui auront été commencés, & les changer d'emplacement.

Cette considération doit engager un Ingénieur, qui a de pareilles tranchées à faire dans les montagnes, à commencer par connoître le terrain avant de décider sans retour l'emplacement de ces ouvrages, sur-tout lorsqu'il y aura lieu de penser qu'il  
pourroit

pourroit s'y trouver de la glaise : pour cet effet, il doit faire faire des sondes & trous de tarière ou des puits dans les endroits que l'on ne pourroit connoître autrement, & ce jusqu'à la profondeur à laquelle les fouilles doivent être faites dans l'emplacement qu'il aura premièrement choisi.

Par ce moyen, on connoitra les différens bancs de terre, sable ou glaise qui se trouveront dans l'étendue des fouilles à faire ; ainsi que leurs inclinaisons ou qualités ; si on a lieu pour lors d'appréhender les inconvéniens mentionnés ci-devant, il ne faudra pas hésiter à chercher un emplacement plus convenable, & ce travail préliminaire épargnera les frais d'une entreprise qui pourroit quelquefois devenir trop difficile, & même impossible à exécuter.

S'il est intéressant d'examiner le terrain que l'on auroit à fouiller pour la construction d'un édifice ou d'un chemin dans les endroits montueux, il ne l'est pas moins de bien choisir le lieu de l'emplacement, lors même que l'on n'auroit point de fouille à y faire.

On doit éviter, par exemple, la proximité d'un terrain ou d'un rocher escarpé qui seroit exposé à s'écrouler, & aussi les endroits qui seroient sujets aux fontes de neiges & lavanges.

On a été obligé, il y a environ quinze ans, de porter sur la droite du Drac en remontant, un chemin qui avoit été éabli anciennement au côté opposé, près le village de Lefliguières en Dauphiné, au pied d'une montagne nommée *Roche-mole*, de 6 à 700 pieds de hauteur presque perpendiculaire ; les pierres qui se sont détachées successivement du rocher, ont formé jusqu'au Drac un glacié qui peut, avec l'horizon, faire un angle de 30 degrés vers le bas du glacié, à cause d'une courbe concave considérable, que prend ce glacié par la grande hauteur de la chute des pierres. La nature du roc est calcaire ; il se divise aisément dans la chute, étant plein de fils & de parties terreuses : le volume de la partie de ce rocher, qui paroît actuellement menacer de se détacher, à en juger par les crevasses qui se trouvent à son sommet, a été évalué à un million de toises cubes ; & si cette partie vient à tomber dans le Drac, comme il y a lieu de l'appréhender, elle pourra former un lac dans cet endroit.

Mém. 1769.

H h

En pareilles circonstances, on n'a pas d'autre parti à prendre que d'éloigner les édifices & les chemins de ces sortes d'endroits, lorsqu'il est question de les construire, & on doit les transporter ailleurs (comme on l'a fait pour celui mentionné ci-devant) quand on n'a pas bien su choisir leur premier emplacement.

Lorsqu'on aura une habitation établie proche des endroits trop escarpés, ou des terrains de mauvaise consistance, la prudence exigera que l'on examine de temps à autre s'il ne se formeroit point de crevasses dans les parties supérieures; elles doivent servir d'avertissement & de marques souvent prochaines des éroulemens de rochers & portions de terrains dont on se trouveroit menacé, sur-tout lorsqu'il peut s'introduire dans ces crevasses de l'eau, que par précaution on fera bien de tâcher d'en détourner aussitôt.

Il ne seroit pas toujours nécessaire que le terrain eût été fouillé, pour que la descente de celui qui seroit supérieur à la glaise pût avoir lieu. S'il survenoit de l'eau sur le banc de glaise, l'équilibre pourroit être rompu par la diminution du frottement qui auroit retenu avant ce temps le terrain supérieur, & il pourroit glisser sur cette glaise.

C'est à une pareille cause que je crois devoir attribuer les fractions qui se sont faites en 1758, aux maisons des ouvriers de la Machine de Marly, dans une portion de la butte qui se trouve située immédiatement au-delà de cette Machine, du côté de Saint-Germain. Cette partie de terrain commençoit à se fendre & à prendre un peu de mouvement vers la rivière, ainsi que la partie de la grande route de Saint-Germain, qui se trouve établie au pied de cette butte, & on eut lieu de concevoir les plus grandes inquiétudes. Par la visite & les sondes que M. Gabriel, premier Architecte du Roi, feu M. Hupeau, premier Ingénieur des Ponts & Chaussées, mon prédécesseur, & moi, avons faite de ce terrain, on a reconnu qu'il s'y trouvoit à peu de profondeur, un banc de glaise incliné; on s'aperçut aussi que l'eau qui s'étoit échappée des tuyaux de la Machine, dans la partie supérieure, étoit descendue jusqu'au banc de glaise: on a travaillé aussi-tôt à empêcher que l'eau de la perte de ces tuyaux n'arrivât jusqu'au banc de terre glaise, & depuis ce temps

on n'a plus remarqué qu'il se soit fait aucun mouvement dans ce terrain.

Il est arrivé en 1765 pareille chose à Croix-Fontaine, une partie du terrain qui se trouve situé à mi-côte avant d'arriver au château, s'entr'ouvrit en nombre d'endroits & s'éboula successivement par partie, le mur de terrasse qui retenoit le pied de ces terres fut renversé, & on fut obligé de transporter plus loin le chemin qui étoit établi le long de ce mur. Feu M. de Parcieux & moi, fumes visiter ce terrain, nous reconnûmes qu'il étoit porté sur un banc de glaise incliné, & nous pensâmes que la perte qui se faisoit de l'eau d'un bassin supérieur, pouvoit être la cause de cet événement. D'après notre avis, on fit supprimer ce bassin, & construire des perrées ou petits aqueducs sur le banc de glaise, dans la partie supérieure du terrain qui s'étoit éboulé, pour recevoir & détourner les eaux de pluie qui pourroient encore arriver sur cette glaise. Depuis ce temps les terres se sont entièrement fixées, ce qui nous a confirmé dans l'opinion que nous avons eue à ce sujet.

Un rocher suffisamment uni, & qui seroit incliné; pourroit aussi occasionner, comme le seroit un banc de glaise, la descente d'un terrain supérieur.

Il y a douze ans qu'au village de Guet, à six lieues de Grenoble, sur la grande route de cette capitale à Briançon, tout le terrain, lequel est en pente, glissa & descendit en un instant vers le Drac, qui en est éloigné d'environ un tiers de lieue; la terre se fendit dans ce village, & la partie qui a glissé se trouve de 6, 8 & 10 pieds plus basse qu'elle n'étoit. Tout le terrain sur une lieue jusque près du village de Corps, est établi sur un rocher assez uni, ce dont on a pu juger par les parties que les ravines en ont rendu apparentes dans plusieurs endroits. On a aussi reconnu que ce rocher est incliné à l'horizon d'environ 40 degrés, que tout le terrain qui lui est inférieur, forme une espèce de coin ou prisme triangulaire, dont la berge du Drac fait la hauteur sur 50 à 60 pieds; c'est à cette berge emportée par le torrent, que doit vraisemblablement être attribué cet événement, joint à ce que l'eau des ravines qui est descendue jusqu'au rocher, aura



pu détremper la partie du terrain qui porte immédiatement dessus, & contribuer avec l'action de sa pesanteur, à rompre l'équilibre & le faire descendre vers le Drac.

Une aussi grande masse ayant commencé à prendre du mouvement, se trouve ensuite presque en équilibre avec le frottement, & c'est avec grande raison qu'on appréhende dans le pays que ce terrain ne puisse encore descendre vers le Drac.

Des ouvrages d'art, tels que des digues, des éperons ou épis, qui auroient défendu la berge du Drac, & l'attention d'avoir détourné les eaux supérieures, & empêché qu'elles ne fussent descendues jusqu'au rocher par les parties ravinées, auroient vraisemblablement pu prévenir la descente du terrain.

Au moyen des différentes précautions que je viens d'indiquer, & des moyens qui sont proposés dans le présent Mémoire, il paroît que l'on aura fait ce que l'art & la prudence semblent prescrire de plus convenable pour la sûreté des hommes & la conservation des travaux que l'on auroit à construire, ou qui seroient déjà établis sur les montagnes & terrains élevés & périlleux.



*O B S E R V A T I O N*  
*DE L'ENTRÉE TOTALE DE VÉNUS*  
*SUR LE DISQUE DU SOLEIL,*

*Faite à l'Observatoire royal le 3 Juin 1769.*

Par M. MARALDI.

**L**E Soleil a été couvert long-temps avant l'entrée de Vénus 7 Juin  
1769.  
sur son disque, & il n'a paru que peu de temps avant  
l'entrée totale de cette Planète. J'ai observé le contact intérieur  
à 7<sup>h</sup> 38' 50", avec une lunette achromatique de 36 pouces,  
dont l'objectif est composé de trois verres; elle fait l'effet d'une  
bonne lunette ordinaire de 15 pieds: les bords du Soleil & de  
Vénus étoient alors assez bien terminés.

*O B S E R V A T I O N*  
*DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL du 4 Juin, au matin.*

J'ai observé l'éclipse du Soleil avec une lunette de 7 pieds;  
garnie d'un réticule composé de treize fils parallèles & également  
éloignés les uns des autres, qui partageoient en douze parties  
égales le diamètre du Soleil compris entre les deux extrêmes.  
Le ciel étoit parfaitement serein & l'air calme.

A 6<sup>h</sup> 46' 54" du matin, temps vrai, commencement de l'éclipse.

6. 53. 12 l'éclipse est d'un doigt.

6. 58. 43 ..... 2 doigts.

7. 6. 3 ..... 3 doigts.

246 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

A 7<sup>h</sup> 14' 14" l'Eclipe est de 4 doigts.

7. 23. 14 ..... 5 doigts

7. 35. 14 ..... 5  $\frac{1}{2}$  doigts, plus grande phase.

7. 47. 54 ..... 5 doigts.

7. 57. 49 ..... 4 doigts.

8. 6. 45 ..... 3 doigts.

8. 14. 6 ..... 2 doigts.

8. 20. 32 ..... 1 doigt.

8. 27. 11 fin de l'Eclipe.



---

*SUR LA COURBE DÉCRITE*  
*PAR LES*  
*BOULETS ET LES BOMBES,*  
*EN AYANT ÉGARD*  
*À LA RÉSISTANCE DE L'AIR.*

Par M. le Chevalier DE BORDA.

LES Auteurs élémentaires qui ont écrit sur l'Artillerie, ont supposé que la résistance de l'air dérangeoit fort peu le mouvement des boulets & des bombes; & d'après cela ils ont calculé les portées de ces projectiles & leurs vitesses initiales, comme si les courbes décrites étoient exactement des paraboles. J'ai voulu examiner par le calcul jusqu'à quel point cette supposition pouvoit être permise, & j'ai été surpris de trouver qu'en ayant égard à cette résistance, les rapports des portées étoient totalement changés, & que ces portées n'étoient quelquefois qu'une petite partie de ce qu'elles auroient été dans le vide. J'ai conclu de-là qu'il étoit nécessaire de traiter de nouveau la théorie du mouvement des boulets & des bombes, en y faisant entrer l'effet de la résistance de l'air, & c'est l'objet que je me propose dans ce Mémoire.

Newton a déjà travaillé sur le même sujet, comme on peut le voir dans le second livre des Principes mathématiques; ce grand Géomètre ayant cherché la courbe décrite par un corps pesant qui se meut dans un fluide, & ayant reconnu que l'équation différentielle de cette courbe n'étoit pas intégrable, recourut à une approximation, & trouva une espèce d'hyperbole qui approchoit de la courbe cherchée incomparablement plus que la parabole ordinaire; il détermina la position & les élémens de cette hyperbole, & il en déduisit de nouvelles règles de Balistique, qui sont

beaucoup plus exactes que les règles anciennes, mais qui ne le sont peut-être pas encore assez pour la pratique.

Depuis Newton, l'illustre M. Euler a donné dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1756, une nouvelle approximation de la courbe des projectiles; & enfin on a sur le même sujet, dans le volume de la même Académie pour l'année 1765, un Mémoire fort étendu de M. Lambert.

Je n'entrerai point dans l'examen de ces différens ouvrages, je remarquerai seulement que les deux derniers Auteurs n'ont point appliqué leurs calculs aux effets connus de nos pièces d'Artillerie, & que par-là leurs travaux n'ont pas eu l'utilité qu'on en pouvoit attendre. Je me propose principalement dans ce Mémoire de suppléer à ce qu'ils ont omis, & d'examiner, à l'aide du calcul, les principales questions de la Balistique; je n'entrerai pas dans de longs détails sur chacune de ces questions, mais je donnerai des connoissances générales qu'un Lecteur instruit pourra étendre facilement.

Je vais d'abord chercher en général la courbe des projectiles, je donnerai après cela une approximation de cette courbe, fort simple & suffisamment exacte, & je terminerai mon Mémoire par différentes applications.

## PROBLÈME.

*Trouver la courbe décrite par un corps pesant sphérique, qui se meut dans un milieu résistant.*

Fig. 1.

SOLUTION. Soit  $AEO$  cette courbe; je tire à des distances infiniment petites & égales les ordonnées  $EB$ ,  $FC$  &  $GD$ ; j'appelle  $AB$ ,  $x$ ;  $BE$ ,  $y$ ;  $AE$ ,  $s$ ; la vitesse avec laquelle le corps parcourt  $EF$ ,  $u$ ; le temps employé pour parcourir  $AE$ ,  $t$ ; la résistance du fluide au point  $E$ ,  $R$ ; & la force de la gravité  $g$ .

Considérons le corps lorsqu'il vient de parcourir  $EF$  avec la vitesse  $u$ , il est clair que s'il étoit abandonné à lui-même, il parcourroit dans l'instant suivant une ligne  $FK$  dans le prolongement de  $EF$  qui seroit à cette ligne  $EF$  comme la durée

durée du second instant est à la durée du premier ; on aura

donc  $dt : dt', :: ds' : FK = ds + \frac{ds \, ddt}{dt}$  ; mais si on

suppose que pendant le second instant le corps éprouve l'action de la gravité & la résistance du fluide, & qu'en vertu de ces deux forces il parvienne en  $H$ ,  $GH$  sera l'effet de l'action de la gravité, &  $GK$  sera celui de la résistance du fluide ; on aura donc  $GH = g \, dt^2$ , &  $GK = R \, dt^2$ . Maintenant, puisque  $BC = CD$ , on aura  $FG = EF = ds$ ,

$FK = ds + \frac{ds \, ddt}{dt} = ds + GK$  ; donc  $GK =$

$\frac{ds \, ddt}{dt}$ . Par la même raison,  $GH = - \, ddy$  ; on aura donc

$R \, dt^2 = \frac{ds \, ddt}{dt}$ , &  $g \, dt^2 = - \, ddy$  ; éliminant  $dt$ , on aura  $- \, 2 \, R \, ddy = g \, ds \, d^2y$ . C. Q. F. T. & D.

La solution que nous venons de donner s'applique à une loi quelconque de résistance, mais l'expérience nous ayant appris que la résistance des fluides étoit à très-peu près proportionnelle au carré des vitesses, nous supposerons l'existence de cette loi, sur laquelle nous ferons quelques réflexions dans la suite de ce Mémoire.

Soit donc dans l'équation précédente,  $2 \, R = \frac{a^2}{z}$ , elle se changera en celle-ci,  $ds \, ddy = a \, d^2y$ . Pour l'intégrer, soit  $dy = z \, dx$ , on trouvera  $x = \int \frac{a \, dz}{\int dz \sqrt{1+zz}}$ , &  $y = \int \frac{a \, z \, dz}{\int dz \sqrt{1+zz}}$ . Dans ces équations, la quantité  $\int dz \sqrt{1+zz}$  est intégrable ; mais les valeurs entières ne l'étant pas, il est nécessaire de recourir à des approximations.

Exprimons d'abord la valeur de  $y$  par une suite de puissances de  $x$  ; pour cela, soit en général  $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ , &c. appelant  $e$  l'angle d'élévation, &  $h$  la hauteur due à la vitesse initiale, on trouvera par les conditions du Problème,

$$A = \text{tang. } e; \quad B = - \frac{1}{4h \cos^2 e}; \quad C = - \frac{1}{12ah \cos^4 e};$$

Fig. 1.

$$D = \frac{\sin. e}{96 a h^2 \cos. e^4} - \frac{1}{48 a^2 h \cos. e^4};$$

$$E = \frac{1}{120} \left( \frac{\sin. e}{a^3 h^3 \cos. e^5} - \frac{1}{2 a^2 h \cos. e^5} - \frac{1}{8 a h^3 \cos. e^5} \right);$$

&amp; par conséquent,

$$y = x \tan. e - x^3 \times \frac{1}{4 h \cos. e^4} - x^5 \times \frac{1}{12 a h \cos. e^4} \\ + \frac{x^7}{24} \times \left( \frac{\sin. e}{4 a h^2 \cos. e^6} - \frac{1}{2 a^2 h \cos. e^6} \right) \\ + \frac{x^9}{120} \left( \frac{\sin. e}{a^3 h^3 \cos. e^7} - \frac{1}{2 a^2 h \cos. e^7} - \frac{1}{8 a h^3 \cos. e^7} \right) \text{ &c.}$$

Si on suppose la résistance nulle, la quantité  $a$  sera infinie; & tous les termes du second membre s'évanouiront à l'exception des deux premiers; on aura donc  $y = x \tan. e - \frac{x^3}{4 h \cos. e^4}$ , équation à la parabole; de laquelle on déduiroit facilement toutes les règles de la Balistique ordinaire.

Si la quantité  $a$  n'est pas infinie, il faudra employer d'autant plus de termes de la série, que la vitesse initiale sera plus grande, & que la quantité  $a$  sera plus petite.

Je me suis assuré, après avoir déterminé la constante  $a$ , qu'on pouvoit, en ne faisant usage que des cinq premiers termes de la série, déterminer fort exactement les portées de nos pièces d'artillerie, lorsque les vitesses initiales n'excèdent pas 200 pieds par seconde; mais pour les grandes vitesses qui sont quelquefois de 1800 à 2000 pieds par seconde (ainsi que nous le verrons dans la suite) il faudroit employer un très-grand nombre de termes de la série qui peut-être même à la fin deviendrait divergente: il est donc nécessaire pour ce cas-là d'avoir une autre espèce d'approximation, & voici celle que j'ai trouvée.

Nous avons supposé dans notre solution que la densité du fluide étoit la même dans tous les points de la courbe; supposons maintenant qu'elle soit variable, on verra facilement qu'en appelant  $D$  la densité qui est au commencement de la courbe, &  $\Delta$  celle qui est à un autre point quelconque  $E$ , on aura

$$\frac{\Delta}{D} ds dy = a d^3 y; \text{ j'imagine à présent qu'on donne une}$$

telles valeurs à  $\Delta$  que l'équation soit intégrable, il est clair que si cette valeur de  $\Delta$  ne s'éloigne pas beaucoup d'une quantité constante, la courbe qu'on trouvera par l'intégration, s'éloignera très-peu de la courbe cherchée.

Soit d'abord pour première valeur  $\frac{\Delta}{D} = \frac{n dx}{ds}$  ( $n$  étant une constante) on aura  $n ddy dx = a d^3 y$ ; & intégrant, on parviendra à cette équation finie,  $y = \frac{Bx}{a} + (aD + B) \times (c^{\frac{nx}{a}} - 1)$ , dans laquelle  $D = \text{tang. } e$ , &  $B = -(\frac{a}{2ah \text{ cof. } e} + n \text{ tang. } e)$ ; mettant ces valeurs dans l'équation, on aura

$$y = x \left( \text{tang. } e + \frac{a}{2ah \text{ cof. } e} \right) - \frac{a^2}{2a^2 \text{ cof. } e} \times (c^{\frac{nx}{a}} - 1).$$

Maintenant la vitesse initiale étant supposée très-grande, & la résistance étant par conséquent beaucoup plus considérable au commencement  $AB$  de la courbe que dans le reste  $BCE$ ; je déterminerai  $n$  de manière que l'erreur soit nulle au point de départ; pour cela, il faut qu'on ait  $n = \frac{1}{\text{cof. } e}$ ; mettant cette valeur de  $n$  dans l'équation, on aura

$$y = x \left( \text{tang. } e + \frac{a}{2ah \text{ cof. } e} \right) - \frac{a^2}{2ah} \left( c^{\frac{x}{a \text{ cof. } e}} - 1 \right).$$

Il est clair que dans cette équation la résistance sera supposée à peu de chose près, telle qu'elle doit être dans la partie  $AB$  où le projectile a le plus de vitesse, qu'elle sera supposée trop forte dans la partie  $BC$  où la vitesse sera fort ralentie, qu'elle reviendra à ce qu'elle doit être dans la partie  $CD$ , & qu'enfin elle sera supposée trop petite dans la partie  $DE$ . En général, il me semble que par cette supposition les erreurs seront assez bien compensées, principalement lorsque l'angle d'élévation  $EAB$  sera plus petit que 45 degrés.

Dans les cas où l'angle d'élévation sera plus grand que 45 degrés, il sera mieux de supposer  $\frac{\Delta}{D} = \frac{m dy}{ds}$ , ce qui donnera



$m dy ddy = a d'y$ , équation qu'on pourra ramener à des termes finis.

Voilà donc deux équations qui donnent des courbes assez approchantes de la courbe cherchée, principalement dans les cas extrêmes, c'est-à-dire, lorsque la première direction du projectile s'éloignera peu de la verticale ou de l'horizontale; mais l'exactitude n'étant peut-être pas assez grande pour les cas intermédiaires, nous allons donner une autre solution beaucoup plus approchée.

Nous supposerons dans cette seconde approximation, que  $\frac{\Delta}{D} = \frac{n dx + m dy}{ds}$ , & nous donnerons à  $n$  & à  $m$  des valeurs telles que les densités supposées au commencement & au sommet de la courbe soient égales à la vraie densité du fluide; il est clair que par cette supposition il ne pourra y avoir d'erreur sensible sur la densité que dans de très-petites parties de la courbe.

Soit donc mise cette valeur de  $\frac{\Delta}{D}$  dans l'équation générale, on aura  $a d^2 y = (n dx + m dy) d dy$ ; intégrant & employant pour la détermination des constantes les dénominations dont on s'est servi dans la première approximation, on parviendra à cette équation finie

$$y = \left(b - \frac{n}{m}\right)x - \frac{xa}{m} \log. \left( \frac{1 + Pe^{\frac{m \cdot x}{a}}}{1 + P} \right) \text{ dans laquelle}$$

$$P = \frac{b - \frac{n}{m} - \text{tang. } e}{b + \frac{n}{m} + \text{tang. } e}; \quad bb = \frac{a^2}{m^2} + \frac{2B}{m} \quad \&$$

$$B = \frac{a}{2k \cos. e^2} + n \text{ tang. } e + \frac{1}{2} m \text{ tang. } e^2.$$

Mais il faut remarquer que cette équation ne peut avoir lieu que pour la partie ascendante de la courbe; en effet, nous avons supposé dans notre approximation, que  $\frac{\Delta}{D} = \frac{n dx + m dy}{ds}$ ; or  $dy$  est négatif dans la branche descendante, par conséquent en faisant usage de notre équation pour cette branche descendante,

nous supposerions une densité trop petite qui même quelquefois pourroit devenir négative. Il faut donc chercher séparément le mouvement du projectile lorsqu'il descend ; pour cela, soit  $\frac{A}{D} = \frac{v dx - \mu dy}{ds}$  ( $\mu$  étant une quantité positive), on aura  $a d^2y = (v dx - \mu dy) ddy$ , équation qui étant de la même forme que la première, s'intégrera de la même manière ; on aura donc

$$y = \left(\beta + \frac{v}{\mu}\right)x + \frac{2a}{\mu} \log. \left( \frac{1 + \pi e^{\frac{-\mu \beta x}{a}}}{1 + \pi} \right) + Y,$$

dans laquelle  $Y$  est la plus grande ordonnée,

$$\beta^2 = \frac{v^2}{\mu^2} - \frac{2B}{\mu}, \text{ \& } \pi = \frac{\beta + \frac{v}{\mu}}{\beta - \frac{v}{\mu}}.$$

Il faut encore remarquer dans cette dernière équation qu'il peut arriver que  $\beta$  ou  $\sqrt{\frac{v^2}{\mu^2} - \frac{2B}{\mu}}$  soit imaginaire ; dans ce cas la valeur de  $y$  se réduira à des expressions de sinus & de cosinus ; en effet, soit  $\beta = \epsilon \sqrt{-1}$ , on aura

$$\pi = \frac{E\sqrt{-1} + \frac{v}{\mu}}{E\sqrt{-1} - \frac{v}{\mu}} \text{ \& } y = Y + \left(E\sqrt{-1} + \frac{v}{\mu}\right)x + \frac{2a}{\mu} \log. \left( \frac{(E\sqrt{-1} + \frac{v}{\mu}) e^{\frac{-\mu E x \sqrt{-1}}{a}} + E\sqrt{-1} - \frac{v}{\mu}}{2 E \sqrt{-1}} \right)$$

$$= Y + \frac{v}{\mu} x + \frac{2a}{\mu} \log. \left[ \frac{\frac{v}{\mu} e^{\frac{-\mu E x \sqrt{-1}}{2a}} - \frac{\mu E x \sqrt{-1}}{2a}}{2 E \sqrt{-1}} - \frac{\mu E x \sqrt{-1}}{2a} \right]$$

$$+ \frac{\epsilon \frac{\mu E x \sqrt{-1}}{2a} + \epsilon \frac{-\mu E x \sqrt{-1}}{2a}}{2} = Y + \frac{v}{\mu} x$$

$$+ \frac{2a}{\mu} \log. \left( \cos. \frac{\mu E x}{2a} - \frac{v}{\mu E} \sin. \frac{\mu E x}{2a} \right).$$

Après avoir trouvé en général l'équation de la courbe, nous allons chercher l'expression des portées des projectiles, & ensuite celles du temps & de la vitesse.

### EXPRESSION des Portées.

Il faut d'abord trouver la partie de l'abscisse comprise depuis le point de départ jusqu'à la plus grande ordonnée; pour, cela on différenciera l'équation de la partie ascendante de la courbe, & après avoir égalé  $dy$  à zéro; on trouvera

$$X = \frac{a}{mb} \log. \left( \frac{b - \frac{a}{m}}{(b + \frac{a}{m}) \times p} \right);$$

mettant ensuite cette valeur dans celle de  $y$ , on aura la plus grande ordonnée ou

$$Y = (b - \frac{a}{m}) X - \frac{2a}{m} \log. \left( \frac{2b}{(b + \frac{a}{m}) \times (1+p)} \right).$$

Maintenant, soit dans l'équation de la partie descendante  $y = 0$ ; on aura, lorsque  $\frac{v^2}{\mu^2} > \frac{2}{\mu}$ ,  $\beta + \frac{v}{\mu} x$

$$+ \frac{2a}{\mu} \log. \left( \frac{1 + \pi \frac{-\mu \beta x}{a}}{1 + \pi} \right) + Y = 0, \text{ \&}$$

lorsque  $\frac{v^2}{\mu^2} < \frac{2}{\mu}$ , on aura

$$\frac{v}{\mu} x + \frac{2a}{\mu} \log. \left( \cos. \frac{\mu E x}{2a} - \frac{v}{\mu E} \sin. \frac{\mu E x}{2a} \right) + Y = 0;$$

par conséquent en cherchant la valeur de  $x$  dans l'une ou l'autre de ces équations & l'ajoutant à la quantité  $X$ , on aura la portée totale du projectile.

### EXPRESSION du Temps.

On a dans l'équation générale,  $g dt^2 = - dy$ ; donc

$dt = \sqrt{-\frac{ddy}{g}}$ ; je mets d'abord pour  $ddy$  la valeur prise dans l'équation de la partie ascendante, & j'ai

$$dt = b \sqrt{\left(\frac{2mP}{ga}\right)} \times \frac{c \frac{\frac{mbx}{a}}{a} dx}{x + Pc \frac{\frac{mbx}{a}}{a}};$$

intégrant ensuite, on aura

$$t = \sqrt{\left(\frac{8a}{mg}\right)} \left[ \arccos \left( \cos. = \left(1 + Pc \frac{mbx}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \right) - \arccos \left( \cos. = (1 + P)^{-\frac{1}{2}} \right) \right].$$

Par la même raison, on aura, pour la partie descendante,

$$t = \sqrt{\left(\frac{8a}{mg}\right)} \left[ \arccos \left( \cos. = \left(1 + \pi c \frac{-\mu\beta x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \right) - \arccos \left( \cos. = (1 + \pi)^{-\frac{1}{2}} \right) \right].$$

Mais cette expression contient des imaginaires; pour les faire

évanouir, je multiplie les deux membres par  $\sqrt{\left(\frac{-\mu g}{8a}\right)}$ , & j'ai

$$t \sqrt{\left(\frac{-\mu g}{8a}\right)} = \arccos \left( \cos. = \left(1 + \pi c \frac{-\mu\beta x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \right) - \arccos \left( \cos. = (1 + \pi)^{-\frac{1}{2}} \right);$$

& par conséquent

$$t \sqrt{\left(\frac{-\mu g}{8a}\right)} = \cos. \left[ \arccos \left( \cos. = \left(1 + \pi c \frac{-\mu\beta x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \right) - \arccos \left( \cos. = (1 + \pi)^{-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$= \cos. \left[ \arccos \left( \cos. = \left(1 + \pi c \frac{-\mu\beta x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \times \cos. \left[ \arccos \left( \cos. = (1 + \pi)^{-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$+ \sin. \left[ \arccos \left( \cos. = \left(1 + \pi c \frac{-\mu\beta x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \times \sin. \left[ \arccos \left( \cos. = (1 + \pi)^{-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$= \frac{\frac{-\mu\beta x}{2a}}{1 + \pi c \frac{-\mu\beta x}{a}}, \text{ \& mettant pour } \cos. \beta$$

$$(1 + \pi)^{\frac{1}{2}} \times (1 + \pi c \frac{-\mu\beta x}{a})^{\frac{1}{2}}$$

la valeur exponentielle, on aura enfin

$$\frac{e \sqrt{\left(\frac{\mu \beta}{8a}\right)} - e \sqrt{\left(\frac{\mu \beta}{8a}\right)}}{2} = \frac{1 + \pi c - \frac{\mu \beta x}{2a}}{(1 + \pi) \frac{1}{2} \times (1 + \pi c - \frac{\mu \beta x}{2a})}$$

équation qui ne contient plus d'imaginaires si  $\beta$  est réel, mais si  $\beta$  est imaginaire on prendra la valeur de  $ddy$  dans l'équation

$$y = \frac{v}{\mu} x + \frac{2a}{\mu} \log. \left( \cos. \frac{\mu E x}{2a} - \frac{v}{\mu E} \sin. \frac{\mu E x}{2a} \right) + Y,$$

on la substituera dans celle de  $dt$ , & on aura

$$dt = \frac{dx \sqrt{\left(\frac{B}{x^2}\right)}}{\cos. \frac{\mu E x}{2a} - \frac{v}{\mu E} \sin. \frac{\mu E x}{2a}}. \text{ Soit } \frac{v}{\mu E} = \tan. M,$$

on aura

$$dt = \frac{dx \times \cos. M \times \sqrt{\left(\frac{B}{x^2}\right)}}{\cos. \left(M + \frac{\mu E x}{2a}\right)}; \text{ d'où on tirera}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{2a\mu}{B}\right)} \times \log. \left[ \frac{1 + \sin. \left(M + \frac{\mu E x}{2a}\right)}{(1 + \sin. M) \times \left(\cos. \left(M + \frac{\mu E x}{2a}\right)\right)} \right]$$

### EXPRESSION de la Vitesse.

On a  $u = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{\sqrt{\left(-\frac{ddy}{s}\right)}}$ ; mettant dans cette équation

les valeurs de  $ds$  &  $ddy$  prises dans les équations ci-dessus, on aura une expression finie de la vitesse.

### DÉTERMINATION des Constantes.

Nous avons supposé dans notre solution, que la résistance des fluides étoit, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle aux quarrés des vitesses; les expériences de Newton, & celles que j'ai

j'ai rapportées dans le *Volume des Mémoires de l'Académie pour l'année 1763*, prouvent que cette loi a lieu pour l'air, du moins dans les vitesses médiocres, telles que 25 à 30 pieds par seconde; peut-être ne s'accorde-t-elle pas aussi-bien avec l'expérience lorsqu'il s'agit de très-grandes vitesses, comme sont celles des boulets: en effet, ainsi que l'a remarqué Robins dans son *Traité d'Artillerie*, les boulets chassés par de fortes charges de poudre ont une telle vitesse, que, malgré la grande force expansive de l'air, il se forme quelquefois un vide derrière ces globes; il est probable qu'alors les boulets éprouvent une nouvelle résistance qui vient de ce que la pression de l'atmosphère sur la partie antérieure n'est plus contre-balancée par la pression sur la partie opposée: quoi qu'il en soit de cette augmentation de résistance qui n'est peut-être pas aussi grande qu'on l'imagine ordinairement, je crois pouvoir me dispenser d'y avoir égard d'autant mieux que les boulets ne conservent que dans une petite partie de leur trajectoire ces grandes vitesses qui produisent le vide dont j'ai parlé; d'ailleurs il n'est pas nécessaire, pour l'objet que je me propose, d'avoir une solution parfaitement exacte; il suffit qu'elle soit fort approchée; & je pense qu'en me servant de la loi communément reçue, je n'aurai que de petites erreurs.

Je regarderai donc, avec Newton, la résistance qu'éprouve un globe en se mouvant dans l'air, comme proportionnelle aux carrés des vitesses, & je supposerai outre cela, d'après les expériences rapportées dans le *second Livre des Principes mathématiques*, que cette résistance est égale à l'action d'un poids d'une colonne d'air qui auroit pour base un grand cercle du globe, & pour hauteur la moitié de celle qui est due à la vitesse actuelle: mes expériences donnent à la vérité une quantité un peu plus grande que celle-là, mais la différence est assez petite pour pouvoir être regardée comme provenant d'une simple variation de la densité de l'atmosphère.

Cela posé, soit le diamètre du globe  $= A$ , son poids  $= Q$ ; la vitesse  $= u$ , la force de la gravité  $= g$ , & le rapport de la circonférence au diamètre  $= \pi$ : le poids d'un pied cube d'air

*Mém. 1769.*

. K k

258 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

étant à peu près égal à  $\frac{70^2}{800}$ , on aura le poids de la colonne d'air dont nous venons de parler  $= \frac{\pi \times A^2 \times u^2 \times 70^2}{16 \times 800 \times g}$ , & la force retardatrice exercée sur le globe  $= \frac{\pi \times A^2 \times u^2 \times 70^2}{16 \times 800 \times Q}$ ; or c'est cette force retardatrice que nous avons appelée  $R$  dans notre solution, & comme nous avons ensuite supposé  $2R = \frac{u^2}{a}$ , on aura  $a = \frac{16 \times 800 \times Q}{\pi \times A^2 \times 140^2}$ .

Quant aux constantes  $n$  &  $m$ , nous avons déjà dit que nous déterminerions leurs valeurs, de manière que les densités supposées au commencement & au sommet de la courbe, fussent égales à la vraie densité du fluide; pour cela il faudra qu'on ait au commencement & au sommet de la courbe,  $n dx + m dy = ds$ , ce qui donnera  $n = 1$  &  $m = \text{tang. } \frac{1}{2} e$ .

On pourroit, sans une grande erreur, donner la même valeur à  $\nu$  & à  $\mu$ ; mais pour plus d'exactitude, il faudra d'abord chercher l'angle de chute que j'appellerai  $\epsilon$ , & qu'on trouvera à peu près par cette équation tirée de la première approximation,

$\text{tang. } \epsilon = \text{tang. } e - \frac{X \text{ tang. } e}{a \text{ cof. } e} - \frac{X}{2 h \text{ cof. } e^2}$  ( $X$  étant la portée entière à peu près connue); cette quantité  $\epsilon$  étant déterminée, on fera  $\mu = \text{tang. } \frac{1}{2} \epsilon$  &  $\nu = 1$ .

Enfin nous remarquerons que, lorsque les boulets & les bombes sont jetés par de fortes charges de poudre sous de grands angles d'élévation, ils s'élèvent jusqu'à des hauteurs où la densité de l'air est considérablement diminuée; pour avoir égard à cette diminution de densité qui produit un grand changement dans les portées, on cherchera d'abord par cette équation approchée,

$$y = \frac{a}{2h} \times \left( \frac{2h \sin. e}{a} + 1 \right) \times \log. \left( \frac{2h \sin. e}{a} + 1 \right) - a \sin. e$$

la plus grande hauteur à laquelle les boulets s'élèvent, & la densité qui convient à cette hauteur; ensuite on supposera pour la partie ascendante, que la densité qui est au commencement de la courbe, est égale à celle qui convient au quart de la hauteur,

& que la densité au sommet de la courbe est égale à celle qui convient aux trois quarts de cette même hauteur: cela posé, la densité à la surface de la Terre étant 1, & la densité au sommet de la courbe étant  $1 - \delta$ , on aura pour la partie ascendante,

$$n = 1 - \frac{3}{4}\delta, \text{ \& } m = \frac{1}{\sin.e} - \frac{1}{\tan.g.e} + \left( \frac{3}{4\tan.g.e} - \frac{1}{4\sin.e} \right) \delta;$$

quant à la partie descendante, il sera mieux de faire  $v = 1 - \delta$

$$\text{ \& } \mu = \frac{1}{\sin.\frac{1}{2}e} - \frac{1}{\tan.g.\frac{1}{2}e} + \left( \frac{1}{\tan.g.\frac{1}{2}e} - \frac{1}{4\sin.\frac{1}{2}e} \right) \delta;$$

Toutes les constantes ainsi déterminées, on aura une approximation assez exacte de la courbe des projectiles, sur-tout pour les plus grandes portées, & même dans ce cas-là on peut dire qu'une solution qui seroit complète, mais qui supposeroit la densité constante dans tous les points de la courbe, seroit moins exacte que celle que nous venons de donner.

#### *APPLICATIONS aux effets des pièces d'Artillerie.*

Comme ces applications sont l'objet principal de mon Mémoire, je vais entrer dans des détails assez étendus sur les questions qui regardent le mouvement des boulets; je traiterai ensuite séparément du mouvement des bombes.

#### *DU MOUVEMENT DES BOULETS.*

J'examinerai d'abord les portées d'un même boulet jeté avec différentes vitesses sous le même angle d'élévation, ensuite les portées sous différens angles avec la même vitesse initiale, ce qui me donnera occasion de chercher l'angle de la plus grande portée possible; je parlerai après cela des portées de *but-en-blanc*, & enfin je comparerai les portées des boulets de différent calibre.

#### *PORTÉES du même boulet jeté avec différentes vitesses sous le même angle d'élévation.*

Pour donner une idée un peu étendue de l'effet de la résistance



260 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

de l'air sur ces portées, j'ai calculé la Table suivante, dans laquelle je suppose un boulet de 24 qui partiroit avec différentes vitesses sous un angle d'élévation de 45 degrés. La première colonne marque les vitesses supposées, la seconde donne les distances auxquelles le globe parviendroit s'il se mouvoit dans le vide, la troisième donne les portées dans l'air, & j'ai mis dans la quatrième les hauteurs auxquelles il s'élève dans l'atmosphère.

J'ai supposé dans le calcul que le diamètre du boulet de 24 étoit de 5,444 pouces, & que la constante  $g$  qui indique la gravité  $= \frac{30,2 \text{ pieds}}{(1'')^2}$ .

VITESSES INITIALES exprimées en nombres de pieds parcourus par seconde.	PORTÉES DU BOULET de 24 jeté à 45 deg. d'élévation dans le vide.	PORTÉES DU MÊME BOULET jeté à 45 degrés d'élévation dans l'air.	HAUTEURS AUXQUELLES le boulet s'élève dans l'atmosphère.
100 <sup>pieds</sup> . . . .	. . . 55 <sup>toises</sup> ,5	. . . 53 <sup>toises</sup> ,3	. . . . 13 <sup>toises</sup> ,4
200 . . . . .	. . . 221 . . .	. . . 192 . . .	. . . . 53
400 . . . . .	. . . 883 . . .	. . . 573 . . .	. . . . 170
600 . . . . .	. . . 1987 . . .	. . . 916 . . .	. . . . 306
800 . . . . .	. . . 3532 . . .	. . . 1207 . . .	. . . . 442
1000 . . . . .	. . . 5519 . . .	. . . 1445 . . .	. . . . 570
1200 . . . . .	. . . 7947 . . .	. . . 1642 . . .	. . . . 685
1500 . . . . .	. . . 12417 . . .	. . . 1899 . . .	. . . . 839
1800 . . . . .	. . . 17881 . . .	. . . 2108 . . .	. . . . 975
2100 . . . . .	. . . 24338 . . .	. . . 2284 . . .	. . . . 1095
2400 . . . . .	. . . 31788 . . .	. . . 2436 . . .	. . . . 1203
2700 . . . . .	. . . 40232 . . .	. . . 2562 . . .	. . . . 1292
3000 . . . . .	. . . 49669 . . .	. . . 2690 . . .	. . . . 1407
3500 . . . . .	. . . 67605 . . .	. . . 2863 . . .	. . . . 1525

Examinons d'après cette Table, l'effet de la résistance de l'air sur les portées des boulets, lorsqu'ils sont chassés par de fortes charges de poudre. Par une expérience rapportée dans la compilation de M. Surirei de Saint-Remy, sur l'Artillerie, on voit qu'une pièce de 24, chargée de 16 livres de poudre, & pointée

à 45 degrés, jette un boulet à la distance de 2250 toises : or cette portée répond dans notre Table à une vitesse initiale de 2038 pieds par seconde, & cette vitesse de 2038 pieds par seconde donneroit dans le vide une portée de 22922 toises; d'où il suit que la portée de ce boulet dans l'air n'est que la dixième partie de ce qu'elle auroit été dans le vide : on voit par-là combien se trompent ceux qui croient que dans le calcul des portées des boulets, il est inutile d'avoir égard à la résistance de l'air.

L'effet de cette résistance seroit encore à proportion bien plus grand, si la poudre imprimoit plus de vitesse aux boulets; par exemple, si la vitesse initiale étoit de 3500 pieds par seconde, la portée dans l'air ne seroit que la 23.<sup>e</sup> partie de ce qu'elle auroit été dans le vide.

*PORTÉES d'un boulet qui partiroit avec la même vitesse sous différens angles d'élévation.*

Dans la Table suivante, je suppose un boulet de 24, partant successivement sous cinq angles d'élévation différens avec une vitesse de 1800 pieds par seconde. J'ai marqué dans la seconde colonne les portées dans l'air, & dans la troisième, les rapports qu'auroient entr'elles ces portées, si le mouvement se faisoit dans le vide.

ANGLES D'ÉLEVATION.	PORTÉES DANS L'AIR.	RAPPORTS DES PORTÉES dans le vide.
15 degrés . . . .	. . . . 1950 <sup>toises</sup> . .	. . . . 1054 <sup>toises</sup>
30 . . . . .	. . . . 2235 . . . .	. . . . 1825
45 . . . . .	. . . . 2108 . . . .	. . . . 2108
60 . . . . .	. . . . 1700 . . . .	. . . . 1825
75 . . . . .	. . . . 950 . . . .	. . . . 1054

On fait que dans le vide, les portées d'un boulet qui partiroit avec la même vitesse sous différens angles d'élévation, seroient proportionnelles aux sinus du double de ces angles; la même loi

auoit encore lieu à peu près dans l'air, si la vîtesse initiale du boulet étoit fort petite; mais dans les grandes vîtesses, le rapport des portées est totalement changé. Par exemple, on voit dans la Table que je viens de donner, que la portée de 15 degrés est plus que double de celle de 75 degrés, & cependant ces deux portées seroient égales, si le mouvement se faisoit dans le vide.

Notre Table montre encore que l'angle de 45 degrés n'est pas celui qui donne la plus grande portée, comme on le croit communément; mais ceci mérite d'être examiné avec quelque détail.

*DE l'angle de la plus grande portée.*

Si on vouloit déterminer cet angle avec une grande précision, il faudroit se servir des équations dont j'ai fait usage dans la construction des Tables précédentes; mais cette précision n'étant pas nécessaire dans une pareille recherche, j'ai cru qu'il suffiroit d'employer la première approximation, quoique beaucoup moins exacte; on a par cette approximation,

$$y = x \left( \tan. e + \frac{a}{2h \cos. e} \right) - \frac{aa}{2h} \left( \frac{1}{\cos. e} - 1 \right)$$

supposant  $y = 0$ , & cherchant ensuite le *maximum* en faisant varier  $e$ , on trouvera l'équation

$$\frac{1}{\sin. e^2 + \frac{a \sin. e}{2h}} = \log. \left( 1 + \frac{2h}{a \sin. e} \right), \text{ par laquelle}$$

on déterminera l'angle de la plus grande portée.

Si dans cette expression, on suppose  $a = \infty$ , c'est-à-dire; la résistance nulle, on trouvera  $\sin. e^2 = \frac{1}{2}$  ou  $e = 45$  degrés, ce qu'on savoit déjà.

Si  $h = \infty$ , on aura  $e = \frac{1}{\infty}$ , c'est-à-dire, qu'en supposant la vîtesse initiale infiniment grande, la direction qui donneroit la plus grande portée, se confondroit presque avec l'horizontale.

Je joins ici une Table, dans laquelle on trouvera les angles de la plus grande portée pour différentes vîtesses d'un boulet de vingt-quatre.

VITESSES INITIALES.	ANGLES de la plus grande PORTÉE.
300 <sup>pi</sup> par 1 <sup>re</sup> ....	42 <sup>d</sup> 10'
600.....	36. 30.
1000.....	33. 0.
1200.....	31. 40.
1500.....	30. 10.
1800.....	28. 50.
2000.....	28. 10.

Je terminerai cet article par le détail d'une expérience que j'ai faite à Brest avec une pièce de 6, pointée alternativement à 45 & à 30 degrés, & chargée de trois livres de poudre. J'ai fait tirer trois coups sous chacun des deux angles d'élévation; la portée moyenne sous l'angle de 45 degrés, a été à peu près de 1590 toises, & sous l'angle de 30 degrés, elle a été de 1700 toises: maintenant, si on cherche par les équations ci-dessus la vitesse qui répond à la portée de 1590 toises sous l'angle de 45 degrés, on trouvera 2050 pieds par seconde, & si après cela on cherche la portée sous l'angle de 30 degrés qui répond à une vitesse initiale de 2050 pieds par seconde, on trouvera 1715 toises, ce qui est à peu près la portée qu'a eu le boulet de 6, pointé sous cet angle de 30 degrés.

Au reste, je remarquerai que cette expérience n'a pas été faite avec assez d'exactitude pour qu'on puisse en conclure avec précision l'effet de la résistance de l'air, elle prouve seulement qu'en effet l'angle de 45 degrés n'est pas celui qui donne la plus grande portée.

#### *PORTÉES de But-en-blanc.*

On appelle ordinairement portée de *but-en-blanc*, la partie de la ligne décrite par les boulets, qui ne diffère pas sensiblement de la ligne droite; mais cette définition est absolument vague; pour lui donner un sens déterminé, supposons qu'on demande la

264 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

distance après laquelle un boulet jeté horizontalement avec une vitesse donnée, sera descendu d'une petite hauteur donnée : pour résoudre cette question, on se servira de l'équation

$y = \frac{a^2}{2h} \left( 1 + \frac{x}{a} - c \frac{x^2}{a^2} \right)$ , qu'il est facile de tirer de la première approximation.

Par le moyen de cette équation, j'ai déterminé les distances après lesquelles les boulets de différens calibres partis avec une vitesse de 1800 pieds par seconde, seront descendus de la hauteur de 24 pieds : la Table suivante donne ces distances.

CALIBRES DES PIÈCES.	DISTANCES après lesquelles les boulets sont descendus de la hauteur de 24 pieds.
48.....	2111 <sup>pieds</sup>
36.....	2081
24.....	2051
18.....	2033
16.....	2022
12.....	2007
8.....	1976
6.....	1951
4.....	1907

Voici encore par rapport aux premiers instans du mouvement des boulets, une recherche assez importante à faire; il s'agit de trouver l'espace après lequel les boulets ont perdu une partie donnée de leurs vitesses initiales. Pour trouver cette perte de vitesse, on

peut se servir de l'équation  $u = h c \frac{x}{a^2}$  dans laquelle  $u$  est la vitesse du boulet lorsqu'il a parcouru la distance  $x$ , &  $h$  est la vitesse initiale. J'ai calculé dans la Table suivante, les espaces que les boulets de différent calibre doivent parcourir pour perdre la dixième & la cinquième partie de leurs vitesses.

CALIBRES

CALIBRES des PIÈCES.	DISTANCES	
	APRÈS LESQUELLES les boulets ont perdu la 10. <sup>e</sup> partie de leur vitesse initiale.	DISTANCES APRÈS LESQUELLES ils ont perdu la 5. <sup>e</sup> partie de cette vitesse.
48.....	982 <sup>pieds</sup> .....	2060 <sup>pieds</sup> .....
36.....	863 .....	1829 .....
24.....	754 .....	1598 .....
18.....	685 .....	1451 .....
16.....	658 .....	1396 .....
12.....	599 .....	1268 .....
8.....	523 .....	1108 .....
6.....	475 .....	1006 .....
4.....	415 .....	877 .....

*PORTÉES des boulets de différens calibres qui partiroient  
avec la même vitesse sous le même angle d'élévation.*

Voici une manière de déterminer ces différentes portées en ne faisant usage que de la Table première, & sans recourir aux équations générales, dont les calculs seroient longs & pénibles. Pour cela on se servira du Théorème suivant, dont la démonstration est facile à déduire de nos équations générales. *Lorsque deux boulets de différent calibre jetés sous le même angle d'élévation dans un fluide de densité uniforme, ont des vitesses initiales, proportionnelles aux racines quarrées de leur diamètre, ils décrivent des courbes semblables, & leurs portées sont proportionnelles à leur diamètre : & en général, lorsque les vitesses de deux globes jetés sous le même angle d'élévation sont en raison inverse des racines quarrées des constantes qui expriment leurs résistances, leurs portées sont en raison inverse de ces constantes.* En se servant de ce Théorème, on n'aura besoin que de simples analogies & d'interpolations pour conclure de la Table première, les portées des boulets quelconques : il faut cependant remarquer que dans

# 266 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

cette Table on a supposé une variation de densité à différentes hauteurs de l'atmosphère, au lieu que notre Théorème suppose une densité uniforme; il suit de-là que ce Théorème n'est pas exactement applicable à notre hypothèse, mais il est facile de voir que les erreurs qui en résulteront, ne peuvent jamais être considérables.

Voici une Table qui donne les portées des boulets de tous les calibres pour deux différentes vitesses initiales, l'angle d'élevation étant de 45 degrés.

CALIBRES des PIÈCES.	PORTÉES POUR UNE VITESSE de 1500 pieds par 1".	PORTÉES POUR UNE VITESSE de 1800 pieds par 1".
48.....	..... 2221 <sup>toises</sup> .....	..... 2490 <sup>toises</sup> .....
36.....	..... 2083 .....	..... 2324 .....
24.....	..... 1899 .....	..... 2108 .....
18.....	..... 1781 .....	..... 1968 .....
16.....	..... 1731 .....	..... 1912 .....
12.....	..... 1610 .....	..... 1776 .....
8.....	..... 1463 .....	..... 1607 .....
6.....	..... 1362 .....	..... 1492 .....
4.....	..... 1234 .....	..... 1348 .....

On trouve dans le Livre déjà cité de M. Surirei de Saint-Remy, des expériences sur les portées des boulets de différent calibre, faites par M. Dumetz, Lieutenant général d'Artillerie; les rapports de ces portées sont assez différens de ceux que nous venons de donner dans la dernière Table: mais cette différence ne prouve rien autre chose, sinon que les vitesses initiales des boulets ne sont pas les mêmes pour tous les calibres.

Voici ces expériences avec les vitesses initiales conclues de mes équations.

CALIBRES DES PIÈCES.	PORTÉES À 45°.	VITESSES INITIALES.
24.....	.... 2250 ....	... 2038 <sup>piés.</sup> par 1".
16.....	.... 2020 ....	... 2014
12.....	.... 1870 ....	... 1995
8.....	.... 1660 ....	... 1928
4.....	.... 1520 ....	... 2380

Je finirai ces recherches sur le mouvement des boulets par une question particulière sur l'effet du vent pour augmenter ou diminuer les portées. Supposons qu'une pièce d'Artillerie, pointée à l'angle d'élévation  $DAC$ , imprime à un boulet une vitesse  $AD$ , tandis que l'air a une vitesse de  $C$  vers  $A$ , représentée par  $BD$ , on demande la portée de ce boulet.

Fig. 3.

Pour la trouver, je remarque que  $AB$  sera la vitesse & la direction relatives du boulet par rapport à l'air dans lequel il se meut; par conséquent en cherchant par ma solution générale, la portée qui convient à la direction & à la vitesse  $AB$ , on aura la portée relative du boulet dans l'air: si on retranche de cette portée, l'espace que l'air aura parcouru dans la direction & avec la vitesse  $BD$  pendant tout le temps du mouvement du boulet, on aura la vraie distance à laquelle ce boulet sera parvenu par rapport au point fixe  $A$ .

Pour en donner un exemple, supposons qu'un boulet de 24 parte avec une vitesse de 1800 pieds par seconde sous un angle de 15 degrés, & que l'air se meuve en sens contraire avec une vitesse de 40 pieds par seconde, on trouvera d'abord que la portée dans l'air tranquille seroit de 1950 toises comme dans la Table (page 261). On trouvera ensuite que la portée relative dans l'air en mouvement, sera de 1972 toises; & comme l'air parcourra dans le même temps à peu près 112 toises, il s'ensuit que la portée réelle par rapport au point  $A$ , sera de 1972 toises — 112 toises = 1860 toises, & par conséquent le vent aura diminué la portée de ce boulet d'environ 90 toises.

Ll·ijj



On pourroit encore se proposer beaucoup d'autres questions sur le mouvement des boulets, telle que celle-ci, par exemple, de déterminer les portées de boulets de même diamètre & de différentes pesanteurs; on pourroit aussi chercher combien un changement donné dans la densité de l'atmosphère peut augmenter ou diminuer les portées, &c. &c. Il sera facile de résoudre toutes ces questions en se servant de la première Table & en employant le Théorème dont j'ai fait usage (*page 265*).

#### DU MOUVEMENT DES BOMBES.

Quoique ce que j'ai dit sur les portées des boulets puisse s'entendre également des portées des bombes, j'ai cru cependant qu'il seroit utile d'appliquer séparément le calcul au mouvement de cette seconde espèce de projectiles; mais je ne m'occuperai que de deux seules questions qui m'ont paru les plus importantes, je comparerai d'abord entr'elles les portées des bombes de différens poids & de même diamètre, je chercherai ensuite les angles des plus grandes portées.

#### *PORTÉES des Bombes de différens poids & de même diamètre.*

Je donne dans la Table suivante, les portées de deux bombes de différente espèce, que je suppose partir avec des vitesses égales. La première espèce est notre bombe ordinaire, dont le diamètre est de 11 pouces 8 lignes, & qui pèse toute chargée environ 140 livres; la seconde seroit une bombe, qui n'ayant que le même diamètre, pèseroit cependant 175 livres, ce qui est très-possible lorsqu'on ne veut pas laisser dans la bombe un beaucoup plus grand vide qu'il n'est nécessaire pour contenir la poudre qui peut la faire éclater.

VITESSES INITIALES.	PORTÉES D'UNE BOMBE de 140 <sup>z</sup> de poids & de 11 <sup>P</sup> 8 <sup>l</sup> de diamètre.	PORTÉES D'UNE BOMBE de 175 <sup>z</sup> de poids & de 11 <sup>P</sup> 8 <sup>l</sup> de diamètre.
600 <sup>pieds</sup> .....	1020 <sup>toises</sup> .....	1117 <sup>toises</sup> .....
700 .....	1200 .....	1335 .....
800 .....	1360 .....	1535 .....
900 .....	1520 .....	1722 .....
1000 .....	1660 .....	1900 .....
1100 .....	1788 .....	2059 .....
1200 .....	1906 .....	2190 .....

On voit par cette Table, que de deux bombes qui ont même vitesse initiale & même diamètre, celle qui a une plus grande pesanteur, a aussi une plus grande portée; mais d'un autre côté il est plus que probable que cette bombe plus pesante acquiert moins de vitesse par l'explosion de la poudre, d'où il suit qu'il y a une certaine masse que doit avoir une bombe d'un diamètre donné, pour qu'avec la même quantité de poudre elle parvienne à la plus grande distance possible.

Sans entrer dans de longs détails sur cette question, je vais rapporter une expérience qui tendroit à prouver que dans les portées fort considérables, notre bombe ordinaire du poids de 140 livres n'a pas la propriété dont je viens de parler, c'est-à-dire qu'elle n'est pas la bombe de la plus grande portée possible.

L'expérience dont il s'agit, a été faite à Mahon par des Officiers d'Artillerie, Anglois; on a trouvé qu'un mortier marin pointé à 45 degrés d'élévation & chargé de 27 livres & demie de poudre, jetoit à la distance de 2090 toises, une bombe du poids de 185 livres & d'un diamètre de 11 pouces 10 lignes\*. Si on cherche par nos équations, la vitesse initiale qui répond à

\* On a réduit les mesures & poids Anglois, aux mesures & poids François.

# 270 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

cette portée, on trouvera 1140 pieds par seconde; on trouvera aussi par la Table ci-dessus, que pour que notre bombe du poids de 140 livres parvint à cette distance de 2090 toises, elle devoit avoir une vitesse initiale de 1380 pieds par seconde: or il me semble qu'il faudroit admettre une hypothèse bien extraordinaire sur la loi de la force expansive de la poudre pour trouver que la même quantité de poudre qui auroit imprimé une vitesse de 1140 pieds par seconde à la première de ces bombes, en imprimeroit à la seconde une de 1380 pieds; cette raison me porte à croire que si on donnoit à nos bombes ordinaires plus de pesanteur sans augmenter leur diamètre, la même quantité de poudre leur donneroit de plus grandes portées.

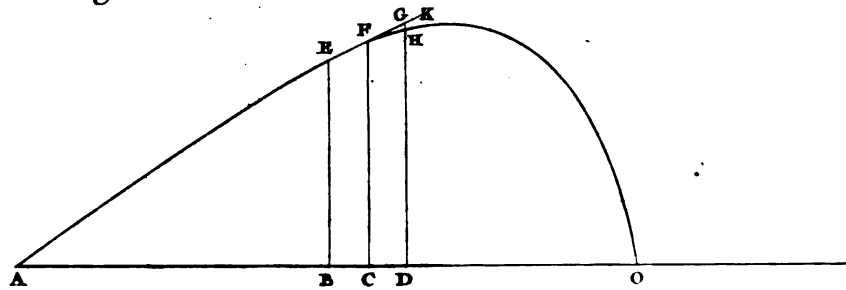
## *ANGLES de la plus grande portée.*

Je me suis servi de l'équation trouvée ci-dessus (page 262) pour former la Table suivante, dans laquelle je suppose notre bombe du poids de 140 livres, partant avec différentes vitesses.

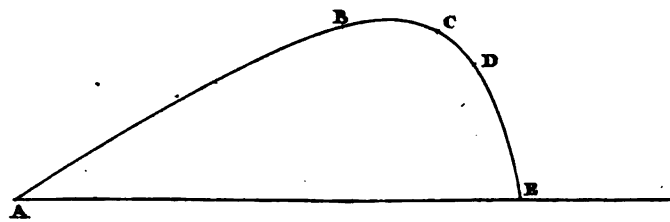
VITESSES INITIALES.	ANGLES DES PLUS GRANDES portées.	PORTÉES SOUS L'ANGLE de 45 degrés.	LES plus grandes PORTÉES.
600 <sup>pieds</sup> par 1"	... 37 <sup>d</sup> 15'...	... 1020 <sup>toises</sup>	... 1035 <sup>toises</sup>
700 .....	... 36. 20....	... 1198...	... 1225
800 .....	... 35. 20....	... 1365...	... 1405
900 .....	... 34. 35....	... 1518...	... 1576
1000 .....	... 33. 55....	... 1659...	... 1739
1100 .....	... 33. 20....	... 1798...	... 1894

Nos mortiers marins qui sont fondus sur leurs semelles, avec lesquelles ils font un angle de 45 degrés, ont des portées de 18 à 19 cents toises; on voit par notre Table, qu'en réduisant cet angle à 33 ou 34 degrés, la portée seroit augmentée d'environ 100 toises.

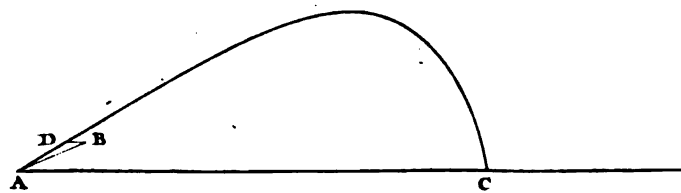
*Fig. 1.*



*Fig. 2*

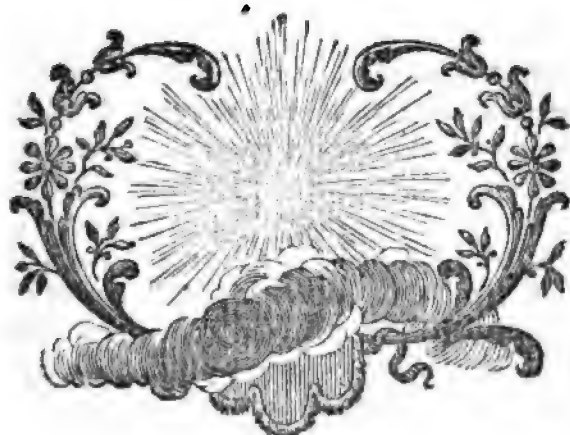


*Fig. 3*





Voilà les recherches sur la Ballistique, qui m'ont paru mériter le plus l'attention de ceux qui s'occupent de la science de l'Artillerie ; il résulte de ces recherches, que la résistance de l'air change entièrement la courbe décrite par les boulets & par les bombes lorsque ces projectiles sont chassés par de fortes charges de poudre, & qu'en général les règles de la Ballistique ordinaire ne donnent que des idées fort imparfaites des effets de nos pièces d'Artillerie.



*M É M O I R E*  
*SUR LA*  
*PIERRE APPELÉE TRIPOLI.*

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

**L**A pierre connue sous le nom de *Tripoli*, est utile pour polir les pierres dures, les verres & les glaces, &c. Cet usage en a fait en France un objet de commerce.

Le tripoli tire vraisemblablement son nom de cette ville de Barbarie, aux environs de laquelle on le trouve, & d'où on le tiroit autrefois.

Nous avons des carrières de tripoli en France \* ; on en tire beaucoup de celles de Polligné en Bretagne, de Mepat, village à sept lieues de Riom, &c. Cependant à Paris le tripoli de Venise est particulièrement estimé pour le poli des verres. Nous croyons devoir avertir ici que quoique l'on donne à cette pierre, le nom de *tripoli de Venise*, il n'y en a pas aux environs de cette ville, & que les Vénitiens qui nous l'envoient, & qui s'en servent beaucoup pour le poli de leurs glaces, le tirent des environs de Corfou, d'une montagne appelée *Épiro*, proche un bourg connu sous le nom de *Santi-Quarenta*.

Plusieurs Auteurs ont parlé du tripoli ; nous rapporterons ce qu'ils en auront dit à mesure que nous croirons leurs observations propres à appuyer un sentiment sur la formation de cette pierre. Voyez M. Pott, *Lithogognosis*, Cont. Tom. II. pag. 84.

Le tripoli est léger ; il doit avoir peu de solidité, de consistance, les parties en sont peu liées, principalement quand on le tire de la carrière.

Il se sépare & se divise dans l'eau, mais la dissolution n'est

\* Voyez le Mémoire de M. Guettard, sur le Tripoli, année 1755, page 177.

pas complète, puisqu'après peu de temps il se précipite : la langue tient à cette pierre, & y recoit une saveur de glaise, caractère qui se fait reconnoître aussi à l'odorat lorsqu'on la frotte ; les acides agissent peu ou point sur elle ; enfin le tripoli se vitrifie à un feu violent.

Ludwig en compte plusieurs espèces ; nous nous en tenons à ces caractères pour déterminer celles de ces pierres qui méritent d'être rangées dans la classe des tripolis.

La couleur est ordinairement d'un jaune plus ou moins foncé ; mais des terres de différentes natures & hétérogènes peuvent faire varier celle qui est propre au tripoli. Nous ferons voir dans un moment que cette couleur peut changer suivant des circonstances particulières à l'essence & à la formation de cette pierre.

D'habiles Chimistes ont soumis ces pierres à des épreuves & à celles d'un feu continu ; ils en ont tiré des conséquences sur la nature de la pierre. C'est d'après ces examens que la plupart l'ont regardée comme argileuse & vitrifiable ; cependant plusieurs l'ont rangée dans des classes différentes, & M. Pott en examinant les vrais caractères de cette pierre, a montré en quoi quelques-uns s'étoient trompés en la classant.

Cramer qui la regarde comme réfractaire, lui donne pour origine, une marne durcie ou une terre qui lui est particulière ; *Docim.*, page 15. *Lugd. Bat.* 1739, in-12.

Wallerius pense que le fond de la pierre est un sablon minéral ; *Tom. I.*, pag. 58 & 59.

M. Von-Linné range le tripoli avec les marnes ; d'autres auteurs l'ont cru une craie. Voyez *Neumann, Praelect. Chymic.* part. V, pag. 1815. *Mémoires académiques de M. Homberg*, année 1712, page 193. *Mercatus metallotheca*, pag. 23. in-fol. 1719, &c.

Bromel croit que la pierre est formée d'une argile ou d'un limon fin & qui lui est particulier : ce sentiment est adopté par M. Pott. C'est celui qui s'accorde avec les expériences que cet habile Chimiste a faites, & qui est aussi confirmé par les obser-

*Mém.* 1769.

M m



ventions suivantes. Mais qui est-ce qui a fait un tripoli de cette argile ou de cette pierre argileuse ? Cette argile a-t-elle éprouvé des changemens ? Quels sont ceux qu'elle a soufferts ? C'est ce que l'examen des carrières de tripoli m'a paru annoncer. J'ai cru que depuis ces observations, on pouvoit décider avec sûreté la véritable origine.

M. Gardeil (*Mémoire des Savans étrangers, tome III, page 19*) a déjà donné la description de la carrière de Polligné en Bretagne. Il imagine qu'elle est le produit du changement que des arbres, des bois fossiles ont éprouvés en terre.

M. Pott n'y découvre en l'examinant chimiquement, aucune marque qui puisse par les produits indiquer que cette terre ait été formée de débris de végétaux.

M. Guettard, dans son *Mémoire* déjà cité sur le *Tripoli, année 1755*, ne croit pas non plus que ce soient des végétaux qui servent toujours à former le tripoli.

Quelques Naturalistes enfin ont cru que cette pierre pourroit avoir souffert les effets d'un feu souterrain. *Lémery, Dict. au mot Alana, page 21.*

Examinons encore plus scrupuleusement cette carrière, arrêtons-nous à voir les pierres des environs, comparons cette carrière avec une qui éprouve tous les jours des changemens par un effet connu, & nous tirerons des conséquences sur la nature de la pierre de tripoli & sur son origine.

Les pierres des environs de Menat, celles de Polligné, près des carrières où se trouve le tripoli, sont schisteuses non liées : ce schiste est jaune ou rouge & plus ou moins rouge ; cette dernière couleur est produite, comme nous le verrons, par une ocre qui prend une teinte rouge plus ou moins vive suivant qu'elle a souffert plus ou moins de chaleur ; car des pierres, particulièrement dans la carrière de Polligné, annoncent le feu qui y a passé : elles sont réduites en écume plus ou moins légère ; ce sont de vraies pierres brûlées.

Rien ne peut laisser d'incertitude sur le feu qui a été aux

environs de cette carrière ; des pierres ont été fondues , & on ne trouve le tripoli qu'aux environs de l'endroit où la présence du volcan est la plus apparente \*.

A Polligné, la partie de la carrière qu'on a choisie préféablement pour l'usage, semble à la vérité avoir été lavée par les eaux , & s'être formée du dépôt des parties les plus légères & les plus fondues. C'est aussi le sentiment de M. Guettard , *année 1755, p. 188* ; mais c'est la même pierre qui a souffert comme les voisines, la chaleur du feu souterrain.

Je crois devoir ajouter ici que ceux qu'interrogeoit M. Grangier sur le tripoli de Menat proche Riom , lui ont dit qu'on savoit par tradition que les carrières avoient été embrasées pendant sept à huit ans ; quoique ce rapport parût peu vraisemblable à M. Grangier, ne semble-t-il pas qu'il ait été fondé sur la découverte de quelques morceaux brûlés qui lui auront échappé , & qu'il n'a pas seulement été établi sur la couleur noire qu'ont quelques bancs de cette carrière. (*Voyez Mém. Acad. an. 1755, p. 183*), d'autant que M. Guettard parle de pierres brûlées , trouvées à une demi-lieue de Riom , & par conséquent près de la carrière de tripoli.

Outre ces pierres brûlées qui dénotent l'effet des feux souterrains , M. Grangier a retiré du tripoli de Riom , du soufre & du fer. J'ai obtenu de celui de Polligné, du soufre & de l'alun, que l'on fait être des produits de volcan. *Voyez Mém. 1755, page 189 ; & Mémoire sur l'Alun, année 1766, page 1.*

Dans les laboratoires, en couvrant de terre la glaise ou le schiste glaiseux, & l'exposant au feu dans des vaisseaux fermés, on parvient à faire une espèce de tripoli qui ressemble au mauvais de Bretagne ; ce qui suffit, je crois, pour convaincre qu'avec de nouvelles épreuves, on pourroit parvenir à l'imiter plus parfaitement.

\* Des morceaux tirés de la carrière de Polligné qu'a bien voulu me procurer M. Abeille, Correspondant de cette Académie, ne laissent aucun doute sur le feu qui les a attaqués ;

M. Abeille a déjà montré à l'Académie, des pierres tirées de Polligné qui prouvoient qu'il y avoit eu dans cet endroit un volcan.

L'Italie fournit aussi des bandes argileuses brûlées par les feux souterrains, dont on pourroit faire quelque usage, & quelquefois ces argiles renferment des végétaux.

Le tripoli est donc une pierre brûlée; confirmons ceci par une preuve qui nous servira aussi à assurer la nature de la pierre dont a été fait le tripoli. Nous trouverons ces preuves dans l'examen des pierres voisines des carrières de tripoli. M. Guettard dans son Mémoire sur le tripoli, a déterminé la nature de cette pierre, & j'ajouterai seulement ici à ce qu'il en a dit, une observation pour joindre à celles qu'on trouve dans son ouvrage.

La plupart des carrières de tripoli que j'ai vues, m'ont paru avoir été brûlées, mais aucune ne marque mieux le feu qui a attaqué certaines de ces carrières, & particulièrement celle de Polligné, aucune ne peut mieux déterminer la nature de cette dernière avant le changement qu'elle a éprouvé par le feu, qu'en la comparant avec une carrière des environs de Saint-Étienne en Forez, qu'on connoît sous le nom de *Saint-Genis*, où le feu est depuis plus de cent ans. *Voyez Mémoires de l'Académie, année 1765, page 389.*

On sait que les pierres de Saint-Étienne & d'une partie du Forès, sont de schiste; l'ardoise ou la croûte de charbon de terre, est couverte d'une pierre argileuse ou d'un schiste jaune ou rougeâtre lité ou non lité: cette pierre glaiseuse est aisée à distinguer aux environs de la carrière brûlée dans les endroits où le feu n'a point été. Dans le lieu qui brûle, on y trouve les mêmes pierres qu'à Polligné; certaines sont réduites en écumes, ou sont poreuses, d'autres sont vitrifiées, enfin d'autres sont tendres, se réduisent en poussière, & sont un vrai tripoli. Dans celles qui ont été brûlées, on voit une couleur plus ou moins rouge suivant qu'elles se sont trouvées contenir plus ou moins d'ocre ferrugineuse, & que le feu a développé la couleur produite par le fer.

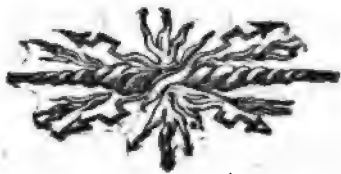
Voici donc un terrain brûlé, un schiste glaiseux qui est exposé au feu, & qui produit des pierres semblables aux carrières de tripoli de Polligné. N'est-on pas en droit de conclure qu'au moins la carrière de Polligné a été brûlée par les feux souterrains; dont il y a d'anciens vestiges dans la Bretagne, & que ce

tripoli est un schiste ou une glaise brûlée, & que peut être le meilleur, ayant besoin d'être lavé par les eaux, nous ne l'obtenons que de ce dépôt \* ?

Si ces observations étoient confirmées par plusieurs faits de la même espèce dans des carrières de tripoli, si l'on y trouvoit des marques aussi certaines de feux anciens, ne pourroit-on pas conclure que les tripolis sont formés par les volcans ? J'en ai vu plusieurs en Italie qui ne laissoient aucun doute sur leur origine. Je ne donne cependant cette idée sur la formation du tripoli que pour engager à multiplier ces observations qui seules mettront en état de n'avoir plus aucun doute sur l'origine de cette pierre.

Ces remarques doivent au moins exciter à étudier un plus grand nombre de carrières en s'attachant aux pierres voisines ; si elles ne confirment pas l'idée que j'ai cru devoir prendre sur l'origine de ces pierres, elles éclairciront la formation du tripoli \*.

\* C'est de ce tripoli le plus fin, dont on se sert pour adoucir les verres.



# M É M O I R E

## SUR LES

### PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Par M. D'ALEMBERT.

C E Mémoire sera divisé en trois articles.

Dans le premier, je donnerai une démonstration nouvelle de la composition du mouvement, démonstration qui a l'avantage d'être renfermée dans une seule proposition.

Le second article contiendra quelques éclaircissemens & remarques nécessaires pour rendre complète la démonstration que j'ai donnée du principe de la force d'inertie dans le *Tome IV de mes Opuscles mathématiques*.

Enfin dans le troisième article, je donnerai une démonstration nouvelle du principe de l'équilibre dans le levier, celle qui est donnée dans les *Mémoires de Turin, tome II*, m'ayant paru laisser quelque chose à désirer.

(Les notes que j'ai ajoutées à ce Mémoire, se trouveront à la fin, & seront indiquées par des chiffres.)

#### A R T I C L E P R E M I E R.

##### *Sur la composition du mouvement.*

Fig. 1.

(1.) Soient  $AC = a$  &  $AB = b$ , les valeurs & les directions des deux forces, par lesquelles le point ou corps  $A$  est poussé; l'angle  $CAB = \alpha$ ; & soit  $AF = z$ , la valeur & la direction de la force qui en résulte, & l'angle  $CAF = \nu$ ; soit fait à volonté l'angle  $CAc$ , dont la moitié  $CAD$  soit  $= m$ , & soient supposées deux autres puissances  $Ac = a$ ,  $Ad = b$ , semblablement placées de l'autre côté de  $AD$ . Il est clair 1.<sup>o</sup> qu'elles produiront une autre force  $Af$  égale & semblable à  $AF = z$ , & semblablement placée; 2.<sup>o</sup> que la puissance

suivant  $AD$ , résultante des deux puissances égales  $AC, Ac$ , plus la puissance suivant  $AD$  résultante des deux puissances égales  $AB, Ab$ , sera égale à la puissance suivant  $AD$  résultante des deux puissances suivant  $AF$  &  $Af$ , puisque ces puissances  $AF$  &  $Af$  équivalent chacune à  $AB$  &  $AC, Ab$  &  $Ac$ . On aura donc  $a\phi(m) + b\phi(a + m) = 2\phi(u + m)$ . Car la puissance suivant  $AD$  résultante des puissances égales  $AC$  &  $Ac$ , est évidemment égale à la valeur  $a$  de ces puissances multipliée par une fonction de l'angle  $m$ ; puisque cette puissance suivant  $AD$ , est évidemment proportionnelle à  $a$ , & qu'elle dépend de l'angle  $m$ ; & de même des deux autres  $b, 2$ .

(2.) Cela posé, si dans la *fig. 2*, on fait coïncider les deux puissances égales  $AC, Ac$ , & qu'ensuite ayant pris les angles  $B'AB$  &  $b'Ab$  égaux à un angle quelconque  $2m'$ , on suppose le point  $A$  poussé par six puissances, savoir par les deux  $AC$  &  $Ac = a$ , & par quatre puissances égales à  $b$  suivant  $AB, AB', Ab, Ab'$ , la résultante suivant  $AE$ , sera évidemment  $= 2a + b\phi m' \times \phi(a + m')$ . De plus, soient  $AF$  &  $Af$  les forces résultantes des puissances  $AB$  &  $AC, Ab$  &  $Ac$ , il est évident que la puissance résultante de  $AF$  &  $Af, AB$  &  $Ab'$  sera  $= 2\phi u + b\phi(a + 2m')$ . Or cette puissance doit être égale à la précédente; donc  $2\phi u + b\phi(a + 2m') = 2a + b\phi m' \times \phi(a + m')$ . Or on a en général, quel que soit  $m$ , (*art. 1.*)  $a\phi m + b\phi(a + m) = 2\phi(u + m)$ , ou en faisant  $m = 0$ ,  $2a + b\phi(a) = 2\phi u$ , parce que  $\phi m$  devient évidemment  $= 2$ , quand  $m = 0$ . Donc, substituant cette dernière valeur de  $2\phi u$  dans l'équation précédente, on aura après les réductions  $\phi a + \phi(a + 2m') = \phi m' \times \phi(a + m')$ , ou en faisant  $a + m' = \delta$ ,  $\phi(\delta - m') + \phi(\delta + m') = \phi m' \times \phi \delta$ . Or il est aisé de voir, par ce que j'ai démontré dans les *Mém. de Berlin*, 1750, p. 355 & suiv. qu'il faut pour satisfaire à cette condition que  $\phi(\delta - m')$  ou  $\phi a = c^{\sqrt{A}} + c - a\sqrt{A}$  (1). Donc, en considérant de plus que  $\phi a$  doit être  $= 0$ , lorsque  $a = 90^\circ$ , & doit seulement dans ce

cas être  $= 0$ , on trouvera que  $\sqrt{A} = \sqrt{-1}$  &  $\phi a = 2 \cos. a$ .

(3.) Maintenant, puisqu'en général on a  $\frac{a \phi m + b \phi (a + m)}{\phi (u + m)}$   
 $= z$ , quel que soit  $m$ , & que  $\phi m = 2 \cos. m$ ; donc en  
 prenant successivement  $m$  quelconque &  $m = 0$ , on aura  

$$\frac{a \cos. m + b \cos. (a + m)}{\cos. (u + m)} = \frac{a + b \cos. a}{\cos. u} \text{ ou } a \cos. m \times \cos.$$

$$u + b \cos. u (\cos. a \cos. m - \sin. a \sin. m) = a (\cos. u$$

$$\times \cos. m - \sin. u \sin. m) + b \cos. a (\cos. u \cos. m -$$

$$\sin. u \sin. m); \text{ donc en réduisant, on aura } \frac{a \sin. u}{b} = \sin. a \cos. u -$$

$$\sin. u \cos. a; \text{ ou } \sin. u : \sin. (a - u) :: b : a, \text{ ce qui donne}$$

$$\text{la direction de la puissance résultante de } AC \text{ \& de } A B.$$

$$\text{A l'égard de la valeur de } z, \text{ elle est égale, comme on vient}$$

$$\text{de le voir, à } \frac{a}{\cos. u} + \frac{b \cos. a}{\cos. u}; \text{ \& à cause de } \frac{\cos. a}{\cos. u} =$$

$$\frac{\sin. a}{\sin. u} - \frac{a}{b \cos. u}, \text{ on aura } z = \frac{b \sin. a}{\sin. u}. (2).$$

## ARTICLE II.

### Sur la force d'inertie.

{1.) J'ai fait voir dans le quatrième Volume de mes *Opus-  
 cules mathématiques*, page 349, que l'espace  $y$  décrit durant  
 le temps  $x$  par un corps abandonné à lui-même, doit être  
 représenté par l'équation  $y = \frac{1}{2} (a + x) - \frac{1}{2} a$ ,  $a$  étant  
 une constante telle que  $\frac{d \frac{1}{2} a}{d x} =$  la vitesse initiale  $a$ . Cette  
 équation est tirée, comme on l'a vu au même endroit, de  
 l'équation différentielle  $\frac{d dy}{d x} = \phi \left( \frac{dy}{d x} \right)$ , ou (en faisant  
 $\frac{dy}{d x} =$  à la vitesse  $u$ )  $du = dx \phi u$ .

(2.) II

(2.) Il résulte d'abord de ces formules, qu'un corps mis en mouvement, & abandonné à lui-même, ne peut suivre d'autres loix que celles qui sont contenues dans les équations précédentes; ce qui exclut déjà une infinité de loix qu'on auroit pu imaginer, & dont il auroit paru difficile de prouver l'impossibilité avant notre démonstration.

(3.) Nous avons de plus exigé cette condition, que  $a = 0$ ; rende  $y = 0$ , ce qui exclut encore une infinité d'autres loix. Mais on peut douter si cette seconde condition est absolument nécessaire; en effet, il est aisé de voir que si  $\phi u$  renferme un terme de cette forme  $Bu^n$ ,  $n$  étant  $< 1$ ,  $a = 0$  ne rendra pas  $y = 0$ ; conclura-t-on de-là que cette loi est impossible? Il paroîtroit s'ensuivre qu'un corps ne doit jamais éprouver dans un milieu résistant, une altération de mouvement proportionnelle à une fonction de la vitesse qui renfermeroit un terme de la forme  $B'u^n$ ,  $n$  étant  $< 1$ . Or cette assertion seroit pour le moins très-hazardée.

(4.) Il faut donc pour prévenir cette objection, tâcher de prouver que quand un corps est mis en mouvement, & abandonné à lui-même, l'équation qui représente son mouvement, ne sauroit être  $du = dx\phi u$ ,  $\phi u$  représentant une fonction de la vitesse. Par ce moyen, on répondra non-seulement à l'objection proposée, mais encore à toutes celles qu'on pourroit faire d'ailleurs (3), dans l'hypothèse que  $\phi u$  ne fût ni  $= 0$ , ni égale à une constante, cas particulier que nous examinerons ensuite.

(5.) Il est d'abord évident que le rapport initial de  $dy$  à  $dx$  étant  $= a$ , le corps en vertu de la seule puissance impulsive, se mouvroit de lui-même uniformément dans le premier instant, si ce mouvement n'étoit altéré par une cause quelconque, résidente dans le corps même. Donc en général on peut considérer le cas de  $du = dx\phi u$ , comme si d'une part le corps tendoit à se mouvoir uniformément par l'effet naturel de la puissance impulsive, & que de l'autre une cause quelconque, différente de la puissance impulsive, cause résidente dans le corps, & proportionnelle à une fonction de la vitesse, tendit à altérer le mouvement uniforme. Cette expression *résidente dans le corps*, qui



peut-être seroit peu exacte & illusoire dans tout autre cas, devient ici nécessaire, puisque (*hyp.*) il n'y a point de cause extérieure d'altération de mouvement. Il faut donc supposer ici une cause motrice qui réside dans le corps, & qui n'ayant point d'action tant que le corps est en repos, ne reçoive son activité & la direction, que de la puissance impulsive. Or c'est ce qui ne paroît pas facile à concevoir, & qu'on peut même regarder comme une supposition absurde, sur-tout si cette cause motrice tend à retarder le mouvement du corps, comme il est assez naturel de le supposer d'après l'expérience, qui nous fait voir que les corps perdent peu à peu leur mouvement; car alors la cause motrice recevrait de la puissance impulsive, une direction contraire à cette puissance même, ce qu'il est ridicule d'imaginer. En second lieu, soit que la cause motrice résidente dans le corps, tende à retarder ou à accélérer son mouvement, soit cette force  $= \pm \phi a$ ; & comme (*hyp.*) cette force n'a point d'action tant que le corps est en repos, il s'ensuit qu'au commencement du mouvement, on doit regarder le corps comme animé par la force impulsive qui tend à lui donner la vitesse  $a$ , & en même temps par deux forces égales & contraires  $+\phi a$  &  $-\phi a$ , qui le conserveroient en repos, si elles agissoient seules. Or supposons que de ces deux forces, la première  $+\phi a$  agisse pour altérer le mouvement du corps, la seconde  $-\phi a$  agisse pour l'altérer en sens contraire, & par conséquent le corps conservera la vitesse uniforme, au moins dans le premier instant. Quand un corps se meut dans un fluide qui résiste comme une fonction de la vitesse, ou en général quand il éprouve une cause extérieure quelconque de résistance, comme le frottement ou quelque autre semblable, on peut de même le considérer au commencement du mouvement comme animé d'abord de la vitesse impulsive  $a$ , & ensuite de deux forces égales & contraires  $+\phi a$  &  $-\phi a$ ; celle-ci détruit en partie le mouvement du corps, & l'autre  $+\phi a$  est employée à vaincre la résistance extérieure; mais quand il n'y a point de milieu environnant, la force  $+\phi a$  ne peut agir que sur le corps, & lui restituer le mouvement qu'il a perdu, en sorte que ce

mouvement redevient nécessairement uniforme au premier instant, & par une conséquence nécessaire, dans les instans suivans.

(6.) Les mêmes raisonnemens qu'on vient d'employer pour prouver que la cause qui altère le mouvement ne peut être une fonction de la vitesse, serviront aussi à prouver qu'elle ne peut être constante. Donc il ne reste d'autre supposition que celle de  $\phi'' = 0$ . Donc le mouvement est naturellement uniforme.

(7.) Je fais que la plupart des Géomètres n'ont regardé cette vérité que comme une vérité d'expérience; mais j'avoue que je ne puis être en cela de leur avis. L'observation journalière, bien loin de prouver l'uniformité naturelle du mouvement, semble bien plutôt prouver qu'il tend à se ralentir de lui-même; & ce n'est qu'en envisageant de plus près la question, qu'on peut s'assurer que l'observation nous trompe à cet égard, & que le mouvement ne peut être altéré que par des causes extérieures & étrangères.

### ARTICLE III.

#### *Sur l'équilibre.*

(1.) Soient supposées deux puissances égales  $bq, DF$ , Fig. 4.  
appliquées en sens contraires à deux points quelconques  $D, b$ ,  
d'un levier indéfini. Je dis qu'on ne sauroit placer en aucun point  $e$   
une puissance équivalente à ces deux-là.

Car si cela se pouvoit, imaginons deux autres puissances  $DG, bg$  égales & contraires aux deux puissances données. Il est visible qu'en prenant  $DE = de$ , on aura une puissance  $EL$  égale & parallèle à la puissance  $el$ , dirigée dans le même sens & équivalente aux deux puissances  $DG, bg$ . Or les quatre puissances égales & contraires  $bq, bg, DG, DF$  sont évidemment en équilibre; donc les puissances équivalentes  $el, EL$  devroient l'être aussi, ce qui est impossible, puisqu'elles sont dirigées dans le même sens.

(2.) Soient maintenant quatre puissances égales  $DF, df$ , Fig. 5.  
 $bq, BQ$  appliquées à un levier, &  $BD = bd$ ; je dis qu'elles  
N n ij

Fig. 5.

seront en équilibre. Car soit  $C$  le milieu du levier ; s'il n'y avoit pas équilibre, il y auroit en  $C$  une puissance  $CR$  résultante de l'action des puissances données ; & il est visible qu'au lieu de cette puissance  $CR$  on pourroit en supposer deux autres  $el, e'l$ , qui lui seroient équivalentes, & qui le seroient de manière que la puissance  $el$  équivaleroit aux puissances  $DF, bq$  ; ce qui est impossible par le Lemme précédent. Donc la puissance  $CR = 0$ . Donc, &c.

(3.) Donc si on suppose les points  $B$  &  $b$  réunis en  $C$ , il est clair que la puissance équivalente aux deux  $DF, df$ , sera  $= 2 DF$  (4).

(4.) Cette proposition étant une fois démontrée, il ne reste plus de difficulté pour établir la loi générale de l'équilibre ; le Problème se réduit, comme on peut le voir dans les *Mémoires de Turin*, tome II, page 321, à un Problème purement analytique, d'où l'on tire la proposition fondamentale du levier, avec la plus grande facilité (5).

*NOTES relatives au Mémoire ci-dessus.*

(1) Il résulte des *Mémoires de Berlin*, à l'endroit cité, que  
 $\varphi \delta = M c^{\delta \vee A} + g c - \delta \vee A$  ;  $\varphi m' = M c^{m' \vee A} + g c - m' \vee A$  ;  
 $\varphi (\delta + m') = M M c^{(\delta + m') \vee A} + g g c - (\delta + m') \vee A$  ;  
 $\varphi (\delta - m') = M g c^{(\delta - m') \vee A} + M g c - (\delta - m') \vee A$  ;  
d'où  $M M = M = M g$  ;  $g g = g = M g$ , & par conséquent  
 $M = 1$  &  $g = 1$ .

(2) La démonstration générale devient beaucoup plus simple quand les deux puissances sont égales. En effet, soient  $CD$  &  $Cd$  deux forces ou puissances égales que j'appelle  $n$ , & l'angle  $EC D$  moitié de  $DCD = \alpha$  ; on aura la force résultante suivant  $CE = n \varphi \alpha$  ; soient  $CB$ , &  $Cb$  deux autres forces  $n$ , en sorte que les angles  $DCB$ , &  $dCb$  soient chacun  $= 2\epsilon$ , on aura la force suivant  $CE$ , résultante des forces  $CB$  &  $cb = n \varphi (\alpha + 2\epsilon)$  ; donc la somme de ces deux forces résultantes est  $n \varphi \alpha + n \varphi (\alpha + 2\epsilon)$ . Or si on prend  $CG$  &  $Cg$  pour les deux forces résultantes de  $CD$  &  $CB$ ,  $Cd$  &  $Cb$ , on aura chacune

de ces forces  $= n\phi\epsilon$ , & la force suivant  $CE$  résultante des deux forces  $CG$  &  $Cg = n\phi\epsilon \times \phi \text{ angl. } ECG = n\phi\epsilon \times \phi (a + \epsilon)$ ; & comme cette dernière force résultante doit évidemment être égale à la somme des deux précédentes, on aura  $n\phi\epsilon \times \phi (a + \epsilon) = n\phi\epsilon + n\phi (a + 2\epsilon)$ . Donc (art. 2)  $\phi a = c^a \sqrt{A} + c - a \sqrt{A}$ , &c.

*Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai trouvé une nouvelle solution analytique du Problème de la composition du mouvement, & je pourrai la donner dans une autre occasion.*

(3) M. Euler a remarqué, dans sa *Mécanique*, tome I, article 396, que  $a = 0$  donne  $y = 0$  quand  $\phi u = Au^m$ ,  $m$  étant  $=$  ou  $> 1$ . Ainsi l'article 11, page 355 du tome IV de nos *Opuscules* a besoin de restriction à cet égard. Il faut donc s'attacher à prouver en général que  $\phi u = 0$ , & c'est ce que nous avons tâché de faire, au moins métaphysiquement, la question n'étant peut-être pas susceptible de preuves purement mathématiques.

En général,  $a = 0$  ne donnera  $y = 0$  que quand  $\phi u$  sera telle qu'en faisant  $u$  infiniment petite, elle se réduira à un terme  $Au^m$  où  $m$  ne sera pas  $< 1$ . J'observerai en passant à cette occasion, que M. Euler, dans sa *Mécanique*, a tâché d'expliquer analytiquement pourquoi dans les autres hypothèses de résistance, la nature & le calcul sont en contradiction. Je crois que cela vient uniquement de ce que le corps n'a point de direction selon laquelle il doit être mu, & que sans cela il se mouvrait; comme il arrive aux corps pesans, quoique  $a$  soit  $= 0$  lorsque  $x = 0$ , parce que ces corps tendent à se mouvoir suivant une ligne de position déterminée.

(4) En supposant que la puissance équivalente soit comme  $\phi x$ , ( $DC$  étant  $= x$ ) on trouve dans les *Mémoires de Turin*, tome II, page 320, que  $(\phi x)^2$  doit être  $= 2 + \phi(2x)$ ; d'où l'on conclut que  $\phi x$  est constant; en quoi l'on s'est trompé, puisque  $\phi x = c^x \sqrt{A} + c^{-x} \sqrt{A}$  satisfait à l'équation  $(\phi x)^2 = 2 + \phi(2x)$ . Au reste, on pourroit remarquer à cette occasion une analogie analytique singulière entre les démonstrations du parallélogramme des forces, & celle du levier.

(5) Voici quel est ce Problème. On demande la fonction  $\phi x$  telle que  $2\phi x = \phi(x + z) + \phi(x - z)$ . Différentions cette équation

en faisant varier  $x$ , nous aurons  $\frac{2d\varphi x}{dx}$  ou  $2\Delta x = \Delta(x+z) + \Delta(x-z)$ ; différencions ensuite la même équation en ne faisant varier que  $z$ , nous aurons  $\Delta(x+z) - \Delta(x-z) = 0$ , d'où il est clair que  $\Delta(x+z) = \Delta x$ . Différencions cette dernière équation en faisant varier successivement  $x$  &  $z$ , on aura  $\frac{d\Delta x}{dx}$  ou  $\Gamma x = \Gamma(x+z)$ ; &  $\Gamma(x+z) = 0$ ; donc  $\Gamma x = 0$ , donc  $\Delta x$  est constante; donc faisant  $\Delta x = H$ , on aura  $H = \frac{d\varphi x}{dx}$ ; donc  $\varphi x = Hx + B$ .

Ce Problème a été résolu d'une autre manière, mais ce me semble, moins rigoureuse & moins simple, dans les *Mémoires de Turin*, tome II, à l'endroit cité; on y emploie les séries infinies, dont nous n'avons pas eu besoin.

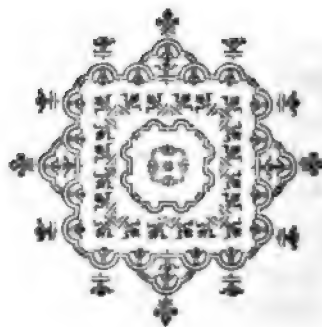


Fig. 1

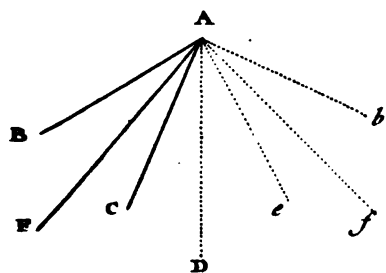


Fig. 2

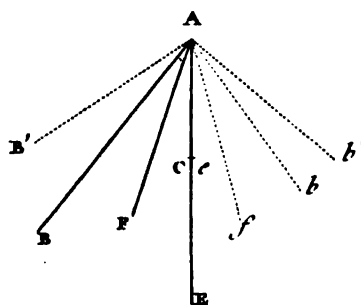


Fig. 3

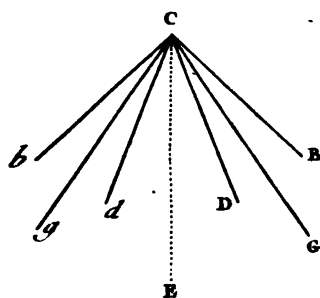


Fig. 4

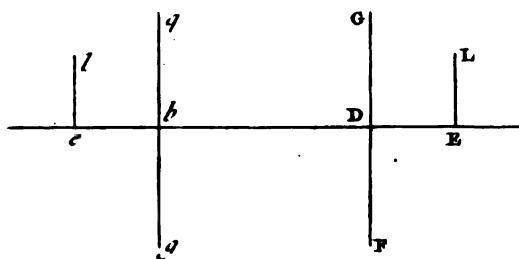
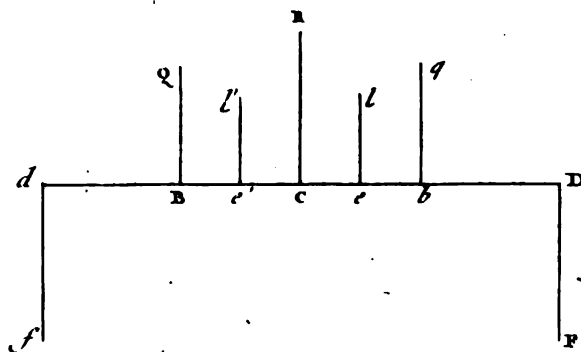


Fig. 5





---

*M É M O I R E*  
*SUR LA STRUCTURE ET SUR LES USAGES*  
*DE L'OURAQUE DANS L'HOMME.*

Par M. P O R T A L.

L'OURAQUE a été très-souvent l'objet des recherches des plus célèbres Anatomistes, mais ce sujet, bien loin d'être épuisé, offre encore tous les jours des singularités frappantes. Les différentes opinions qui retardent toujours les progrès des Sciences, lorsqu'elles ne sont que l'objet d'une imagination prévenue, & purement spéculative, n'ont servi qu'à répandre de l'obscurité sur cet objet; & beaucoup de disputes, dont la plupart sont vaines, ont été les seuls fruits que nous ayons retirés des travaux des Anatomistes; au lieu de trouver dans les descriptions de l'Ouraque cette clarté, cette précision qui fait le mérite d'une exposition anatomique, on n'y voit que confusion & diversités de sentimens; les uns ont regardé l'Ouraque comme un vrai ligament; les autres ont cru y apercevoir une cavité, & l'ont comparé à un canal; ce sentiment a été reçu avec d'autant plus de plaisir qu'il paroïssoit fondé sur ce que l'on observe dans les animaux.

Les partisans de ces deux différentes opinions sont de part & d'autre très-nombreux & très-respectables; il me paroît inutile d'en faire ici l'énumération. Quand on n'est point d'accord sur la structure d'une partie, on ne peut guère l'être sur ses fonctions; c'est ce qui est arrivé; les Anatomistes ne s'accordent pas plus aujourd'hui sur la structure de l'Ouraque que sur son usage; ceux qui regardent, après Arantius, l'Ouraque comme une extension ligamenteuse ne lui donnent d'autre usage que celui de suspendre & de retenir le fonds de la vessie urinaire, à la manière d'une bride ou d'une corde qui sert à fixer une partie. Ceux qui soutiennent avec Galien que l'Ouraque est creux, lui font faire l'office d'un tuyau de com-



munication entre la vessie & la membrane allantoïde, destinée; selon eux, à recevoir l'urine qui va de la vessie du fœtus dans cette membrane. Quelqu'ingénieux & vraisemblable que paroisse ce sentiment au premier coup d'œil, il ne peut s'appliquer qu'à l'Anatomie comparée; il tombe de lui-même, lorsque par le moyen de la dissection la plus délicate, & de l'injection la plus fine, on ne peut apercevoir aucune cavité dans l'Ouraque du fœtus humain. L'on peut regarder de même comme très-hypothétique, pour ne pas dire faux, ce que M. Hales a dit à ce sujet. Ce savant Académicien croyoit que l'Ouraque étoit un composé de vaisseaux spongieux, pareils à ceux dont Leeuwenhoek vouloit que les intestins fussent composés; c'est en admettant une pareille structure, dit-il, qu'on peut expliquer pourquoi l'urine passe de la vessie dans la membrane allantoïde du fœtus humain; & il n'est pas pour cela nécessaire, continue ce grand homme, que l'Ouraque soit proprement creux, l'urine se filtrant doucement à travers de ce tissu spongieux, plutôt qu'elle ne coule. Cette application ne sauroit se faire sur le fœtus humain, l'Ouraque ne présente rien qui nous annonce l'existence de ces tuyaux spongieux; & d'ailleurs la membrane allantoïde est un être de raison dans l'homme, & qui n'existe que chez les animaux. On peut donc regarder ce que M. Hales dit de l'Ouraque comme une pure dépense d'esprit. L'Anatomie comparée est ici en défaut, & on ne peut rien conclure pour le fœtus humain.

C'est cette application à l'homme qui a induit en erreur Galien & ses Sectateurs: cette erreur s'est ensuite fortifiée par des observations mal faites; les Anatomistes n'ont considéré l'Ouraque que dans certains âges de la vie, sans le comparer à celui du fœtus; ils ont donné une description générale, au lieu de n'en donner qu'une très-particulière; ils ont d'abord conclu pour le corps en santé, des observations qu'ils avoient faites sur les malades; méthode encore très-vicieuse, puisqu'ils ont confondu par-là l'ouvrage de la Nature avec les effets de la maladie.

Pour ne pas tomber dans les mêmes défauts, nous allons examiner, 1.<sup>o</sup> quelle est la structure de l'Ouraque dans tous les  
âges

âgés de la vie ; 2.<sup>o</sup> indiquer les changemens qui lui surviennent ; & quelle est la cause de ces changemens ; 3.<sup>o</sup> établir son usage ; 4.<sup>o</sup> enfin démontrer comment la structure de l'ouraque peut être altérée par maladie.

L'ouraque, comme M. Senac l'a observé dans ses *Essais de Physique*, est composé dans le fœtus humain de cinq à six mois, de quatre filamens ; le nombre est toujours le même, & il n'y a point d'irrégularité dans aucun sujet ; les filets sont exactement réunis ensemble, & paroissent presque confondus depuis l'ombilic jusqu'à très-peu de distance de la vessie ; là ces quatre filets se séparent l'un de l'autre, & il en résulte par cet écartement, une espèce de patte-d'oie, dont les branches filamenteuses se distribuent sur la vessie urinaire ; de ces quatre filets, deux embrassent les parties latérales de la vessie, les deux autres se divisent, l'un occupe la partie antérieure, l'autre la partie postérieure ; on peut suivre ces filets très-loin dans certains sujets ; je les ai plusieurs fois suivis jusqu'au col de la vessie : ces filets ne contractent presque aucune adhérence vers le haut avec la tunique qui les recouvre, au lieu que vers le bas ils se trouvent unis avec les fibres musculaires de la vessie ; l'endroit de réunion présente au premier coup d'œil la figure d'un véritable ligament ; mais quand on se donne la peine de l'examiner de près, on voit clairement, dans quelques sujets, qu'il est composé de quatre filets ; on peut même, avec un peu d'adresse & beaucoup de patience, les séparer, & réduire par-là ce ligament en ses propres élémens, s'il est permis de parler ainsi.

Tous ces filets, soit avant, soit après leurs divisions, sont enveloppés par le tissu cellulaire du péritoine, qui après avoir recouvert la face antérieure de la vessie, se prolonge sur eux, & forme une espèce de gaine, à laquelle on pourroit donner le nom de *tunique vaginale* ; cette enveloppe est très-lâche, & l'espace dans lequel les filets sont logés, est assez considérable.

Par la description que je viens de faire de l'ouraque, tel qu'on l'observe à cet âge, on voit que sa figure est triangulaire, que la pointe de ce triangle répond à l'ombilic, & la base au fond de la vessie, sans s'attacher précisément à la partie supérieure, comme l'a observé M. Lieutaud, mais cela n'a lieu que dans l'adulte ;

car dans le fœtus l'ouraque s'implante à la sommité de la vessie.

Cet écartement des filets de l'ouraque lui donne la forme d'un entonnoir dont le tuyau seroit très-long, respectivement à son évasement; il se fait quelquefois dans l'intérieur de la gaine cellulaire qui enveloppe l'ouraque, un épanchement d'eau qui la distend & augmente le volume total de cette partie; je l'ai vu deux fois si considérable, que je croyois à la première inspection, que la vessie contenoit elle-même l'eau épanchée, & qu'elle s'étoit ainsi prolongée, je fus convaincu du contraire en ouvrant la gaine qui contenoit le liquide.

A la faveur de cette collection d'eau, j'ai pu observer quelle étoit la structure de la tunique charnue de la vessie dans l'endroit qui répond à la base de l'ouraque; j'ai vu qu'il y avoit entre les fibres musculaires un ou deux espaces vides, suivant que la base de l'ouraque étoit plus ou moins étendue; ces vides n'étoient remplis que par le tissu cellulaire, & provenoient de l'écartement des fibres musculaires; j'ai depuis trouvé ces vides dans un grand nombre de jeunes sujets. M. Lieutaud a trouvé de pareils espaces vides dans tout le reste du réseau musculaire de la vessie, il n'a point indiqué ceux qui répondent à la base de l'ouraque: c'est à travers les espaces libres qui se trouvent à la base de l'ouraque que s'engage la membrane interne de la vessie, de la même manière qu'une hernie ventrale qui se fraie un passage à travers les muscles du bas-ventre; elle ressemble encore beaucoup aux anévrismes formés par la tunique interne des artères, lorsqu'il y a solution de continuité dans les tuniques extérieures.

Il n'est pas rare de voir que la membrane interne de la vessie passe à travers les vides que laissent les troussaux musculaux; je l'ai vu quatre fois d'une manière très-distincte, trois fois sur des enfans, & la quatrième sur un homme de trente à trente-cinq ans: elle étoit même si considérable, qu'elle avoit le volume d'un œuf de poule; lorsqu'on souffloit avec force dans la vessie; ou lorsqu'on injectoit de l'eau dans ce viscère; la membrane interne de la vessie étoit extraordinairement rétrécie dans son passage à travers les troussaux musculaux: cette production membraneuse soulevoit la membrane externe de la vessie, &

l'écartoit de l'ouraque qu'elle enveloppe ; on peut appliquer ici l'Observation que M. Littre rapporte dans les Mémoires de cette Académie, *année 1707*. M. Littre observa dans le cadavre d'un jeune homme d'environ trente ans , une dilatation de l'Ouraque jusqu'à très-peu de distance de l'ombilic ; c'étoit vraisemblablement une production de la membrane interne de la vessie , telle que nous l'avons observée ; car comment comprendre que l'ouraque qui forme à l'âge de trente ans un corps très-solide, & qui dans l'enfance n'est composé que de quatre filets, puisse acquérir la figure d'un long & large canal ; c'est certainement hors de toute vraisemblance & de toute probabilité : la membrane interne de la vessie peut se faire jour à travers presque tous les points de la surface de ce viscère. M. Lieutaud en a rapporté plusieurs exemples ; j'ai vu plus d'une fois des vessies qui , au premier aspect, paroissent doubles, quoique dans le fond il n'y eût qu'une seule vessie, c'étoit la membrane interne qui étoit sortie de sa place, & qui formoit une poche : ces poches contiennent souvent des pierres ; les Latins les ont connues sous le nom de *lapides tunicati*.

Si l'on examine l'ouraque d'un enfant de deux ou trois mois , on trouve les filets ligamenteux réunis dans un plus long espace, soit en haut entre eux , soit en bas avec les fibres musculaires de la vessie ; il s'en faut bien qu'on les sépare à cet âge avec autant de facilité qu'on pourroit le faire dans un âge moins avancé , il faut beaucoup plus d'adresse pour réussir, souvent même ne peut-on pas en venir à bout, les filets sont un peu plus gros, & paroissent très-élastiques, & quelque recherche que l'on fasse, on les trouve sans cavité, la tunique qui les recouvre, leur est intimement unie, ce qui donne lieu à un changement dans la figure de l'ouraque en rendant sa base moins large ; on trouve dans les sujets de cet âge beaucoup moins fréquemment de l'eau épanchée dans l'intérieur de sa cavité, cependant j'ai eu occasion de voir deux fois ce cas.

Les changemens qu'éprouve l'ouraque dans un enfant de huit à neuf mois, se réduisent à une coalition plus exacte des filets entre eux, à une plus parfaite union de ces filets avec les troussaux

musculeux de la vessie & avec leur tunique vaginale : cette coalition augmente de plus en plus depuis l'enfance jusqu'à la vieillesse, ce qui fait diminuer de beaucoup le volume de l'ouraque : cette diminution vient même quelquefois à un tel point, qu'on n'en trouve plus de traces dans la vieillesse ; dans certains sujets cela arrive plus tôt que dans d'autres : j'ai fait des recherches sur des cadavres de presque tous les âges, & je me suis pleinement convaincu que le volume de cette partie étoit toujours d'autant plus considérable que le sujet étoit plus proche du temps de sa naissance ; cette dernière remarque prouve que l'ouraque dans le fœtus est destiné à des usages particuliers, & qu'il ne remplit plus aucune fonction après que l'enfant est sorti du sein de sa mère.

L'ouraque ne me paroît destiné dans le fœtus qu'à soutenir la vessie élevée, afin de la rendre plus fixe dans sa situation : il étoit nécessaire, vu le peu de capacité qu'a le bassin dans le fœtus, que ce viscère fût placé au-dehors de la cavité pour y être logé commodément ; l'Auteur de la Nature y a pourvu en la suspendant par le moyen d'un ligament, auquel il a plu aux Anatomistes de donner le nom d'*Ouraque* ou *Tuyau urinaire*, nom que cette partie ne mérite cependant point dans l'homme, n'étant point destinée à donner passage à l'urine ; cet expédient que la Nature a employé, est bien propre à remplir son but qui a été de diminuer la capacité du bassin du fœtus, peut-être afin de rendre l'accouchement plus aisé : pour cet effet, elle a placé ce viscère hors de la cavité ; il falloit en même temps le fixer, & l'empêcher de balloter, ce qui seroit nécessairement arrivé, si la vessie n'eût été suspendue & fixée par cette corde ligamenteuse, mais cette situation de la vessie doit changer par une suite nécessaire d'un développement du bassin : lorsque la cavité du bassin s'agrandit, la vessie se trouve pour lors sollicitée à descendre par son propre poids. Dans le fœtus, la vessie étoit soutenue en partie par l'*os sacrum*, ce qui n'a pas lieu dans ce cas-ci, car l'*os sacrum* se porte en arrière en s'éloignant des os pubis à proportion que le bassin acquiert une plus grande étendue ; c'est même un des principaux moyens dont la Nature se sert pour agrandir cette cavité ; de plus, le poids de la vessie se trouve de

beaucoup augmenté, si on le compare avec ce qu'il étoit dans le fœtus, ce qui est dû à l'urine qui s'y ramasse.

Les intestins qui se précipitent dans le bassin, concourent encore ; selon moi, à distendre l'ouraque, à en rapprocher les filamens qui se collent par la suite des temps ; de sorte que de quatre filets ligamenteux qui étoient primitivement séparés, il n'en résulte plus qu'un seul ligament qu'il est impossible de diviser en ses parties primitives, tant l'union de ces filets ligamenteux est intime ; certaines parties s'étendent, se développent ; d'autres se retrécissent, se rapprochent suivant l'intention de la Nature, & souvent aux dépens les unes des autres ; c'est au moyen de cette action mutuelle & de ce mécanisme universel que les parties prennent leur forme, & se moulent réciproquement ; c'est par cette action que la tunique cellulaire s'applique de plus en plus à la surface extérieure des filets ligamenteux ; enfin c'est par ce même mécanisme que l'on peut expliquer tous les changemens auxquels l'ouraque est naturellement sujet.

Il ne me reste pour terminer ce Mémoire que d'exposer comment il a pu se faire que des malades aient rendu leurs urines par l'ombilic.

Pour comprendre la possibilité de ce fait, il faut se rappeler 1.<sup>o</sup> qu'il y a quelquefois dans le muscle de la vessie, un ou deux vides qui répondent à la base de l'ouraque ; 2.<sup>o</sup> que les vides peuvent donner lieu à cette espèce de hernie dont nous avons parlé : ces faits confirmés par l'Anatomie & par l'observation, une fois admis, on peut aisément rendre raison de cet écoulement contre nature ; en effet, cette tumeur qu'on peut appeler *hernie de la tunique interne de la vessie*, ne pourra avoir lieu, sans que les filamens ne soient séparés de nouveau, ou du moins sans que la tunique vaginale ne soit séparée des filets qui composent l'ouraque, & cette seule séparation suffit pour donner lieu à la sortie des urines par l'ombilic.

On peut mettre au rang des causes qui produisent cette hernie tout ce qui s'oppose à la sortie de l'urine par les voies naturelles, soit que son écoulement soit totalement supprimé ou en partie, l'urine se ramasse pour lors dans la vessie, distend les parois en

appliquant fortement la membrane interne contre la portion musculaire qui la recouvre; mais s'il y a quelque point dans cette portion musculaire qui s'oppose moins à la pression latérale: cette membrane pressée par l'urine qu'elle contient, poussera ce point de dedans en dehors avec plus de facilité, se fera jour à travers, & cela suffira pour qu'il se forme une hernie de la tunique interne. A cette cause très-suffisante pour produire cet accident, on peut encore ajouter les contractions que la tunique musculaire doit nécessairement faire pour se délivrer des urines qui l'irritent en la distendant; c'est ainsi que je conçois que la membrane interne de la vessie peut passer à travers le vide de la tunique musculaire que j'ai observé à la base de l'ouraque; il se formera là une espèce de sac, dans lequel les urines se porteront nécessairement, & si les causes qui auront produit la hernie agissent plus long-temps & avec trop de force, l'urine après avoir poussé la membrane interne hors de la vessie, après l'avoir violemment distendue la rompra enfin, l'urine s'épanchera aussi-tôt entre le tissu cellulaire qui enveloppe les filets ligamenteux de l'ouraque, les séparera; & si le sujet n'est pas d'un âge trop avancé; cette urine, ainsi épanchée, donnera à la tunique la forme d'un véritable canal: en le distendant également dans tous les sens; ce canal sera forcé par un abord continuel des urines, de s'ouvrir & de se vider tôt ou tard par l'ombilic (a); l'urine trouve moins de difficulté à se frayer une route nouvelle, qu'à passer par son ancienne voie: cette hernie se forme d'autant plus aisément à la base de la vessie, que les trousseaux de fibres musculées, se trouvent dans cet endroit plus éloignés les uns des autres que par-tout ailleurs, & même que la membrane extérieure de la vessie paroît beaucoup moins adhérente dans ce même endroit que dans tout le reste de ce viscère: tout favorise donc la formation de cette hernie vers le fond de ce viscère, & conséquemment l'issue de l'urine par l'ombilic.

(a) C'est à peu près de cette manière que plusieurs dépôts pérulens ou lymphatiques du foie se sont vidés par l'ombilic: consultez à ce sujet l'ouvrage de M. Morgagni, de Sed. & Caus. Morb. Epist. 39.

*OBSERVATION sur un écoulement d'urine par l'ombilic.*

M. Barthélemi Rossignol, Chirurgien de Cahuzac, bourg au diocèse d'Alby, âgé de quatre-vingt-douze ans, après une vie laborieuse, sur-tout après avoir beaucoup voyagé à cheval, ressentit à la verge, des douleurs extrêmement vives qu'il rapportoit à différens endroits successivement, au gland ou au col de la vessie; les douleurs cessèrent d'elles-mêmes quelques jours après, cependant l'urine qui jusqu'ici avoit eu un libre cours, diminuoit chaque jour en quantité: on employoit en vain les diurétiques les plus forts, & M. Ruffel, Chirurgien ordinaire du malade, voyant le peu d'efficacité des médicamens administrés, alloit recourir aux bougies, lorsque le malade se plaignit que son ventre étoit mouillé; on l'examina, & on vit une liqueur claire transparente, on ne douta point que l'urine ne se fût frayé une nouvelle route, on suspendit l'introduction de la bougie, l'urine coula pendant dix jours par l'ombilic & par la verge en égales quantités: celle qui venoit par l'ombilic, augmentoit par degrés aux dépens de la quantité fournie par la voie ordinaire, qui fut enfin totalement supprimée le quinzième jour; le malade vécut six mois urinant uniquement par l'ombilic, il ne ressentoit plus aucune douleur, & l'on doit attribuer sa mort plutôt à son extrême vieillesse qu'à l'incommodité qu'il avoit soufferte.

J'ai été témoin d'un autre fait à peu près semblable, un homme de quarante-cinq ans tomba de fort haut sur son ventre, l'urine coula par l'ombilic bientôt après la chute, & le sujet étant mort peu de temps après; je fis l'ouverture du cadavre, je trouvai un conduit qui s'étendoit depuis l'ombilic jusqu'à la vessie; ce conduit avoit une figure conique, son diamètre vers l'ombilic étoit d'un tiers de pouce & d'un pouce & demi vers la vessie, sa longueur étoit d'environ six pouces, l'épaisseur de ses parois étoit inégale; la partie antérieure avoit en épaisseur sur la partie postérieure plus de quatre lignes de différence.

Je fis à ce canal une section perpendiculaire à sa base, & je disséquai ensuite scrupuleusement ses parois; l'antérieure étoit



composée de deux membranes & d'une espèce de ligament qui occupoit le milieu : la membrane interne du canal étoit une continuation de la membrane interne de la vessie ; elle adhéroît fortement autour de l'anneau musculueux qui l'embrassoit du côté de la vessie, elle se terminoit à trois travers de doigt de l'ombilic ; après avoir enlevé cette membrane, l'ouraque parut à découvert ; sa structure étoit telle qu'on l'observe ordinairement à cet âge ; c'est-à-dire qu'il étoit raccorni, & formant une espèce de ligament triangulaire ; la membrane externe se prolongeoit sur la vessie ; & on voyoit que ce n'étoit que la fausse lame du péritoine.

La vessie étoit très-raccornie, son volume n'excédoit pas la grosseur d'une petite pomme, à peine auroit-elle contenu un demi-verre de liqueur, les membranes étoient fort épaisses, le col étoit fort dur, froncé, raccorni, semblable à un parchemin à demi-brûlé, & l'ouverture étoit entièrement fermée.

On peut rendre compte de cette observation par la structure même de cette partie dont j'ai donné l'exposition anatomique ; je n'entrerai pas par conséquent dans de plus longs détails : mon objet étoit de donner la description de l'Ouraque, & je crois y avoir réussi en rapportant fidèlement ce que j'ai vu dans un grand nombre de sujets morts dans des âges différens de différentes maladies, & principalement dans ceux dont les fibres étoient relâchées par quelque infiltration.



## NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES

POUR

CALCULER LES ÉCLIPSES DE SOLEIL,  
LES OCCULTATIONS DES ÉTOILES FIXES

ET DES PLANÈTES PAR LA LUNE;

*Et en général pour réduire les Observations de cet Astre,  
faites à la surface de la Terre, au lieu vu du centre.*

SEPTIÈME MÉMOIRE,

*Dans lequel on applique à la solution de plusieurs  
Problèmes astronomiques, les Équations démontrées  
dans les Mémoires précédens.*

Par M. DU SÉJOUR.

P OUR l'intelligence de ce qui suit, le Lecteur se rappellera

(1.) Que dans toutes mes équations,

$r$  exprime le demi-petit axe de la Terre, que je suppose d'ailleurs égal  
au rayon des Tables.

$p$  le demi-grand axe.

$v$  l'arc de  $15^d$  rectifié.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{le sinus} \\ \text{le cosinus} \end{array} \right\}$  de l'inclinaison de l'orbite corrigée.  
Cette inclinaison se détermine par l'équation suivante;  
Tangente de l'inclinaison de l'orbite corrigée =  
$$\frac{r^2}{206265''} \times \frac{\text{mouv. hor. de la } \odot \text{ en latit. évalué en secondes de degré}}{\sin. (\text{mouv. hor. de la } \odot \text{ en longit. — mouv. hor. du } \odot)}$$

$z$  le cosinus de la latitude de la Lune à l'instant de la conjonction, vue  
du centre de la Terre.

$t$  le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à  
l'instant pour lequel on calcule.

Mém. 1769.

P p

Année 1764.  $s$  le sinus } de la latitude corrigée de l'Observateur (2.<sup>d</sup> Mém. §. 20, Table I), c'est-à-dire d'un angle qu'il faut substituer à la latitude vraie, & qui se conclut de cette latitude.

$c$  le cosinus }  
 $g$  le sinus } de l'angle horaire du Soleil.  
 $h$  le cosinus }

$p$  le sinus }  
 $q$  le cosinus } de la déclinaison du Soleil à l'instant pour lequel on calcule.

$\Omega$  le cosinus de l'obliquité de l'écliptique.

$$\chi = \sqrt{q^2 - \Omega^2}.$$

$\omega$  le sinus }  
 $t$  la tangente } de l'angle de l'orbite relative de la Lune avec le fil parallèle ou équatorial\* de l'Observateur supposé au centre de la Terre.  
 $\phi$  le cosinus } Cet angle se détermine par l'équation suivante,

$$\omega = \frac{\theta \Omega}{q} + \frac{\downarrow \chi}{q}.$$

$\pi$  le sinus de la parallaxe horizontale polaire de la Lune à l'instant pour lequel on calcule.

$\pi'$  le sinus de la parallaxe horizontale du Soleil.

$$\zeta = r - \frac{\pi' \xi}{\pi}.$$

$$l = r \times \frac{\sin. \text{ de la lat. de la } \odot \text{ à l'inst. de la conj. vue du centre de la Terre}}{\sin. \text{ de la parall. horiz. polaire de la } \odot \text{ à l'instant de la conjonction}}$$

$$\gamma = \xi \times \frac{\sin. \text{ versé (mouv. hor. de la } \odot \text{ en longit. — mouv. horaire du } \odot)}{\sin. \text{ de la parall. horiz. polaire de la } \odot \text{ à l'instant de la conjonction}}$$

$$n = \frac{\uparrow \xi}{\downarrow} \times \frac{\sin. \text{ (mouv. horaire de la } \odot \text{ en longit. — mouv. horaire du } \odot)}{\sin. \text{ de la parall. horiz. polaire de la } \odot \text{ à l'instant de la conjonction}}$$

(2.) Que dans toutes les équations, j'ai supposé que les quantités précédentes étoient positives; qu'il pouvoit arriver cependant que quelques-unes de ces quantités devinssent négatives.

(3.) Que dans toutes les Éclipses de Soleil, les quantités  $r, g, v, \psi, \xi, c, q, \Omega, \phi, \pi, \pi', \zeta, \gamma, n$ , étoient essentiellement positives; que par conséquent le changement de leurs valeurs absolues ne pouvoit faire varier le signe des termes dans lesquels elles entroient.

(4.) Qu'il n'en étoit pas de même des quantités  $\theta, b, s, g, h, p, \chi, t, \omega, l$ .

\* Dans les premiers Mémoires, j'avois appelé *fil horaire* ce que l'on nomme ordinairement *fil parallèle* ou *équatorial*; je reprends la définition adoptée par les Astronomes.

Que la quantité  $l$  devenoit négative, lorsque la latitude de la Lune, vue du centre de la Terre, étoit australe à l'instant de la conjonction.

Que la quantité  $\theta$  devenoit négative, lorsque l'Éclipse arrivoit dans le noeud descendant de la Lune.

Que  $b$  devenoit négatif, lorsque l'instant pour lequel on calcule précédoit l'instant de la conjonction.

Que  $s$  devenoit négative, lorsque la latitude de l'Observateur étoit australe.

Que  $g$  devenoit négatif, lorsque l'heure donnée étoit entre minuit & midi.

Que  $h$  devenoit négative, lorsque l'heure étoit entre six heures du soir & six heures du matin.

Que  $p$  devenoit négatif, lorsque la déclinaison du Soleil étoit australe.

Que  $\chi$  devenoit négatif, lorsque le Soleil étoit dans les signes descendans, c'est-à-dire depuis le solstice d'été jusqu'au solstice d'hiver.

Que le signe de  $\omega$ , & de  $t$  qui en est une conséquence, étoit déterminé par la formule du §. 1.<sup>er</sup>.

(5.) J'ai supposé dans ce Mémoire que pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on avoit les Éléments suivans.

Heure de la conjonction à Paris ,	10 <sup>h</sup> 31' 23" du matin ,
Dans.....	12 <sup>d</sup> 9' 56" du Bélier.
Mouvement horaire du Soleil.....	0. 2. 27,7.
Mouvement horaire de la Lune en longitude.	0. 29. 39
Latitude de la Lune à l'instant de la conjonction.	0. 39. 36 boréale.
Mouvement horaire de la Lune en latitude.	0. 2. 44 { Éclipse dans le noeud descendant,
Parallaxe horizontale polaire de la Lune....	0. 54. 1,5
Obliquité de l'Écliptique.....	23. 28. 21
Déclinaison du Soleil à l'instant de la conjonction.	4. 48. 50 boréale.
Parallaxe horizontale du Soleil.....	0. 0. 10
Demi-diamètre du Soleil.....	0. 15. 59,5

$$\sinus (\text{demi-diam. horizont. de la } \odot) = \frac{900}{3293} \times \sinus (\text{parallaxe horizont. polaire})$$

# 300 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

D'où j'ai conclu

$$r = + 100000.$$

$$p = + 100565.$$

$$v = + \text{arc de } 15^{\circ} \text{ rectifié.}$$

$$t = + \text{sinus. } 5^{\circ} 44' 26''$$

$$\downarrow = + \text{cosin. } 5. 44. 26.$$

$$\xi = + \text{cosin. } 0. 39. 36.$$

$$p = + \text{sinus. } 4. 48. 50.$$

$$q = + \text{cosin. } 4. 48. 50.$$

$$\Omega = + \text{cosin. } 23. 28. 21.$$

$$\chi = + 38936.$$

$$\psi = + \text{sinus. } 28. 44. 30.$$

$$\varphi = + \text{cosin. } 28. 44. 30.$$

$$\epsilon = + \text{tang. } 28. 44. 30.$$

$$\pi = + \text{sinus. } 0. 54. 1,5$$

$$\pi' = + \text{sinus. } 0. 0. 10.$$

$$\zeta = + 99692.$$

Logarithme...

$$r = 10,0000000.$$

$$p = 10,0024467.$$

$$v = 9,4179686.$$

$$t = 9,0001044.$$

$$\downarrow = 9,9978165.$$

$$\xi = 9,9999711.$$

$$p = 8,9238624.$$

$$q = 9,9984653.$$

$$\Omega = 9,9624884.$$

$$\chi = 9,5903565.$$

$$\omega = 9,6820198.$$

$$\varphi = 9,9428989.$$

$$\epsilon = 9,7391209.$$

$$\pi = 8,1963030.$$

$$\pi' = 5,6855749.$$

$$\zeta = 9,9986603.$$

$$\text{Logar.} \left\{ \begin{array}{l} \text{sin. de la latitude de la Lune à l'instant de la conjonction...} = 8,0614147. \\ \text{sin. véré (mouv. hor. de la } \odot \text{ en long. — mouv. hor. du } \odot) = 5,4972284. \\ \text{sin. (mouv. hor. de la } \odot \text{ en longit. — mouv. hor. du } \odot) = 7,8981331. \end{array} \right.$$

$$l = + 73301.$$

$$r = + 200.$$

$$n = + 50581.$$

$$\frac{n'}{\zeta} = + 50737.$$

Logarithme...

$$l = 9,8651087.$$

$$r = 7,3008965.$$

$$n = 9,7039847.$$

$$\frac{n'}{\zeta} = 9,7053244.$$

$$\text{Logarithme } 3600^{\circ} = 3,5563025.$$

(6.) Je suppose également que le Lecteur a présent à l'esprit *Année 1785.* ce que j'ai dit (S. 28 du 3.<sup>e</sup> Mém.) sur la relation entre le nombre de chiffres dont chaque quantité qui se trouve dans les formules, doit être composée, & la caractéristique de son logarithme.

Qu'il se rappelle l'exception relative au nombre de secondes, soit d'heure, soit de degré.

Qu'il n'a pas oublié la division du disque du Soleil en quatre angles égaux, établie par l'article III du même Mémoire, & la manière de déterminer dans lequel de ces angles l'Observateur rapporte le centre de la Lune. Année 1765.

Qu'il a présent à la mémoire la manière de distinguer chacun des termes d'une équation, en le surmontant d'un chiffre & d'une lettre; d'une lettre, pour signifier la quantité dans l'expression de laquelle se trouve le terme en question; d'un chiffre pour indiquer le rang de ce terme.

Qu'il se rappelle la méthode détaillée dans l'article VI du troisième Mémoire, pour convertir le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction, en expression de la longitude du lieu.

(7.) Je suppose enfin que le Lecteur n'a pas oublié que par la latitude d'un lieu, j'entends sa latitude corrigée. Cette latitude est réductible à la latitude vraie; ou réciproquement, la latitude vraie est réductible à la latitude corrigée, par la première Table du §. 20 de mon second Mémoire. Année 1764.

Ces suppositions admises, je passe à la solution de plusieurs Problèmes.

## ARTICLE PREMIER.

### *Des Courbes d'illumination.*

## SECTION PREMIÈRE.

### *De la question en général.*

(8.) On connoît en Astronomie cette espèce de courbes irrégulières, lieux géométriques de tous les points de notre globe qui voient le commencement ou la fin de l'éclipse au lever & au coucher du Soleil, & que l'on nomme indistinctement

*courbes d'illumination, courbes d'entrée & de sortie au lever & au coucher du Soleil* : ces courbes présentent un objet de curiosité intéressant. Supposons, par exemple, qu'il soit question de la *courbe d'entrée* au coucher du Soleil ; tous les lieux situés à l'est de cette courbe ne verront pas le phénomène, le Soleil sera couché pour eux lorsqu'il arrivera ; tous les lieux situés à l'ouest verront le phénomène d'autant plus long-temps avant le coucher du Soleil qu'ils seront plus éloignés de la courbe : cette explication suffit pour faire sentir combien ces courbes sont importantes à connoître. Plusieurs Astronomes se sont occupés de leur description mécanique ; aucun d'eux ne s'est proposé d'en donner l'équation exacte & rigoureuse. L'irrégularité apparente de leur contours, la diversité de leurs formes qui ressemblent tantôt à un *huit de chiffre*, tantôt à deux espèces d'*ellipses conjuguées*, tantôt à deux *ovales* qui se coupent, quelquefois même à un seul *ellipsoïde*, pouvoient faire douter avec raison qu'elles fussent susceptibles d'une analyse simple. Je vais donner la solution rigoureuse du Problème, quelle que soit la figure de la Terre, & la distance du centre de notre globe à la Planète qui éclipse le Soleil. On peut dire sous ce point de vue que le Problème n'a pas encore été résolu.

Les courbes *d'illumination*, proprement dites, ne sont qu'un cas particulier du Problème plus général, par lequel on détermine quels lieux de la Terre observent une distance quelconque des centres au lever & au coucher du Soleil. Ce dernier Problème n'est lui-même qu'un cas particulier de la détermination des lieux de la Terre qui voient une certaine distance quelconque, lorsque l'on compte dans ces lieux respectifs une certaine heure donnée.

La question se complique, si au lieu de considérer simplement une distance assignée des centres, on se propose de résoudre, par exemple, le cas du contact des limbes du Soleil & de la Lune, ou en général celui d'une phase quelconque. Il faut alors avoir égard à la variation du diamètre de la Lune, relativement à sa hauteur sur les différens horizons. Il est donc nécessaire de considérer ce nouvel élément. On peut même supposer encore que les rayons s'infléchissent en passant près du limbe de la Lune. Telles sont les difficultés qu'il faut embrasser si l'on veut résoudre

le Problème dans toute sa généralité. Je commencerai par le cas général, je descendrai ensuite aux cas particuliers.

## SECTION SECONDE.

*Des Courbes d'illumination prises dans un sens étendu.*

(9.) Je me propose, dans cette section, de résoudre le Problème des *courbes d'illumination*, prises dans la signification la plus étendue; je vais donc déterminer quels lieux de la Terre observent une phase quelconque lorsque l'on compte dans ces lieux respectifs une même heure quelconque assignée.

Soit

$\sinus$  (demi-diam. horiz. de la  $\odot$ ) =  $\frac{d}{r}$   $\sinus$  (parall. horiz. polaire).

$\vartheta$  =  $\cosinus$  (somme du demi-diam. du  $\odot$  & du demi-diam. horiz. de la  $\odot$ ).

$\vartheta'$  =  $\cosinus$  (différ. du demi-diam. du  $\odot$  & du demi-diam. horiz. de la  $\odot$ ).

$\sigma$  =  $\sinus$  }  
 $\tau$  =  $\cosinus$  } demi-diamètre du Soleil.

$\tau'$  =  $\cosinus$  (demi-diamètre horizontal de la Lune).

$\delta$  =  $\frac{d}{r} \times \frac{\pi}{r} \times \cosinus$  (parallaxe horizontale polaire).

$$E = \xi - \frac{p \pi}{r^2} - \frac{c p q h \pi}{r^2}.$$

J'ai fait voir (*V.<sup>e</sup> Mémoire*, §. 46) que l'on a en général Année 1767.

*Lors du contact extérieur des limbes du Soleil & de la Lune.*

$$\text{Tangente (distance des centres)} = \frac{\sigma \tau'}{\vartheta} + \frac{\delta \tau}{E}.$$

*Lors du contact intérieur des limbes du Soleil & de la Lune.*

$$\text{Tangente (distance des centres)} = \frac{\sigma \tau'}{\vartheta} - \frac{\delta \tau}{E}.$$

Si l'on veut faire entrer dans la solution un nouvel élément qui dépende d'une inflexion de lumière,

Soit  $\mathfrak{S}$  la quantité dont on suppose infléchis les rayons solaires qui rasent le limbe de la Lune;

On fera

$$\sigma = \sinus \text{ (demi-diamètre du Soleil } \mp \mathfrak{S}),$$

suivant que l'on voudra calculer un contact extérieur ou intérieur des limbes.



Année 1767. (10.) J'ai démontré pareillement (*V.<sup>e</sup> Mémoire*, S. 49 & 50) que les équations qui ont lieu pour les contacts, résolvent le Problème pour une phase quelconque. Il est évident en effet, ainsi que je l'ai fait voir, que l'on peut considérer, par exemple, une éclipse de 3 doigts, comme le contact extérieur du limbe de la Lune, & du limbe d'un Soleil dont le rayon seroit égal à la moitié du rayon du disque solaire.

Une éclipse de 6 doigts, comme le contact extérieur du limbe de la Lune & du limbe d'un Soleil dont le rayon seroit nul.

Une Éclipse de 9 doigts, comme le contact intérieur du limbe de la Lune & du limbe d'un Soleil dont le rayon seroit égal à la moitié du rayon du disque solaire.

(11.) Soit enfin

$\lambda$  la tangente de la distance apparente des centres.

$$A = \frac{(A_1)}{\zeta} - \frac{(A_2)}{r^2} + \frac{(A_3)}{r^3} + \frac{(A_4)}{r^4};$$

$$F = \frac{(F_1)}{\zeta} - \frac{(F_2)}{r^2} - \frac{(F_3)}{r^3} + \frac{(F_4)}{r^4};$$

$$E = \xi - \frac{(E_2)}{r^2} - \frac{(E_3)}{r^3}.$$

Année 1765. Il suit du §. 1.<sup>er</sup> du troisième Mémoire, que

$$E^2 r^2 \lambda^2 - A^2 \pi^2 \zeta^2 - \pi^2 \zeta^2 \times (F + \frac{nr}{3600\pi \zeta} \times b)^2 = 0;$$

Donc si l'on suppose

*Contacts intérieurs.*

$$L = \frac{(L_1)}{\pi \zeta \vartheta} - \frac{(L_2)}{\pi \zeta}.$$

*Contacts extérieurs.*

$$L = \frac{(L_1)}{\pi \zeta \vartheta} + \frac{(L_2)}{\pi \zeta}.$$

Lorsque la distance des centres est donnée,

$$L = \frac{r \lambda E}{\pi \zeta}.$$

On a pour déterminer à quel instant physique un lieu situé sous un parallèle donné, observe une phase quelconque, lorsque l'on compte dans ce lieu une certaine heure assignée,

$$b = - \frac{(b_1)}{n r} \times F - \frac{(b_2)}{n r} \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}.$$

$$b = - \frac{(b_1)}{n r} \times F + \frac{(b_2)}{n r} \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}.$$

(12.) Des deux valeurs de  $b$  du §. précédent, la plus négative ou la moins positive appartient au lieu qui voit la phase assignée avant le passage apparent du centre de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative menée par le centre du Soleil. L'autre valeur désigne le lieu qui voit la phase après le passage de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative.

(13.) Rien de plus simple que la détermination de la longitude du lieu qui observe le phénomène; en effet, puisque l'heure que l'on compte dans le lieu est donnée, & que nous venons de déterminer le nombre de secondes horaires, écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène, on aura tout de suite la longitude du lieu par la méthode de l'article VI du III.<sup>e</sup> Mémoire. *Année 1765.*

TABLE des quantités constantes relatives à la présente recherche pour l'Eclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764.

A.		F.		E.	
(A <sub>1</sub> )		(F <sub>1</sub> )		(E <sub>1</sub> )	
$\frac{\psi l}{\zeta} = 73159.$		$\frac{\theta l}{\zeta} = 7354.$		$\xi = 99993.$	
(A <sub>2</sub> )		(F <sub>2</sub> )		(E <sub>2</sub> )	
$\frac{q\theta}{r} = - 0,0586358.$		$\frac{q\omega}{r} = - 0,3195149.$		$\frac{p\pi}{r^2} = - 2,8798346.$	
(A <sub>3</sub> )		(F <sub>3</sub> )		(E <sub>3</sub> )	
$\text{Log. } \frac{p\omega}{r^2} = - 10,3155335.$		$\text{Log. } \frac{p\theta}{r^2} = - 10,0546544.$		$\frac{pq\pi}{r^2} = - 11,8027850.$	
(A <sub>4</sub> )		(F <sub>4</sub> )			
$\frac{pp\theta}{r^2} = - 11,1307920.$		$\frac{pp\omega}{r^2} = - 11,3916711.$			
		(L <sub>1</sub> )		(L <sub>2</sub> )	
$\text{Log. } \frac{3600''\zeta}{n r} = - 6,1490219.$		$\text{Log. } \frac{\sigma r' r}{\pi \zeta \vartheta'} = - 0,5253170.$		$\frac{\sigma r r}{\pi \zeta} = 274151$	
		$\frac{\sigma r' r}{\pi \zeta \vartheta} = - 0,5293732.$			

Mém. 1769,

Q q

## E X E M P L E.

(14.) Lors de l'Eclipsé du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on demande quels lieux situés sous le parallèle boréal de  $51^{\circ} 3'$  ont observé un contact extérieur des limbes à  $9^h 4' 33''$  du matin.

SOLUTION. Puisque la latitude du parallèle est de  $51^{\circ} 3'$  Année 1764. boréale, je conclus (second Mémoire, table 1.<sup>re</sup>) que la latitude corrigée est de  $51^{\circ} 21' 33''$ ; que par conséquent

$$\begin{aligned} s &= + \sinus 51^{\circ} 21' 33'' \\ c &= + \cosin. 51. 21. 33 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Logarithme } s = 9,8926912. \\ \text{Logarithme } c = 9,7954889. \end{array} \right\}$$

L'angle horaire du Soleil est de  $43^{\circ} 51' 45''$ , & l'heure de l'observation est entre six heures du matin & midi. Donc

$$\begin{aligned} g &= - \sinus 43^{\circ} 51' 45'' \\ h &= + \cosin. 43. 51. 45 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Logarithme } g = 9,8406895. \\ \text{Logarithme } h = 9,8579381. \\ \text{Logarithme } cg = 19,6361784. \\ \text{Logarithme } ch = 19,6534270. \end{array} \right\}$$

## TYPE du Calcul.

$$\begin{aligned} A &= + (A_1) - (A_2) - (A_3) + (A_4) \dots (A_7) = 73159. \\ &\quad \begin{array}{r} (A_2) \quad (A_3) \quad (A_4) \\ 9,8926912 \dots \log. s. \quad 19,6361784 \dots \log. cg. \quad 19,6534270 \dots \log. ch \\ -0,0586358. \quad -10,3155335. \quad -11,307910. \\ \hline 9,8340554 \dots \log. 68243. \quad 9,3196449 \dots \log. 10924. \quad 8,5226350 \dots \log. 3331. \end{array} \\ A &= - 12677. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= + (F_1) - (F_2) + (F_3) + (F_4) \dots (F_7) = 7354. \\ &\quad \begin{array}{r} (F_2) \quad (F_3) \quad (F_4) \\ 9,8926912 \dots \log. s. \quad 19,6361784 \dots \log. cg. \quad 19,6534270 \dots \log. ch \\ -0,1195149. \quad -10,0546544. \quad -11,3916712. \\ \hline 9,7731763 \dots \log. 37426. \quad 9,5815240 \dots \log. 38153. \quad 8,2617559 \dots \log. 1827. \end{array} \\ F &= - 2908 \dots \log. F = 8,9959360. \end{aligned}$$

$$E = + (E_1) - (E_2) - (E_3) \dots (E_1) = 99993.$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{l} (E_1) \\ 9,8926912 \dots \log. s. \\ -2,8798346. \\ \hline 7,0128566 \dots \log. 103. \end{array} \quad \begin{array}{l} (E_3) \\ 19,6534270 \dots \log. ch. \\ -11,8027850. \\ \hline 7,8506420 \dots \log. 709. \end{array} \end{array}$$

$$E = + 99181 \dots \log. E = 9,9964285.$$

$$L = + (L_1) + (L_2) \dots L_2 = 274151$$

$$\begin{array}{r} (L_1) \\ + 9,9964285 \dots \log. E. \\ - 0,5293732 \dots \log. \frac{r'r}{\pi \zeta_0} \quad L = + 56728. \\ \hline 9,4670553 \dots \log. 29313. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} L + A = + 44051. \\ L - A = + 69405. \end{array} \right\} \text{Logarithme} \left\{ \begin{array}{l} = 9,6439558. \\ = 9,8413908. \\ \hline 19,4853466. \\ \hline 2. \\ 9,7426733 \dots \log. \sqrt{(L^2 - A^2)}. \end{array} \right.$$

$$b = - (b_1) \mp (b_2)$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{l} (b_1) \\ + 8,9959860 \dots \log. F. \\ - 6,1490219 \dots \log. \frac{3600''}{\pi r} \\ \hline 2,8469641 \dots \log. 703''. \\ b = - 4626''. \end{array} \quad \begin{array}{l} (b_2) \\ + 9,7426733 \dots \log. \sqrt{(L^2 - A^2)}. \\ - 6,1490219 \dots \log. \frac{3600''}{\pi r} \\ \hline 3,5936514 \dots \log. 3923''. \\ b = + 3220''. \end{array} \end{array}$$

Détermination de la Longitude (III.<sup>e</sup> Mém. art. VI). Année 1762

$$\beta = - 19^{\circ} 16' 30''.$$

$$\text{Longitude} = \left\{ \begin{array}{l} + 22^{\circ} 9' 15'' \dots \text{Angle } \alpha. \\ - 43. 51. 45 \dots \text{Angle hor.} \\ + 19. 16. 30 \dots \text{Angle } \beta. \end{array} \right\} = - 2^{\circ} 26' 0'' \text{ occ.}$$

$$\beta = + 13^{\circ} 25' 0''.$$

$$\text{Longitude} = \left\{ \begin{array}{l} + 22^{\circ} 19' 15'' \dots \text{Angle } \alpha. \\ - 43. 51. 45 \dots \text{Angle hor.} \\ - 13. 25. 0 \dots \text{Angle } \beta. \end{array} \right\} = - 35^{\circ} 7' 30'' \text{ occ.}$$

Q q ij

Il y a donc deux points de la Terre qui, situés sous le parallèle boréal de  $51^{\text{d}} 31'$ , ont observé un contact extérieur des limbes, lorsque l'on comptoit dans chacun de ces lieux  $9^{\text{h}} 4' 33''$  du matin; l'un dont la longitude occidentale comptée de Paris est de  $35^{\text{d}} 7' 30''$ , l'autre dont la longitude occidentale est de  $2^{\text{d}} 26' 0''$ . Dans le premier, la Lune, à l'instant du phénomène, avoit passé depuis long-temps par la perpendiculaire à l'orbite relative. Dans le second, au contraire, la Lune étoit encore éloignée de cette perpendiculaire.

Il est inutile d'avertir que si l'un des deux facteurs qui sont sous le signe radical étoit négatif, & que l'autre fut positif, la solution seroit imaginaire; il n'y auroit donc aucun lieu qui verroit le phénomène à l'heure assignée sous le parallèle donné.

Remarquons en général que l'on peut se servir des équations aux contacts, pour résoudre les questions analogues, relativement à une distance assignée des centres. Il ne s'agit que de supprimer dans ces équations le terme  $\frac{\delta^2 \tau \tau'}{\pi \zeta}$ , & de substituer  $\lambda$  à  $\frac{\delta' \tau}{\delta}$  ou à  $\frac{\delta' \tau'}{\delta}$ .

### SECTION TROISIÈME.

*D'une question du genre de maximis & minimis, relative à la recherche précédente.*

(15.) Si l'on calcule les différens lieux de la Terre qui observent une même phase sous les différens parallèles terrestres, lorsque l'on compte respectivement dans ces lieux la même heure assignée, il sera aisé de remarquer qu'ils n'ont pas la même longitude; cet élément dépend de la latitude du lieu. Quoique la différence des latitudes occasionne une très-grande diversité dans les longitudes correspondantes; il y a cependant une certaine latitude au-delà de laquelle les longitudes sont imaginaires: on peut donc demander la dernière latitude qui donnera des longitudes réelles, & conséquemment le dernier parallèle terrestre où l'on observera la phase assignée à l'heure donnée.

(16.) Rien de plus simple que la solution du Problème.

En effet, puisqu'il s'agit de déterminer le point où l'expression de la longitude passe du réel à l'imaginaire, il est évident que l'on a les équations suivantes.

*Contacts intérieurs.*

$$\frac{\sigma\tau'E}{\pi\zeta\vartheta} - \frac{\delta\tau\tau}{\pi\zeta} + A = 0. \quad \left| \quad \frac{\sigma\tau'E}{\pi\zeta\vartheta} - \frac{\delta\tau\tau}{\pi\zeta} - A = 0. \right.$$

*Contacts extérieurs.*

$$\frac{\sigma\tau'E}{\pi\zeta\vartheta} + \frac{\delta\tau\tau}{\pi\zeta} + A = 0. \quad \left| \quad \frac{\sigma\tau'E}{\pi\zeta\vartheta} + \frac{\delta\tau\tau}{\pi\zeta} - A = 0. \right.$$

On peut ordonner les équations par rapport à la latitude, ou par rapport à l'heure. On peut donc indifféremment résoudre ces deux Problèmes.

*Étant donnée une phase quelconque, on demande la plus grande latitude de tous les lieux qui observeront cette phase à une même heure assignée.*

*Étant donnée une phase & un parallèle quelconques, on demande relativement à quelle heure particulière ce parallèle terrestre est un maximum de latitude.*

Comme ces deux manières d'envisager la question reviennent à peu-près au même, je me contenterai de résoudre le premier Problème.

(17.) Soit

*Contacts intérieurs.*

$$\begin{array}{l} M = \frac{(M_1)}{\pi\zeta\vartheta} - \frac{(M_2)}{\pi\zeta} + \frac{(M_3)}{\zeta} \\ N = \frac{(N_1)}{\zeta\vartheta} + \frac{(N_2)}{r} \\ P = \frac{(P_1)}{\zeta\vartheta^2} - \frac{(P_2)}{r^2} + \frac{(P_3)}{r^2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} M = \frac{(M_1)}{\pi\zeta\vartheta} - \frac{(M_2)}{\pi\zeta} - \frac{(M_3)}{\zeta} \\ N = \frac{(N_1)}{\zeta\vartheta} - \frac{(N_2)}{r} \\ P = \frac{(P_1)}{\zeta\vartheta^2} + \frac{(P_2)}{r^2} + \frac{(P_3)}{r^2} \end{array} \right.$$

## Contacts extérieurs.

$$\begin{array}{l|l}
 M = \frac{(M_1)}{\pi \zeta \delta} + \frac{(M_2)}{\pi \zeta} + \frac{(M_3)}{\zeta} & M = \frac{(M_1)}{\pi \zeta \delta} + \frac{(M_2)}{\pi \zeta} - \frac{(M_3)}{\zeta} \\
 N = \frac{(N_1)}{\zeta \delta} + \frac{(N_2)}{r} & N = \frac{(N_1)}{\zeta \delta} - \frac{(N_2)}{r} \\
 P = \frac{(P_1)}{\zeta \delta r^2} - \frac{(P_2)}{r^2} - \frac{(P_3)}{r^2} & P = \frac{(P_1)}{\zeta \delta r^2} + \frac{(P_2)}{r^2} + \frac{(P_3)}{r^2}
 \end{array}$$

Les équations du §. 16 deviendront

$$Mr - Ns - Pc = 0.$$

Soit maintenant  $H$  un angle aigu & positif dont la tangente égale  $\frac{Pr}{N}$ . A cause de  $\text{tang. } H = \frac{r \times \sin H}{\cos H}$ , l'équation précédente deviendra

$$\frac{s \times \cos H + c \times \sin H}{r} - \frac{M}{N} \times \cos H = 0;$$

Soit donc  $D, D'$  les deux angles qui ont pour expression de leur sinus,  $\frac{M}{N} \times \cos H$ , on aura

$$\text{Latitudes demandées} = \left\{ \begin{array}{l} D - H \\ D' - H \end{array} \right\}$$

(18.) On est parvenu à l'équation  $\frac{s \times \cos H + c \times \sin H}{r}$

$$= \frac{M}{N} \times \cos H, \text{ en partant de l'équation } Mr - Ns - Pc = 0;$$

mais dans cette dernière équation les valeurs  $M, N, P$ , peuvent changer de signes relativement aux différentes éclipses. Pour éviter toute incertitude je vais prescrire l'opération indiquée par l'analyse pour chacune des combinaisons qui peuvent affecter les termes de l'équation  $Mr - Ns - Pc = 0$ .

Les différentes combinaisons de signes qui peuvent affecter les termes de la dernière équation se réduisent à quatre.

$$Mr. - Ns - Pc = 0 \dots\dots 1.^{\text{er}} \text{ CAS.}$$

$$Mr - Ns + Pc = 0 \dots\dots 2.^{\text{e}} \text{ CAS.}$$

$$Mr + Ns - Pc = 0 \dots\dots 3.^{\text{e}} \text{ CAS.}$$

$$Mr + Ns + Pc = 0 \dots\dots 4.^{\text{e}} \text{ CAS.}$$

Dans tous ces cas, par le moyen de l'équation, tangente  $H = \frac{Pr}{N}$ , déterminez d'abord l'angle  $H$ , que vous supposerez toujours aigu & positif.

Évaluez ensuite les deux angles qui ont pour sinus  $\frac{M}{N}$   $\times \cos. H$ , & que je nomme  $D, D'$ , en observant de les supposer moindres que 180 degrés, & de les regarder comme positifs quel que soit le signe de  $\frac{M}{N} \times \cosinus H$ .

Vous aurez alors,

## PREMIER CAS.

$$\text{Latitudes demandées} = \left\{ \begin{array}{l} D - H \\ D' - H \end{array} \right\}$$

## SECOND CAS.

$$\text{Latitudes demandées} = \left\{ \begin{array}{l} D + H \\ D' + H \end{array} \right\}$$

## TROISIÈME CAS.

$$\text{Latitudes demandées} = \left\{ \begin{array}{l} -D + H \\ -D' + H \end{array} \right\}$$

## QUATRIÈME CAS.

$$\text{Latitudes demandées} = \left\{ \begin{array}{l} -D - H \\ -D' - H \end{array} \right\}$$

Si la phase donnée ne pouvoit pas être observée sur la Terre à l'heure assignée, on en seroit averti par une expression absurde; on auroit alors pour expression du sinus des angles  $\left\{ \frac{D}{D'} \right\}$  une quantité plus grande que le rayon.

Il pourroit arriver quelquefois que l'expression de la latitude fut donnée sous la forme d'un arc  $\left\{ \begin{array}{l} +K \\ -K \end{array} \right\}$  plus grand que 180 degrés; on substituera alors à cette expression cette nouvelle valeur  $\left\{ \begin{array}{l} -360^{\text{e}} + K \\ +360^{\text{e}} - K \end{array} \right\}$ .



(19). Dans l'usage des formules, on peut trouver des latitudes de quatre espèces.

Des latitudes positives, depuis 0<sup>d</sup> jusqu'à 90<sup>d</sup>

Des latitudes positives, depuis 90 jusqu'à 180.

Des latitudes négatives, depuis 0 jusqu'à 90.

Des latitudes négatives, depuis 90 jusqu'à 180.

Les latitudes positives ou négatives depuis 0 degré jusqu'à 90 degrés, déterminent les dernières latitudes qui voient la phase donnée à l'heure assignée; les latitudes positives ou négatives depuis 90 degrés jusqu'à 180 degrés, apprennent les dernières latitudes qui observent la phase donnée, non pas précisément à l'heure assignée, mais lorsque l'on compte dans le lieu douze heures plus tôt ou douze heures plus tard. On n'oubliera pas que les latitudes positives indiquent des latitudes boréales, & que les latitudes négatives indiquent des latitudes australes.

On ne compte en Astronomie les latitudes que depuis 0 degré jusqu'à 90 degrés: lors donc que l'on aura par un résultat de calcul, une latitude corrigée plus grande que 90 degrés; pour en conclure la latitude vraie, on prendra le supplément de la latitude corrigée, & on achèvera le calcul, comme si ce supplément eût été donné par la formule.

(20.) Lorsque l'heure & la latitude seront connues, rien de plus simple que de déterminer le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène. Soit

$$F = \frac{(F_1)}{\zeta} - \frac{(F_2)}{r_1} - \frac{(F_3)}{r_2} + \frac{(F_4)}{r_3}$$

on aura

$$b = \frac{(B_1)}{3600 \zeta} \times F.$$

Dans

Dans l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on avoit

*Contacts intérieurs des limbes du Soleil & de la Lune.*

$M = + 75574 \dots \log. M = 9,8783724.$	$M = - 70744 \dots \log. M = 9,8496896.$
$N = + 87409 \dots \log. N = 9,9415562.$	$N = - 87331 \dots \log. N = 9,9411684.$
Logarithmes $\left\{ \begin{array}{l} (P_1) = - 2,3281020. \\ (P_2) = - 1,1307920. \\ (P_3) = - 0,3155335. \end{array} \right.$	Logarithmes $\left\{ \begin{array}{l} (P_1) = - 2,3281020. \\ (P_2) = - 1,1307920. \\ (P_3) = - 0,3155335. \end{array} \right.$

*Contacts extérieurs des limbes du Soleil & de la Lune.*

$M = + 130127 \dots \log. M = 10,1143674.$	$M = - 16191 \dots \log. M = 9,2092738.$
$N = + 87409 \dots \log. N = 9,9415562.$	$N = - 87331 \dots \log. N = 9,9411684.$
Logarithmes $\left\{ \begin{array}{l} (P_1) = - 2,3321581. \\ (P_2) = - 1,1307920. \\ (P_3) = - 0,3155335. \end{array} \right.$	Logarithmes $\left\{ \begin{array}{l} (P_1) = - 2,3321581. \\ (P_2) = - 1,1307920. \\ (P_3) = - 0,3155335. \end{array} \right.$

### E X E M P L E.

(21.) On demande la plus grande & la plus petite latitude de tous les lieux qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, ont vu un contact extérieur des limbes, lorsque l'on comptoit onze heures du matin dans ces différens lieux respectifs.

SOLUTION. Puisque l'on comptoit onze heures du matin dans le lieu, on avoit

$$\left. \begin{array}{l} g = - \sinus 15^d \\ h = + \cosin. 15 \end{array} \right\} \text{Logarithme} \left\{ \begin{array}{l} g = 9,4129962. \\ h = 9,9849438. \end{array} \right.$$

$$P = + (P_1) - (P_2) + (P_3). \quad | \quad P = + (P_1) + (P_2) - (P_3).$$

$\begin{array}{r} (P_1) \\ +9,9849438 \dots \log. h. \\ -2,3321581. \\ \hline 7,6527857 \dots \log. 450. \end{array}$	$\begin{array}{r} (P_2) \\ +9,9849438 \dots \log. h. \\ -1,1307920. \\ \hline 8,8541518 \dots \log. 7147. \end{array}$	$\begin{array}{r} (P_3) \\ +9,4129962 \dots \log. g. \\ -0,3155335. \\ \hline 9,0974627 \dots \log. 12516. \end{array}$
---	--	---

$$P = + 5819 \dots \log. P = 8,7648484.$$

Et attendu que  $P$ ,  $N$  &  $M$  sont des quantités positives, on est dans le premier cas.

Mém. 1769.

$$P = - 4919 \dots \log. P = 8,6918768.$$

Et attendu que  $P$ ,  $N$  &  $M$  sont des quantités toutes négatives, on est dans le premier cas.

Rr

$$\begin{array}{r} + 18,7648484 \dots \log. Pr. \\ - 9,9415562 \dots \log. N. \\ \hline 8,8232922 \dots \log. \tan. H. \end{array}$$

$$H = 3^d 48' 31''.$$

$$\begin{array}{r} + 10,1143674 \dots \log. M. \\ + 9,9990397 \dots \log. \cos. H. \\ \hline + 20,1134071. \\ - 9,9415562 \dots \log. N. \end{array}$$

$$10,1718509 \dots \log. \sin. \left\{ \begin{array}{l} D \\ D' \end{array} \right\}$$

Résultat imaginaire (S. 18).

$$\begin{array}{r} + 18,6918768 \dots \log. Pr. \\ - 9,9411684 \dots \log. N. \\ \hline 8,7507084 \dots \log. \tan. H. \end{array}$$

$$H = 3^d 13' 24''.$$

$$\begin{array}{r} + 9,2092738 \dots \log. M. \\ + 9,9993124 \dots \log. \cos. H. \\ \hline + 19,2085862. \\ - 9,9411684 \dots \log. N. \end{array}$$

$$9,2674178 \dots \log. \sin. \left\{ \begin{array}{l} D \\ D' \end{array} \right\}$$

$$D = 10^d 40' 1''. \quad D' = 169^d 19' 59''.$$

$$\begin{array}{r} + 10^d 40' 1'' \dots D. \\ - 3. 13. 24 \dots H. \end{array}$$

$$\text{Lat. cor.} = + 7. 26. 37.$$

$$+ 0. 2. 30. (S. 7)$$

$$\text{Lat. vr.} = 7. 29. 7 \text{ boréal.}$$

Cette solution répond à 11<sup>h</sup> du mal.

$$\text{Lat. cor.} = + 169^d 19' 59'' \dots D.$$

$$- 3. 13. 24 \dots H.$$

$$+ 166. 6. 35.$$

$$+ 13. 53. 25 \text{ (sup. la cor.)}$$

$$+ 0. 4. 29. (S. 7)$$

$$\text{Lat. vr.} = 13. 57. 54 \text{ boréal.}$$

Cette solution répond à 11 heures du soir (S. 19). Le Soleil étoit couché lors du phénomène.

Je ne donnerai point le type du calcul pour les longitudes, attendu que ce n'est qu'un cas particulier de l'exemple du S. 14, dans lequel  $\sqrt{L^2 - A^2} = 0$ .

(22.) La solution précédente nous fait voir que l'on a pu

observer un contact extérieur des limbes à onze heures du matin sous tous les parallèles, depuis  $7^{\text{d}} 29' 7''$  de latitude boréale jusqu'au pôle boréal; & que sans l'épaisseur de la Terre, on auroit pareillement pu observer un contact extérieur des limbes à onze heures du soir sous les parallèles compris entre le pôle boréal & le parallèle de  $13^{\text{d}} 57' 54''$ .

Si l'on traçoit sur un globe, la courbe des contacts extérieurs des limbes, correspondante à onze heures, pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on verroit que cette courbe est composée de deux ovales qui se coupent au pôle; le premier, celui qui descend jusqu'au parallèle boréal de  $7^{\text{d}} 29' 7''$ , appartient à onze heures du matin; le second, celui qui ne descend que jusqu'au parallèle de  $13^{\text{d}} 57' 54''$ , appartient à onze heures du soir.

(23.) On peut demander relativement à chacun de ces ovales, quelle est leur plus grande largeur respective, évaluée en degrés de longitude: rien de plus simple que la solution de ce Problème; en effet, il est aisé de voir que sous chaque parallèle terrestre, les distances des points communs aux ovales & aux parallèles, dépendent de la quantité radicale que renferme l'expression de  $b$ : la théorie de *maximis* & *minimis*, donne donc pour condition du Problème,

*Contacts intérieurs.*

$$\left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \delta} - \frac{\sigma \tau' p s}{\zeta \delta r} - \frac{\sigma \tau' c p q h}{\zeta \delta r^2} - \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta} \right) \times \left( \frac{\sigma \tau' r}{\zeta \delta} \times (p r^2 c - q q h s) \right) \\ + \left( -\frac{\delta l}{\zeta} + \frac{q s \phi}{r^2} - \frac{c g p w}{r^2} - \frac{c h p p \phi}{r^2} \right) \times (q \phi r^2 c + g \phi w r s + h p \phi \phi s) \Bigg\} = 0.$$

*Contacts extérieurs.*

$$\left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \delta} - \frac{\sigma \tau' p s}{\zeta \delta r} - \frac{\sigma \tau' c p q h}{\zeta \delta r^2} + \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta} \right) \times \left( \frac{\sigma \tau' r}{\zeta \delta} \times (p r^2 c - q q h s) \right) \\ + \left( -\frac{\delta l}{\zeta} + \frac{q s \phi}{r^2} - \frac{c g p w}{r^2} - \frac{c h p p \phi}{r^2} \right) \times (q \phi r^2 c + g \phi w r s + h p \phi \phi s) \Bigg\} = 0.$$

Il est aisé de voir que les opérations indiquées par l'analyse conduiroient à une équation complète du quatrième degré; on

## 516 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

auroit donc quatre latitudes, dont chacune répondroit à un *maximum* ou à un *minimum* de largeur des ovals.

Comme la question proposée me paroît plus curieuse qu'utile, je me contente d'indiquer les équations qui la résolvent: il seroit facile de parvenir au résultat final, si quelque circonstance importante l'exigeoit.

(24.) La courbe d'illumination que nous avons discutée dans le §. 22, peut donner lieu à la remarque suivante; nous avons dit que cette courbe s'étendoit depuis le parallèle boréal de  $7^{\text{d}} 29' 7''$  jusqu'au pôle, & depuis le pôle jusqu'au parallèle de  $13^{\text{d}} 57' 54''$ . Le pôle n'est une limite que parce qu'une des deux solutions que sembloient promettre les équations du §. 17, est imaginaire. En général, si les deux solutions sont imaginaires, comme il arrive presque toujours dans les passages de Vénus sur le disque du Soleil, la courbe n'a d'autres limites que les pôles; elle est composée d'*ellipsoïdes* qui se coupent aux points polaires. Si les deux solutions sont réelles, la courbe ne passe point du tout par les pôles, elle est composée de deux *ovals*. Si l'une des deux solutions est réelle, & l'autre imaginaire, les deux *ovals* se coupent à l'un des pôles.

## SECTION QUATRIÈME.

### *Des Courbes d'illumination proprement dites.*

(25.) Après avoir discuté les courbes d'illumination prises dans une signification étendue, je passe à la discussion de ces courbes prises dans l'acception ordinaire des Astronomes; ce sont celles qui répondent au lever & au coucher du Soleil. J'ai déjà parlé de leur usage, elles sont, sans contredit, les plus intéressantes & les plus connues de toutes celles comprises dans le système général des courbes d'illumination. Je continuerai dans cette recherche, de supposer que l'instant vrai du lever & du coucher du Soleil est celui où l'Observateur se trouve dans le plan de l'horizon absolu.

On a vu que le cosinus de l'angle horaire qui répond à

l'instant où l'Observateur se trouve dans l'horizon absolu, a pour expression  $h = -\frac{psr^2}{cpg}$ . Si donc l'on substitue cette valeur dans l'expression de  $A$ , de  $F$  & de  $E$  du §. 11, que d'ailleurs l'on fasse pour abréger le calcul,

$$f = \sqrt{\left[\left(\frac{pg}{r} + \frac{s \sqrt{(p^2 q^2 + r^2 p^2)}}{r^2}\right) \times \left(\frac{pg}{r} - \frac{s \sqrt{(p^2 q^2 + r^2 p^2)}}{r^2}\right)\right]}.$$

On aura

<i>Lever du Soleil.</i>		<i>Coucher du Soleil.</i>
$A = \frac{(A_1)}{\zeta} - \frac{(A_2)}{q} - \frac{(A_3)}{q}.$		$A = \frac{(A_1)}{\zeta} - \frac{(A_2)}{q} + \frac{(A_3)}{q}.$
$F = \frac{(F_1)}{\zeta} - \frac{(F_2)}{q} + \frac{(F_3)}{q}.$		$F = \frac{(F_1)}{\zeta} - \frac{(F_2)}{q} - \frac{(F_3)}{q}.$
$E = \xi.$		$E = \xi.$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations du §. 11, & que l'on suppose

<i>Contacts intérieurs.</i>		<i>Contacts extérieurs.</i>
$L = \frac{(L_1)}{\pi \zeta n} - \frac{(L_2)}{\pi \zeta},$		$L = \frac{(L_1)}{\pi \zeta n} + \frac{(L_2)}{\pi \zeta},$

on aura

$$b = -\frac{(b_1)}{nr} \times F - \frac{3600\zeta}{nr} \sqrt{(L + A) \times (L - A)};$$

$$b = -\frac{(b_1)}{nr} \times F + \frac{3600\zeta}{nr} \sqrt{(L + A) \times (L - A)}.$$

On déterminera l'heure que l'on compte dans le lieu par le moyen de l'équation

$$h = -\frac{(h_1)}{cpg}.$$

Je ne répéterai point ici les remarques que j'ai faites (S. 12 & 13) sur la double valeur de  $b$ , & sur la détermination de la longitude; on peut relire ces paragraphes.

*TABLE des quantités constantes, relatives aux courbes d'illumination, proprement dites, pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764.*

$f.$	
$\frac{p^2}{r} = + 100210.$	
Logarithme $\frac{\sqrt{(p^2 q^2 + q^2 r^2)}}{r^2} = + 0,0024293.$	
<u>A.</u>	<u>F.</u>
(A <sub>1</sub> )	(F <sub>1</sub> )
$\frac{q^2}{r} = 73159.$	$\frac{p^2}{r} = 7354.$
(A <sub>2</sub> )	(F <sub>2</sub> )
Log. $\frac{p}{q} = - 0,0555664.$	Log. $\frac{w}{q} = - 0,3164455.$
(A <sub>3</sub> )	(F <sub>3</sub> )
Log. $\frac{w}{q} = - 0,3164455.$	Log. $\frac{p}{q} = - 0,0555664.$
Contact intérieur.	Contact extérieur.
$L = + 2415.$	$L = + 56968.$
Log. $\frac{3600''}{q^2} = - 6,1490219.$	Log. $\frac{p^2}{p^2} + 8,9229504.$

E X E M P L E.

(26.) Lors de l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on demande quels ont été sous les différens parallèles terrestres, les différens lieux qui ont vu des contacts extérieurs des limbes du Soleil & de la Lune, au lever & au coucher du Soleil?

SOLUTION. Par le moyen de la Table précédente, j'évalue les valeurs & le signe des grandeurs  $f$ ,  $A$ ,  $F$ , correspondantes

au lever & au coucher du Soleil, pour les différens parallèles terrestres, en faisant grande attention au signe des termes qui les composent. Je substitue ces valeurs dans la plus négative des valeurs de  $b$  s'il est question d'un contact arrivé avant le passage de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative, & dans la moins négative des valeurs de  $b$  s'il est question d'un contact arrivé après le passage de la Lune par la perpendiculaire; je conclus le nombre des secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène: je calcule enfin l'heure que l'on compte dans le lieu par le moyen de l'équation  $h = \frac{pr^2}{p^2q}$ ; & je déduis la longitude du lieu par la méthode de l'article VI du troisième Mémoire.

Année 1765.

## TYPE du Calcul.

Parallèle boréal de 30°.

Coucher du Soleil.

$$\left. \begin{array}{l} s = + \sin. 49^\circ 50' 28'' \\ c = + \cos. 49. 50. 28 \end{array} \right\} \text{Log.} \left\{ \begin{array}{l} s = 9,8832405, \\ c = 9,8094988. \\ \frac{s}{c} = + 0,0737417. \end{array} \right.$$

$$+ 9,8832405 \dots \dots \dots \log. s.$$

$$+ 0,0024293.$$

$$9,8856698 \dots \dots \dots \log. 76854.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{pq}{r} + \frac{s\sqrt{r^2y^2 + p^2p^2}}{r^2} = + 177064 \\ \frac{pq}{r} - \frac{s\sqrt{p^2q^2 + r^2r^2}}{r^2} = + 23356 \end{array} \right\} \text{Log.} \left\{ \begin{array}{l} = 10,2481306. \\ = 9,3683985. \\ \hline 19,6165291. \\ \hline 2. \end{array} \right.$$

$$\log. f = 9,8082645.$$

$$A = + (A_1) - (A_2) + (A_3) \dots \dots \dots (A_1) = 73159.$$

(A<sub>2</sub>)(A<sub>3</sub>)

$$+ 9,8832405 \dots \log. s.$$

$$+ 9,8082645 \dots \log. f.$$

$$- 0,0555664.$$

$$- 0,3164455.$$

$$A = + 36945.$$

$$9,8276741 \dots \log. 67247.$$

$$9,4918190 \dots \log. 31033.$$



320 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

$$F = + (F_1) - (F_2) - (F_3) \dots (F_1) = 7354$$

$$\begin{array}{rcl} & (F_2) & (F_3) \\ + 9,8832405 \dots \log. a & & + 9,8082645 \dots \log. f. \\ - 0,3164455 & & - 0,0555664 \\ \hline 9,5667950 \dots \log. 36880. & & 9,7526981 \dots \log. 56585. \\ F = - 86111 \dots \log. F = 9,9350586. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} L + A = + 93913. \\ L - A = + 20023. \end{array} \right\} \log. \left\{ \begin{array}{l} = 9,9727257. \\ = 9,3015291. \\ \hline 19,2742548. \\ \hline 2. \\ \hline 9,6371274 \dots \log. \sqrt{L^2 - A^2} \end{array} \right.$$

$$b = + (b_1) - (b_2)$$

$$\begin{array}{rcl} & (b_1) & (b_2) \\ + 9,9350586 \dots \log. F. & & + 9,6371274 \dots \log. \sqrt{L^2 - A^2} \\ - 6,1490219. & & - 6,1490219. \\ \hline 3,7860367 \dots \log. 6110. & & 3,4881055 \dots \log. 3077. \\ b = + 3033. & & b = + 9187. \end{array}$$

$$h = - (h_1)$$

$$\begin{array}{l} + 8,9229504 \dots \log. \frac{pr^2}{pq} \\ + 0,0737417 \dots \log. \frac{s}{t} \end{array}$$

$$\hline 8,9966921.$$

$$\begin{array}{l} \text{Angle horaire} = + 95^\circ 41' 43'' \\ \beta = + 12^\circ 38' 15'' \end{array}$$

$$\text{Longitude} = \left\{ \begin{array}{l} + 22^\circ 9' 15'' \dots \text{angle } \alpha. \\ + 95. 41. 43 \dots \text{angle hor.} \\ - 12. 38. 15 \dots \text{angle } \beta. \end{array} \right\} = 105^\circ 12' 43'' \text{ orient}$$

$$\beta = + 38^\circ 16' 45''$$

$$\text{Longitude} = \left\{ \begin{array}{l} + 22^\circ 9' 15'' \dots \text{angle } \alpha. \\ + 95. 41. 43 \dots \text{angle hor.} \\ - 38. 16. 45 \dots \text{angle } \beta. \end{array} \right\} = 79^\circ 34' 13'' \text{ orient}$$

Le

Les lieux qui sous le parallèle boréal de  $50^d$ , ont vu un contact extérieur des limbes au coucher du Soleil, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, sont donc plus orientaux que Paris, l'un de  $79^d 34' 13''$ , & l'autre de  $105^d 12' 43''$ . Le centre de la Lune avoit passé depuis long-temps par la perpendiculaire à l'orbite relative lors du premier phénomène; dans le second lieu au contraire, la Lune étoit encore éloignée de cette perpendiculaire.

(27.) Quoique rigoureusement parlant, des deux valeurs de  $b$ , l'une appartienne au lieu qui voit la phase assignée avant le passage apparent du centre de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative, menée par le centre du Soleil, & que l'autre désigne le lieu qui voit la phase après le passage de la Lune par la perpendiculaire; il est assez généralement vrai que le commencement de l'Éclipse ou la formation de l'Anneau coïncident avec le premier phénomène; que la fin de l'Éclipse ou la rupture de l'Anneau coïncident avec le second: cette règle cependant n'est pas infailible, ainsi que je le ferai voir par la suite; je donnerai une méthode pour s'assurer de son exactitude dans les cas où l'on pourroit avoir quelques soupçons sur la légitimité de la conclusion.

(28.) Les calculs du §. 26, peuvent également servir à déterminer huit points de la Terre, quatre sous le parallèle boréal & quatre sous le parallèle austral; ces huit points sont ceux relativement auxquels à l'instant des contacts, les sinus & les cosinus de latitude & d'angle horaire, ont la même valeur absolue, & ne diffèrent que par les signes. Un exemple va nous éclaircir,

*Parallèle boréal de 50°.*

$$r = + \sinus 49^{\circ} 50' 28'' \quad c = + \cosinus 49^{\circ} 50' 28'' \\ \text{logarithme } f = 9,8082645.$$

*Commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil.*

$$\text{Angle horaire} = + 95^{\circ} 41' 43'' \\ A = + (A_1) - (A_2) + (A_3) = + 36945. \\ F = + (F_1) - (F_2) - (F_3) = - 86111. \\ \log. \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9,6371274. \\ b = + (b_1) - (b_2) = + 3033''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus oriental que Paris, de  $105^{\circ} 12' 43''$ .

*Fin de l'Éclipse au coucher du Soleil.*

$$\text{Angle horaire} = + 95^{\circ} 41' 43'' \\ A = + (A_1) - (A_2) + (A_3) = + 36945. \\ F = + (F_1) - (F_2) - (F_3) = - 86111. \\ \log. \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9,6371274. \\ b = + (b_1) + (b_2) = + 9187''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus oriental que Paris, de  $79^{\circ} 34' 13''$ .

*Commencement de l'Éclipse au lever du Soleil.*

$$\text{Angle horaire} = - 95^{\circ} 41' 43'' \\ A = + (A_1) - (A_2) - (A_3) = - 25121. \\ F = + (F_1) - (F_2) + (F_3) = + 27099. \\ \log. \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9,7086767. \\ b = - (b_1) - (b_2) = - 5548''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus occidental que Paris, de  $50^{\circ} 25' 28''$ .

*Fin de l'Éclipse au lever du Soleil.*

$$\text{Angle horaire} = - 95^{\circ} 41' 43''.$$

$$A = + (A_1) - (A_2) - (A_3) = - 25121.$$

$$F = + (F_1) - (F_2) + (F_3) = + 27059.$$

$$\log. \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9.7086767.$$

$$b = - (b_1) + (b_2) = + 1708''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus occidental que Paris, de  $80^{\circ} 39' 28''$ .

*Parallèle austral de  $50^{\circ}$ .*

$$s = - \sinus 49^{\circ} 50' 28'' \quad c = + \cosinus 49^{\circ} 50' 28''.$$

$$\text{logarithme } f = 9.8082645.$$

*Commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil.*

$$\text{Angle horaire} = + 95^{\circ} 41' 43''.$$

$$A = + (A_1) + (A_2) + (A_3) = + 171439.$$

$$F = + (F_1) + (F_2) - (F_3) = - 12351.$$

$$\sqrt{(L^2 - A^2)} \text{ imaginaire.}$$

Il n'y a donc aucun lieu sous le parallèle austral de  $50^{\circ}$ , qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, ait vu commencer l'Éclipse au coucher du Soleil.

*Fin de l'Éclipse au coucher du Soleil.*

$$\text{Angle horaire} = + 95^{\circ} 41' 43''.$$

$$A = + (A_1) + (A_2) + (A_3) = + 171439.$$

$$F = + (F_1) + (F_2) - (F_3) = - 12351.$$

$$\sqrt{(L^2 - A^2)} \text{ imaginaire.}$$

Il n'y a donc aucun lieu sous le parallèle austral de  $50^{\circ}$ , qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, ait vu la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil.

*Commencement de l'Éclipse au lever du Soleil.*

$$\text{Angle horaire} = - 95^{\circ} 41' 43''.$$

$$A = + (A_1) + (A_2) - (A_3) = + 109373.$$

$$F = + (F_1) + (F_2) + (F_3) = + 100819.$$

$$\sqrt{(L^2 - A^2)} \text{ imaginaire.}$$

Il n'y a donc aucun lieu sous le parallèle austral de  $50^{\circ}$ , qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, ait vu commencer l'Éclipse au lever du Soleil.

*Fin de l'Éclipse au lever du Soleil.*

$$\text{Angle horaire} = - 95^{\circ} 41' 43''.$$

$$A = + (A_1) + (A_2) - (A_3) = + 109373.$$

$$F = + (F_1) + (F_2) + (F_3) = + 100819.$$

$$\sqrt{(L^2 - A^2)} \text{ imaginaire.}$$

Il n'y a donc aucun lieu sous le parallèle austral de  $50^{\circ}$ , qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, ait vu la fin de l'Éclipse au lever du Soleil.

## SECTION CINQUIÈME.

*Des Sommets des courbes d'illumination.*

(29.) Si l'on trace la courbe d'illumination pour le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on verra que cette courbe ne s'est pas étendue indistinctement sous toutes les latitudes; il y a une infinité de parallèles terrestres où l'on n'a pu observer des contacts au lever & au coucher du Soleil: il est donc intéressant de connoître les dernières latitudes qui observent ce phénomène.

Deux causes peuvent empêcher les courbes d'illumination de s'étendre sous une latitude donnée; la première, lorsque les distances des centres correspondantes au lever & au coucher du Soleil pour les différens points du parallèle, surpassent toutes la distance, qui seule pourroit faire observer le phénomène. La seconde, lorsque le Soleil ne se lève ou ne se couche pas sous le parallèle assigné. En effet, vainement demanderoit-on quel point du parallèle observe le commencement ou la fin de l'Éclipse

lorsque le Soleil est à l'horizon, si cette dernière condition est impossible.

(30.) Si l'on jette les yeux sur les équations du §. 25, on verra que la quantité  $b$  peut être imaginaire par deux suppositions: la première, lorsque  $A$  &  $F$  sont imaginaires; la seconde, lorsque  $A$  &  $F$  étant réels, le radical que renferme le dernier terme, est imaginaire. Nous avons donc deux suppositions différentes à discuter.

PREMIÈRE SUPPOSITION.

(31.) Les quantités  $A$  &  $F$  dépendent, quant à leur nature; de la valeur de  $f$ ; la supposition de  $f = 0$ , doit donc donner une des limites des courbes d'illumination: on remarquera que  $A$  &  $F$  sont alors les mêmes pour le lever & le coucher du Soleil. C'est le cas où le Soleil est à l'horizon dans le méridien, & par conséquent le cas où il se couche & se lève au même instant.

De la supposition de  $f = 0$ , combinée avec  $h = -\frac{p^2 r^2}{c p q}$

on tire

$$g^2 q^2 r^2 - p^2 s^2 r^2 - g^2 q^2 s^2 = 0; h = \pm r; g = 0;$$

$$s = \pm \frac{q}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + p^2 r^2)}};$$

on a donc, pour résoudre le Problème, les équations suivantes:

$$s = + \frac{q}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + p^2 r^2)}} \quad s = - \frac{q}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + p^2 r^2)}}$$

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{p}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + p^2 r^2)}} \quad A = \frac{\psi l}{\zeta} + \frac{p}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + p^2 r^2)}}$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{p}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + p^2 r^2)}} \quad F = \frac{\theta l}{\zeta} + \frac{p}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + p^2 r^2)}}$$

Angle horaire à l'instant du phénomène = .....  $\left\{ \begin{array}{l} 0^d 0' 0'' \text{,} \\ \text{si la déclinaif. du Soleil est australe.} \\ + 180^d 0' 0'' \text{,} \\ \text{si la déclinaif. du Soleil est boréale.} \end{array} \right.$

Angle horaire à l'instant du phénomène = .....  $\left\{ \begin{array}{l} 0^d 0' 0'' \text{,} \\ \text{si la déclinaif. du Soleil est boréale.} \\ + 180^d 0' 0'' \text{,} \\ \text{si la déclinaif. du Soleil est australe.} \end{array} \right.$

326 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Le reste du calcul est le même que pour le cas général (S. 25).

Année 1766. J'ai déjà remarqué (IV.<sup>e</sup> Mém. S. 66) que  $\frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + r^2 r^2)}}$  est l'expression de celui des demi-diamètres terrestres qui fait, avec le plan de l'Équateur, un angle égal au complément de la déclinaison du Soleil, &c que cette quantité se trouve toute calculée par la II.<sup>e</sup> Table du S. 20 du II.<sup>e</sup> Mémoire.

Lors de l'éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on avoit

$$\frac{r^2 p}{\sqrt{(q^2 p^2 + r^2 r^2)}} = 100004.$$

*Sommets des courbes d'illumination pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, déterminés par les équations précédentes.*

(32.) Si l'on applique le calcul à l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on aura les résultats suivans.

$$s = + \sinus 85^d 12' 48'' \quad s = - \sinus 85^d 12' 48''.$$

$$\text{Latitude vraie} = 85^d 14' 27'', \text{ australe \& boréale.}$$

*Commencement de l'Éclipse lorsque le Soleil a rasé l'horizon dans le méridien inférieur.*

$$\text{Latitude boréale} = 85^d 14' 27''. \quad \text{Angle horaire} = + 180^d 0' 0''.$$

$$A = - 14524. \quad F = - 40734. \quad \log. \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9.7410368 \\ b = + (b_1) - (b_2) = - 1019''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus occidental que Paris, de  $153^d 36' 0''$ .

*Fin de l'Éclipse lorsque le Soleil a rasé l'horizon dans le méridien inférieur.*

$$\text{Latitude boréale} = 85^d 14' 27''. \quad \text{Angle horaire} = 180^d 0' 0''.$$

$$A = - 14524. \quad F = - 40734. \quad \log. \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9.7410368 \\ b = + (b_1) + (b_2) = + 6799''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus oriental que Paris, de  $173^{\text{d}} 49' 30''$ .

*Commencement de l'Éclipse lorsque le Soleil a rasé l'horizon dans le méridien supérieur.*

Latitude australe =  $85^{\text{d}} 14' 27''$ . Angle horaire =  $0^{\text{d}} 0' 0''$   
 $A = + 160842$ .  $F = + 55442$ .  $\sqrt{L^2 - A^2}$  imaginaire.

*Fin de l'Éclipse lorsque le Soleil a rasé l'horizon dans le méridien supérieur.*

Latitude australe =  $85^{\text{d}} 14' 27''$ . Angle horaire =  $0^{\text{d}} 0' 0''$ .  
 $A = + 160842$ .  $F = + 55442$ .  $\sqrt{L^2 - A^2}$  imaginaire.

On voit donc que des quatre sommets que sembloient promettre les formules du §. 31, les deux qui appartiennent aux latitudes australes, sont imaginaires. Remarquons ici que les sommets des courbes d'illumination, déterminés par les équations précédentes, sont situés sous le dernier des parallèles terrestres où le Soleil puisse se lever ou se coucher.

Passons maintenant à la détermination des autres sommets des courbes d'illumination.

#### DEUXIÈME SUPPOSITION.

(33.) Il est sensible que si l'on suppose nulle, la quantité radicale, contenue dans l'expression de  $b$ , on déterminera les points de passage des valeurs réelles aux valeurs imaginaires. Les lieux déterminés par l'équation

$$\left( \frac{\sigma \tau r \xi}{\pi \zeta \vartheta} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} \right)^2 - A^2 = 0 \text{ pour les contacts intérieurs ;}$$

$$\left( \frac{\sigma \tau r \xi}{\pi \zeta \vartheta} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} \right)^2 - A^2 = 0 \text{ pour les contacts extérieurs ;}$$

sont donc les derniers qui voient la phase assignée au lever & au coucher du Soleil; ces équations déterminent donc encore les sommets de la courbe d'illumination.

Si l'on substitue à  $A$ , la valeur tirée du §. 25, que



l'on élimine la quantité  $f$  par le moyen de la valeur

$$f = \frac{\sqrt{(p^2 q^2 r^2 - p^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}, \text{ \& que l'on suppose}$$

*Contacts intérieurs.*

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{q}{\omega} \times \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \sigma} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} - \frac{\psi l}{\zeta} \right) \\ N &= + \frac{\varphi r}{\omega} \end{aligned} \right\} 1.^{\text{re}} \text{ Suite.}$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{q}{\omega} \times \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \sigma} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} + \frac{\psi l}{\zeta} \right) \\ N &= - \frac{\varphi r}{\omega} \end{aligned} \right\} 2.^{\text{e}} \text{ Suite.}$$

*Contacts extérieurs.*

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{q}{\omega} \times \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \sigma} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} - \frac{\psi l}{\zeta} \right) \\ N &= + \frac{\varphi r}{\omega} \end{aligned} \right\} 1.^{\text{re}} \text{ Suite.}$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{q}{\omega} \times \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \sigma} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} + \frac{\psi l}{\zeta} \right) \\ N &= - \frac{\varphi r}{\omega} \end{aligned} \right\} 2.^{\text{e}} \text{ Suite.}$$

$$P = \frac{p^2 q^2}{r^2} + \frac{p^2}{r} + \frac{\varphi^2 r}{\omega^2}.$$

$$Q = \frac{MN}{P}.$$

$$R = \frac{M^2}{P} - \frac{p^2 q^2}{Pr^2}.$$

On aura,

Pour déterminer la dernière latitude qui voit la phase assignée  
au lever & au coucher du Soleil,

$$s^2 + 2Qs + Rr = 0.$$

Pour déterminer l'heure que l'on compte dans le lieu à l'instant  
du phénomène,  $h = - \frac{p s r^2}{c p q}.$

(34.) Lorsque l'on connoît la latitude du lieu, rien de plus simple que de déterminer le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène: en effet, par la supposition, le terme  $(b\ 2)$  est nul.

Soit donc

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{ws}{q} + \frac{f\varphi}{q}, \text{ si le phénomène arrive au lever du } \odot;$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{ws}{q} - \frac{f\varphi}{q}, \text{ si le phénomène arrive au coucher du } \odot;$$

$$\text{on a } b = - \frac{3600'' \zeta}{\eta r} \times F.$$

Comme les valeurs de  $M$  & de  $N$  sont doubles, il est évident que la solution est quadruple.

(35.) On peut faire sur ces solutions une difficulté. Les équations du §. 33 déterminent bien, dira-t-on, la dernière latitude qui voit la phase assignée au lever ou au coucher du Soleil, & le cosinus de l'angle horaire à l'instant du phénomène: mais le même cosinus appartient au lever & au coucher du Soleil; il est donc incertain si le phénomène arrive au lever ou au coucher de cet Astre; la détermination de la longitude & le calcul de la quantité  $F$  sont cependant très-différens dans ces deux hypothèses. Comment pourrons-nous donc distinguer ces deux cas?

(36.) On doit conclure du §. 33 que lors des derniers contacts possibles, on a en général

<i>Lever du Soleil.</i>		<i>Coucher du Soleil.</i>
$M + \frac{Ns}{r} + f = 0 \dots \dots 1.^{\text{re}} \text{ suite.}$		$M + \frac{Ns}{r} - f = 0 \dots \dots 1.^{\text{re}} \text{ suite.}$
$M + \frac{Ns}{r} - f = 0 \dots \dots 2.^{\text{e}} \text{ suite.}$		$M + \frac{Ns}{r} + f = 0 \dots \dots 2.^{\text{e}} \text{ suite.}$

L'équation  $s^2 + 2 Qs + Rr = 0$ , donne deux latitudes pour chacune des valeurs correspondantes de  $M$  & de  $N$ ;

*Mém. 1769.*

T t

# 330 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

on peut donc connoître (S. 25) les valeurs numériques de  $f$  qui en dépendent. Je porte dans les équations précédentes les valeurs de  $s$  en leur donnant le signe qui leur convient & les valeurs numériques de  $f$ ; je vois laquelle des équations du lever ou du coucher du Soleil devient nulle, d'où je conclus à quel instant appartient la solution. Un exemple va nous éclaircir.

*Sommets des courbes d'illumination pour l'Eclipsé du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, déterminés par la formule du S. 33.*

(37.) Si l'on applique le calcul à l'Eclipsé du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on aura les résultats suivans.

*Contacts extérieurs des limbes.*

Première suite de Valeurs.			Seconde suite de Valeurs.		
$M = - 33707.$	Logarithme	$M = 9,5277159.$	$M = 4. 260658.$	Logarithme	$M = 10,4208129.$
$N = + 182339.$		$N = 10,2608791.$	$N = - 182339.$		$N = 10,2608791.$
$P = + 433600.$		$P = 10,6370893.$	$P = + 433600.$		$P = 10,6370893.$
$Q = - 14107.$		$Q = 9,1494490.$	$Q = - 11338a.$		$Q = 10,0545427.$
$R = - 20564a.$		$R = 9,3131076.$	$R = + 144141.$		$R = 10,1599911.$
		$\sqrt{Rr} = 9,6565138.$			$\sqrt{Rr} = 10,0799911.$

Je suppose que le lecteur a présent à l'esprit la méthode de *Année 1766*. taillée dans mon *IV.<sup>e</sup> Mémoire*, pour trouver les racines numériques des équations du second degré.

Puisque  $Q$  &  $R$  sont négatifs, l'équation qui résout le Problème est

$$s^2 - 2Qs - Rr = 0.$$

Si je compare cette équation avec les équations générales du second degré (*IV.<sup>e</sup> Mém. S. 41 & suivans*), je vois que, dans le cas particulier que je discute, on a

$$\text{Tangente } \left\{ \begin{matrix} B \\ B' \end{matrix} \right\} = \frac{r\sqrt{Rr}}{Q}.$$

$$s = \text{tang. } \frac{B}{2} \times \frac{\sqrt{Rr}}{r}. \quad s = \text{tang. } \frac{B'}{2} \times \frac{\sqrt{Rr}}{r}.$$

Puisque  $Q$  est négatif &  $R$  positif, l'équation qui résout le Problème est

$$s^2 - 2Qs + Rr = 0.$$

Si je compare cette équation avec les équations générales du second degré, je vois que dans le cas particulier que je discute, on a

$$\text{Sinus } \left\{ \begin{matrix} B \\ B' \end{matrix} \right\} = \frac{r\sqrt{Rr}}{Q}.$$

$$s = \text{tang. } \frac{B}{2} \times \frac{\sqrt{Rr}}{r}. \quad s = \text{tang. } \frac{B'}{2} \times \frac{\sqrt{Rr}}{r}.$$

L'angle  $B$  est entre  $90^\circ$  &  $180^\circ$ ; l'angle  $\frac{B}{2}$  est moindre que  $90$  degrés, & sa tangente est positive; la valeur de  $s$  correspondante est positive.

L'angle  $B'$  est entre  $270^\circ$  &  $360^\circ$ ; l'angle  $\frac{B'}{2}$  est entre  $90^\circ$  &  $180^\circ$ , sa tangente est négative, ainsi que la valeur de  $s$  correspondante.

Comme  $r\sqrt{(Rr)}$  surpasse  $Q$ ; on a une expression du sinus des angles  $B, B'$ , plus grande que le rayon; les racines de l'équation sont donc imaginaires.

*Première suite de Valeurs.*

$$+19,6565538 \dots \log. r\sqrt{(Rr)}.$$

$$-9,1494490 \dots \log. Q.$$

$$10,5071048 \dots \log. \tan. \left\{ \begin{array}{l} B \\ B' \end{array} \right\}$$

$$B = 107^\circ 16' 52''.$$

$$\frac{B}{2} = 53. 38. 26.$$

$$B' = 287^\circ 16' 52''.$$

$$\frac{B'}{2} = 143. 38. 26.$$

$$+10,1330205 \dots \log. \tan. \frac{B}{2}.$$

$$+9,6565538 \dots \log. \sqrt{(Rr)}.$$

$$9,7895743 \dots \log. s.$$

$s$  positive.

$$\text{Latitude corr.} = 38^\circ 1' 27''$$

$$+ 9. 23.$$

$$\text{Latitude vraie} = 38. 10. 50. B.$$

Cette valeur de  $s$  portée successivement dans les deux équations correspondantes du §. 36 ne rend nulle que celle qui répond au coucher du Soleil; la solution appartient donc au coucher du Soleil; on comptoit alors  $6^h 15' 1''$  du soir, dans le lieu; sa longitude est de  $88^\circ 48' 17''$ , orientale.

$$+9,8669794 \dots \log. \tan. \frac{B'}{2}.$$

$$+9,6565538 \dots \log. \sqrt{(Rr)}.$$

$$9,5235332 \dots \log. s.$$

$s$  négative.

$$\text{Latitude corr.} = 19^\circ 30' 7''$$

$$+ 6. 5.$$

$$\text{Latitude vraie} = 19. 36. 12. A.$$

Cette valeur de  $s$  portée successivement dans les deux équations correspondantes du §. 36 ne rend nulle que celle qui répond au lever du Soleil; la solution appartient donc au lever du Soleil; on comptoit alors  $6^h 53' 12''$  du matin; sa longitude est de  $34^\circ 38' 17''$ , occidentale.

(38.) Les équations que nous venons de discuter (§. 31 & 33) ne peuvent jamais donner entre elles que quatre sommets réels de la courbe d'illumination; bien entendu que ce nombre peut se réduire à deux dans quelques cas particuliers, & même

être absolument nul lorsque l'Éclipse n'a pas lieu sur notre globe.

Lors donc, par exemple, que l'équation du §. 31 aura donné quatre sommets réels; il sera inutile d'en chercher de nouveaux par l'autre formule; les solutions seront imaginaires. Ce premier cas a presque toujours lieu lors des passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil; il n'a jamais lieu pour les Éclipses de Soleil. Si l'équation du §. 31 ne donne que deux sommets réels, comme dans l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764; la seconde formule aura essentiellement deux valeurs réelles & deux imaginaires. Si l'équation du §. 31 a toutes ses valeurs imaginaires, & que l'Éclipse soit visible sur notre globe, la seconde formule aura presque toujours ses quatre valeurs réelles; quoique cependant il puisse arriver quelquefois que deux des valeurs soient imaginaires. Dans ce dernier cas un des deux ovales, celui qui répondroit au lever ou au coucher du Soleil s'est évanoui.

Remarquons ici un cas particulier; celui où indépendamment de  $f = 0$ ; on a encore  $L^2 - A^2 = 0$ ; c'est-à-dire, celui où les équations des §. 31 & 33 ont des valeurs communes. Cette supposition donne la circonstance particulière où les équations du §. 31 cessent d'avoir des valeurs réelles. Les deux sommets donnés par ces équations, qui, en général, sont distincts & séparés sous le même parallèle, se réunissent en un point; la durée de l'éclipse est instantanée, ainsi que l'apparition du Soleil sur l'horizon. On doit donc conclure que le passage des valeurs réelles aux imaginaires des équations du §. 31 se fait par un point de la Terre, où la durée de l'Éclipse est instantanée. On doit conclure enfin que si les sommets donnés par le §. 31 sont imaginaires, la durée de l'Éclipse ne peut être que fort petite dans les climats voisins de ces sommets.

#### SECTION SIXIÈME.

*De la plus grande largeur des ovales qui composent les courbes d'illumination.*

(39.) J'ai déjà remarqué, à l'occasion des courbes d'illumi-

nation prises dans la signification la plus étendue, que l'on peut demander relativement à chacun des ovals qui les composent, *quelle est leur plus grande largeur respective en longitude.* J'ai observé que sous chaque parallèle terrestre la distance des points communs aux ovals & aux parallèles dépend de la quantité radicale que renferme l'expression de  $b$ , & j'ai donné en général l'équation qui détermine la latitude correspondante à la plus grande largeur de ces ovals pour une courbe d'illumination quelconque; la solution conduit à une équation complète du quatrième degré. Dans le cas des courbes d'illumination, proprement dites, l'équation se décompose.

(40.) Si l'on différencie le radical que renferme le terme  $(b^2)$  du §. 25, en ne supposant variable que la latitude du lieu, il sera aisé de voir que l'on aura pour condition du Problème qui nous occupe,

$$\left( \frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} \right) \times [\pm \omega s (s^2 q^2 + p^2 r^2) - r^2 \phi f] = 0.$$

Nous avons donc deux suppositions différentes à discuter.

#### PREMIÈRE SUPPOSITION.

(41.) Dans l'équation

$$\frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} = 0.$$

Si l'on élimine la quantité  $f$  par le moyen de la valeur

$$f = \frac{\sqrt{(p^2 q^2 r^2 - p^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r};$$

que l'on substitue  $\phi s$  à  $\omega r$ , & que l'on suppose

$$T = r + \frac{p^2 r^2}{r^2} + \frac{q^2 p^2 r^2}{r^2} \quad P = \frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta} \times \frac{q^2}{\phi T} \quad Q = \frac{\frac{1}{\zeta} r^2 q^2}{\zeta^2 \phi^2 T} - \frac{q^2 r^2 p^2}{r^2 T};$$

on aura,

Pour déterminer les latitudes correspondantes à la plus grande largeur des ovals d'illumination,

$$s^2 - 2Ps + Qr = 0.$$

Pour déterminer l'heure que l'on compte à l'instant du phé-

334 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
nomène dans les deux points correspondans du parallèle

$$h = - \frac{p r^2 s}{c p q}.$$

(42.) Lorsque l'on connoît la latitude, rien de plus simple que de déterminer le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène dans les deux points du parallèle. En effet, par la supposition

$$\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{p s}{q} + \frac{f u}{q} = 0; \text{ donc } A = 0.$$

Soit donc

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{u s}{q} + \frac{f \theta}{q} \text{ si le phénomène arrive au lever du Soleil}$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{u s}{q} - \frac{f \theta}{q} \text{ si le phénom. arrive au coucher du Soleil}$$

On aura

*Contacts intérieurs.*

$$b = \begin{cases} - \frac{3600^{\circ} \zeta}{n r} \times F - \frac{3600^{\circ} \zeta}{n r} \times \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \sigma} - \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta} \right) \\ - \frac{3600^{\circ} \zeta}{n r} \times F + \frac{3600^{\circ} \zeta}{n r} \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \sigma} - \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta} \right). \end{cases}$$

*Contacts extérieurs.*

$$b = \begin{cases} - \frac{3600^{\circ} \zeta}{n r} \times F - \frac{3600^{\circ} \zeta}{n r} \times \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \sigma} + \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta} \right) \\ - \frac{3600^{\circ} \zeta}{n r} \times F + \frac{3600^{\circ} \zeta}{n r} \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \sigma} + \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta} \right). \end{cases}$$

(43.) La même difficulté qui nous avoit arrêtés (§. 35) se représente encore dans cette solution. Lequel des deux instans du lever ou du coucher du Soleil doit-on faire correspondre aux latitudes déterminées par le §. 41? Pour terminer cette incertitude, je remarque que l'on a en général

$$\frac{\psi p}{\zeta} - \frac{p s}{q} - \frac{f u}{q} = 0, \text{ lorsque le phénomène arrive au lever du Soleil,}$$

$$\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{p s}{q} + \frac{f u}{q} = 0, \text{ lorsque le phénomène arrive au coucher du Soleil;}$$

$$\text{d'ailleurs } f = \frac{\sqrt{(p^2 q^2 r^2 - p^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}.$$

L'équation

$$s^2 - 2Ps + Qr = 0$$

donne deux latitudes. On connoitra donc (*s. 25*) les valeurs numériques de *f* qui en dépendent. Je porte dans les équations précédentes les valeurs de *s* en leur donnant le signe qui leur convient, & les valeurs numériques de *f*. Je vois laquelle des deux équations du lever ou du coucher du Soleil devient nulle; d'où je conclus à quel instant appartient la solution.

(44.) Si l'on applique le calcul à l'Eclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on aura les résultats suivans

$$\left. \begin{array}{l} T = + 130416. \\ P = + 63753. \\ Q = + 29847. \end{array} \right\} \text{Logarithme.} \left\{ \begin{array}{l} T = 10,1153310. \\ P = 9,8045003. \\ Q = 9,4749007. \\ \sqrt{Qr} = 9,7374503. \end{array} \right.$$

Puisque *P* & *Q* sont positifs, l'équation qui satisfait au Problème est  $s^2 - 2Ps + Qr = 0$ ; si je compare cette équation avec les équations générales du second degré (*IV.<sup>e</sup> Mémoire, s. 41 & suivans*) je vois que dans le cas particulier que je discute, on a *Année 1764.*

$$\sinus \left\{ \begin{array}{l} B \\ B' \end{array} \right\} = r \frac{\sqrt{Qr}}{P}$$

$$s = \frac{\sqrt{Qr}}{r} \times \text{tang.} \frac{B}{2} \quad s = \frac{\sqrt{Qr}}{r} \times \text{tang.} \frac{B'}{2}$$

Les angles *B* & *B'* sont chacun moindres que 180 degrés, & les deux valeurs de *s* sont positives.

$$\begin{array}{r} + 19,7374503 \dots \log. r\sqrt{Qr}. \\ - 9,8045003 \dots \log. P. \end{array}$$

$$9,9329500 \dots \log. \sinus \left\{ \begin{array}{l} B \\ B' \end{array} \right\}$$

$$B = 58^{\circ} 58' 30''.$$

$$B' = 121^{\circ} 1' 30''.$$

$$\frac{B}{2} = 29. 29, 15.$$

$$\frac{B'}{2} = 60. 32, 45.$$

$$+ 9,7524210 \dots \log. \text{tang.} \frac{B}{2}.$$

$$+ 10,2475790 \dots \log. \text{tang.} \frac{B'}{2}.$$

$$+ 9,7374503 \dots \log. \sqrt{Qr}.$$

$$+ 9,7374503 \dots \log. \sqrt{Qr}.$$

$$9,4898713 \dots \log. s.$$

$$9,9850293 \dots \log. s.$$



*s* positive.

$$\text{Latit. corrigée} = 17^{\circ} 59' 43''$$

$$+ 0. 5. 41.$$

$$\text{Latitude vraie} = 18. 5. 24 \text{ bor.}$$

Cette valeur de *s*, portée successivement dans les deux équations du §. 43, ne rend nulle que celle qui répond au lever du Soleil, le parallèle boréal de  $18^{\circ} 5' 24''$  est donc celui sous lequel l'ovale correspondant au lever du Soleil a la plus grande largeur en longitude.

*s* positive.

$$\text{Latit. corrigée} = 75^{\circ} 2' 32''$$

$$+ 0. 4. 50.$$

$$\text{Latitude vraie} = 75. 7. 22 \text{ bor.}$$

Cette valeur de *s*, portée successivement dans les deux équations du §. 43, ne rend nulle que celle qui répond au coucher du Soleil; le parallèle boréal de  $75^{\circ} 7' 22''$  est donc celui sous lequel l'ovale correspondant au coucher du Soleil a la plus grande largeur en longitude.

Si l'on jette les yeux sur les valeurs de *b* du §. 25, il est aisé de voir que la plus grande largeur en longitude des ovales d'illumination exprimée en secondes horaires, a pour expression

$$\begin{array}{c} \text{Contacts intérieurs.} \\ 2 \times \frac{3600'' \zeta}{\pi r} \times \left( \frac{\sigma' r \xi}{\pi \zeta \sigma} - \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta} \right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \text{Contacts extérieurs.} \\ 2 \times \frac{3600'' \zeta}{\pi r} \times \left( \frac{\sigma' r \xi}{\pi \zeta \sigma} + \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta} \right). \end{array} \right.$$

Lors de l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, cette plus grande largeur étoit de  $8084''$ , pour les contacts extérieurs.

## SECONDE SUPPOSITION.

(45.) Dans l'équation

$$\pm \omega s \times (q^2 q^2 + p^2 r^2) - r^2 \phi f = 0;$$

si l'on élimine la quantité *f* par le moyen de la valeur  $f =$

$$\frac{\sqrt{(p^2 q^2 r^2 - p^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}, \text{ on aura pour déterminer les}$$

latitudes correspondantes à la plus petite ou à la plus grande largeur des ovales d'illumination,

$$s = \pm \frac{p r^2}{\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}} \times \frac{q \phi \tau}{\sqrt{[p^2 r^2 + \omega^2 (p^2 q^2 + p^2 r^2)]}}.$$

(46.) Lorsque l'on connoitra la latitude, rien de plus simple que

que de déterminer l'heure que l'on compte à l'instant du phénomène dans les deux points correlatifs \* du parallèle terrestre; & le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène dans chacun de ces points: ce calcul n'est qu'un cas particulier du Problème du §. 25.

Si l'on suppose

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{1} - \frac{f\omega}{1}, \text{ lorsque le phénomène arrive au lever du Soleil,}$$

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{1} + \frac{f\omega}{1}, \text{ lorsque le phénomène arrive au coucher du Soleil;}$$

& que l'on substitue dans l'expression de  $A$ , les valeurs de  $s$  conclues du §. 45; on aura,

Plus grande largeur en longitude des ovals d'illumination, exprimée en sec. de temps,

$$= \begin{cases} 2 \times \frac{3600'' \zeta}{nr} \sqrt{\left[ \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} + A \right) \times \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} - A \right) \right]}_{\text{contacts intérieurs}} \\ 2 \times \frac{3600'' \zeta}{nr} \sqrt{\left[ \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} + A \right) \times \left( \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} - A \right) \right]}_{\text{contacts extérieurs}} \end{cases}$$

(47.) On peut demander relativement à ce Problème, ainsi que nous l'avons déjà fait précédemment, lequel des deux instans du lever ou du coucher du Soleil répond aux latitudes déterminées par le §. 45. Pour lever cette incertitude, je remarque que l'on a en général

$$\omega s \times (\rho^2 q^2 + p^2 r^2) - r^4 \varphi f = 0 \text{ lorsque le phénomène arrive au lever du Soleil,}$$

$$\omega s \times (\rho^2 q^2 + p^2 r^2) + r^4 \varphi f = 0 \text{ lorsque le phénom. arrive au coucher du Soleil.}$$

L'équation du §. 45, donne deux latitudes; on connoîtra donc (§. 25) les valeurs numériques de  $f$  qui en dépendent. Je porte dans les équations précédentes, les valeurs de  $s$ , en leur donnant

à chacune des valeurs de  $s$  déterminées par l'équation du §. 45, peuvent répondre quatre points différens sous chacun des parallèles; deux qui appartiennent au lever du Soleil,

& deux qui appartiennent au coucher. J'appelle *points correlatifs* ceux qui appartiennent tous deux au lever du Soleil, ou tous deux au coucher de cet astre.

Mém. 1769.

Vu

# 338 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

le signe qui leur convient, & les valeurs numériques de  $f$ ; je vois laquelle des deux équations du lever ou du coucher du Soleil, devient nulle; d'où je conclus à quel instant appartient la solution.

(48.) Si l'on applique le calcul à l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on aura

$$s = \pm \text{finus } 60^{\text{d}} 45' 38''.$$

$$\text{Lat. cor.} = 60^{\text{d}} 45' 38''.$$

$$+ 0. 8. 14.$$

$$\text{Lat. vr.} = 60. 53. 52. \text{ Bor.}$$

La valeur positive de  $s$ , portée successivement dans les deux équations du §. 47, ne rend nulle que celle qui répond au lever du Soleil; le parallèle boréal de  $60^{\text{d}} 53' 52''$ , est donc celui sous lequel l'ovale correspondant au lever du Soleil, avoit la plus petite largeur en longitude: cette plus petite largeur, évaluée en secondes horaires, étoit de  $7120''$ .

$$\text{Lat. cor.} = 60^{\text{d}} 45' 38''.$$

$$+ 0. 8. 14.$$

$$\text{Lat. vr.} = 60. 53. 52. \text{ Aufl.}$$

La valeur négative de  $s$ , portée successivement dans les deux équations du §. 47, ne rend nulle que celle qui répond au coucher du Soleil; le parallèle austral de  $60^{\text{d}} 53' 52''$ , seroit donc celui sous lequel l'ovale correspondant au coucher du Soleil, auroit eu la plus petite largeur en longitude, si l'équation du §. 25 ne donnoit d'ailleurs un résultat imaginaire; le *minimum* que sembloit promettre l'équation du §. 45, n'a donc pas lieu.

On voit, par cette recherche, que ce seroit conclure précipitamment, si l'on faisoit dépendre la réalité de la solution, de la réalité des valeurs de  $s$ ; il faut de plus que ces valeurs portées dans l'équation du §. 25, ne la rendent pas imaginaire.

Lors de l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, l'ovale d'illumination correspondant au lever du Soleil, avoit un *maximum* de largeur sous le parallèle boréal de  $18^{\text{d}} 5' 24''$  (§. 44), & un *minimum* de largeur sous le parallèle boréal de  $60^{\text{d}} 53' 52''$ . Quant à l'ovale correspondant au coucher du Soleil, il n'avoit qu'un *maximum* de largeur, sous le parallèle boréal de  $75^{\text{d}} 7' 22''$  (§. 44); son *minimum* étoit imaginaire.

(49.) Nous venons de déterminer dans le paragraphe précédent, le *maximum* & le *minimum* de distance des branches d'illumination; mais ce *maximum* & ce *minimum*, ainsi que

nous l'avons remarqué, n'est pas une plus grande ou une plus petite largeur absolue; ce n'est qu'un *maximum* ou un *minimum* de nombre de degrés du parallèle terrestre, compris entre les deux branches de la courbe. Personne n'ignore que les degrés des parallèles vont en diminuant en remontant de l'équateur vers le pôle; ces degrés rectifiés sont entre eux, comme les rayons des parallèles correspondans sur lesquels ils sont comptés; ils sont proportionnels (2.<sup>e</sup> Mém. §. 25) à  $\frac{c^p}{r}$ ; si donc on ne veut Année 1764.

point avoir simplement le *maximum* ou le *minimum* du nombre de degrés compris entre les branches de la courbe, mais le *maximum* ou le *minimum* de distance absolue prise sur le parallèle, il ne faudra pas simplement différencier la quantité

$$\sqrt{\left[\left(\frac{c^p r \xi}{\pi \zeta^2} \mp \frac{d r r}{\pi \zeta}\right)^2 - \left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{p^2}{q} \mp \frac{f u}{q}\right)^2\right]},$$

ainsi que nous l'avons fait §. 40; mais la quantité suivante

$$\frac{c}{r} \times \sqrt{\left[\left(\frac{c^p r \xi}{\pi \zeta^2} \mp \frac{d r r}{\pi \zeta}\right)^2 - \left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{p^2}{q} \mp \frac{f u}{q}\right)^2\right]}.$$

Si l'on conserve les définitions de  $L$ , de  $A$ , & de  $f$ , du §. 25, on parviendra à l'équation suivante

$$qL^2 - A \left[ q \times \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{p^2}{q} \times (s^2 - c^2) \mp \frac{u(2c^2 p^2 q^2 - p^2 r^2 s^2 + p^2 r^2 c^2)}{r^2 f} \right] = 0.$$

## SECTION SEPTIÈME.

*Détermination du lieu de la Terre qui voit le premier, le disque du Soleil entamé par la Lune; ou qui voit le dernier, les disques de ces Astres se séparer.*

(50.) Les équations que nous venons de discuter, fournissent une méthode bien facile pour résoudre une question intéressante; je veux parler de la détermination du lieu de la Terre qui voit le premier, le disque de la Lune entamer le disque du Soleil, & en général une phase quelconque; ou qui voit le dernier; les

disques de ces astres se séparer. Cette question n'est qu'un cas particulier des courbes d'illumination, proprement dites; il ne s'agit que de déterminer les points de ces courbes correspondans aux *maxima* & aux *minima* des quantités  $b$ .

(51.) Soit

$$f = \frac{\sqrt{(p^2 q^2 r^2 - p^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2};$$

$$L = \frac{\sigma' r \xi}{\pi \zeta \sigma} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact intérieur.}$$

$$L = \frac{\sigma' r \xi}{\pi \zeta \sigma} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact extérieur.}$$

<i>Lever du Soleil.</i>		<i>Coucher du Soleil.</i>
$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f \omega}{q}.$		$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f \omega}{q}.$
$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f \varphi}{q}.$		$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f \varphi}{q}.$

On peut conclure du §. 25 que si l'on porte respectivement ces valeurs dans les équations

$$b = -\frac{3600'' \zeta}{n r} \times F - \frac{3600'' \zeta}{n r} \sqrt{(L^2 - A^2)}.$$

$$b = -\frac{3600'' \zeta}{n r} \times F + \frac{3600'' \zeta}{n r} \sqrt{(L^2 - A^2)}.$$

On déterminera en général, sous chaque parallèle, la distance de la conjonction au commencement ou à la fin de l'Éclipse, relativement aux points de ce parallèle, qui verront le phénomène au lever ou au coucher du Soleil. Il ne s'agit donc pour résoudre la question proposée que de différentier ces dernières équations en faisant varier la latitude.

La théorie de *maximis* & *minimis* donne pour condition du Problème,

$$\sqrt{(L^2 - A^2)} \times dF \mp A dA = 0;$$

$$L dF \pm A \sqrt{(dA^2 + dF^2)} = 0;$$

on a donc en substituant à  $dA$  & à  $dF$ , leurs valeurs

*Lever du Soleil.*

$$L \times [fr^4 \omega + \phi s(p^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r A V[p^2 r^2 + s^2(p^2 q^2 + p^2 r^2) \times (p^2 - r^2)] = 0,$$

*Coucher du Soleil.*

$$L \times [fr^4 \omega - \phi s(p^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r A V[p^2 r^2 + s^2(p^2 q^2 + p^2 r^2) \times (p^2 - r^2)] = 0;$$

(52.) Il est aisé de voir que l'élimination des radicaux conduiroit à une équation du huitième degré qui n'auroit que des puissances paires, ou, ce qui revient au même, à une équation complète du quatrième degré. Comme une équation de ce genre renferme nécessairement dans l'usage, des longueurs de calcul, je vais présenter quelques réflexions qui permettront d'employer une équation plus simple, bien entendu toutefois que cette nouvelle équation ne sera qu'une approximation de la véritable, & que géométriquement parlant, l'équation du Problème est celle que je viens de donner.

(53.) Si l'on jette les yeux sur les quantités qui composent le radical, on verra que le second terme, celui qui sous ce radical renferme la variable  $s$ , est multiplié par la différence des quarrés des axes terrestres. Ce second terme est d'autant plus négligeable que l'on supposera l'excentricité de la Terre plus petite; il s'évanouit entièrement par la supposition de la Terre sphérique. Lorsque l'on n'a aucun égard à ce terme; les équations du *paragraphe précédent* deviennent

*Lever du Soleil.*

$$L \times [fr^4 \omega + \phi s(p^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r^4 g A = 0.$$

*Coucher du Soleil.*

$$L \times [fr^4 \omega - \phi s(p^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r^4 g A = 0;$$

Imaginons que l'on tire de ces dernières équations les valeurs de  $s$ , qui les rendent nulles; il est évident que ces valeurs substituées dans la formule rigoureuse du §. 51, la rendront presque nulle; on peut donc regarder ces valeurs comme une approximation déjà très-grande de celles qui résolveroient rigoureusement le Problème.

(54.) Il est possible de donner aux équations précédentes

toute l'exactitude imaginable en leur supposant la forme qui suit

*Lever du Soleil.*

$$L \times [fr^4 \omega + \phi s (q^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r^4 A \Delta = 0:$$

*Coucher du Soleil.*

$$L \times [fr^4 \omega - \phi s (q^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r^4 A \Delta = 0:$$

On commencera par faire un premier calcul, dans lequel on supposera  $\Delta = q$ , & on en conclura les premières valeurs approchées de  $s$ . Soient ces valeurs désignées par  $s'$ , on fera un second calcul, dans lequel on supposera

$$\Delta = \sqrt{q^2 + \frac{s'^2 (q^2 q^2 + p^2 r^2) \times (s'^2 - r^2)}{r^2}}, \text{ \& l'on aura les}$$

valeurs rigoureuses de  $s$  dans l'hypothèse de la Terre elliptique:

La raison de ce procédé est sensible; le premier calcul donne, d'une manière très-approchée, la véritable valeur de  $\Delta$ ; on peut donc, sans erreur sensible, dans le second calcul, regarder cette valeur comme connue.

$$(55.) \text{ Soit } H = \frac{p^2 q^2}{r^3} + \frac{r^2}{r}.$$

$$M = \frac{\phi^2 \times \left( \frac{LH}{r} + \Delta \right)^2}{r^3} + \frac{\omega^2 H (L + \Delta)^2}{r^4}$$

$$N = \frac{\frac{\psi l}{\zeta} \times q \phi \Delta \times \left( \frac{LH}{r} + \Delta \right)}{M r^3}$$

$$P = \frac{\frac{\psi^2 l^2}{\zeta^2} \times q^2 \Delta^2}{M r^4} - \frac{p^2 q^2 \omega^2 \times (L + \Delta)^2}{M r^4};$$

$$M' = \frac{\phi^2 \times \left( \frac{LH}{r} - \Delta \right)^2}{r^3} + \frac{\omega^2 H (L - \Delta)^2}{r^4}$$

$$N' = \frac{\frac{\psi l}{\zeta} \times q \phi \Delta \left( \frac{LH}{r} - \Delta \right)}{M' r^3}$$

$$P' = \frac{\frac{\psi^2 l^2}{\zeta^2} \times q^2 \Delta^2}{M' r^4} - \frac{p^2 q^2 \omega^2 \times (L - \Delta)^2}{M' r^4}.$$

On aura pour résoudre les questions proposées,

$$s^2 - 2Ns + Pr = 0.$$

$$s^2 + 2N's + P'r = 0.$$

Lorsque l'on connoîtra la latitude du parallèle qui satisfait au Problème, rien de plus simple que de déterminer l'heure que l'on compte dans le lieu à l'instant du phénomène, & la distance à la conjonction. Ces calculs ne sont qu'une application particulière du cas général du §. 25, bien entendu que l'on doit avoir grande attention de n'employer dans les calculs, que des valeurs corrélatives, c'est-à-dire de ne substituer dans les expressions de  $A$  & de  $F$ , qui appartiennent au lever ou au coucher du Soleil, que les valeurs de  $s$  qui appartiennent au lever ou au coucher du Soleil.

(56.) Pour ôter toute incertitude sur ce choix, je remarque que l'on a en général

*Premier lieu qui voit le phénomène au lever du Soleil.*

$$f\omega(L + \Delta) + \phi s \left( \frac{LH}{r} + \Delta \right) - q\Delta \times \frac{\psi l}{\zeta} = 0 \dots 1.^{\text{re}} \text{ équation.}$$

*Dernier lieu qui voit le phénomène au lever du Soleil.*

$$f\omega(L - \Delta) + \phi s \left( \frac{LH}{r} - \Delta \right) + q\Delta \times \frac{\psi l}{\zeta} = 0 \dots 2.^{\text{e}} \text{ équation.}$$

*Premier lieu qui voit le phénomène au coucher du Soleil.*

$$f\omega(L - \Delta) - \phi s \times \left( \frac{LH}{r} - \Delta \right) - q\Delta \times \frac{\psi l}{\zeta} = 0 \dots 3.^{\text{e}} \text{ équation.}$$

*Dernier lieu qui voit le phénomène au coucher du Soleil.*

$$f\omega(L + \Delta) - \phi s \times \left( \frac{LH}{r} + \Delta \right) + q\Delta \times \frac{\psi l}{\zeta} = 0 \dots 4.^{\text{e}} \text{ équation.}$$

Les équations du §. 55, donnent chacune deux latitudes; on connoîtra donc les valeurs numériques de  $f$  qui en dépendent: je porte dans les équations précédentes ces valeurs de  $s$ , en leur



# 344 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

donnant le signe qui leur convient, & les valeurs numériques de  $f$  correspondantes; je vois laquelle des équations devient nulle, d'où je conclus à quel instant appartient la solution.

*Premier calcul dans lequel on suppose  $\Delta = 9$ .*

(57.) Si l'on applique le calcul au cas particulier du contact extérieur des limbes, pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on aura

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = + 100565. \\ H = + 101125. \\ L = + 56968. \\ \frac{LH}{r} = + 57609. \end{array} \right\} \text{Logarithme...} \left\{ \begin{array}{l} \Delta = 10,0024467. \\ H = 10,0048586. \\ L = 9,7556310. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{LH}{r} + \Delta = + 158174. \\ \frac{LH}{r} - \Delta = - 42956. \\ L + \Delta = + 157533. \\ L - \Delta = - 43597. \end{array} \right\} \text{Log.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{LH}{r} + \Delta = 10,1991350. \\ \frac{LH}{r} - \Delta = 9,6330238. \\ L + \Delta = 10,1973720. \\ L - \Delta = 9,6394566. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} M = + 250365. \\ N = + 40610. \\ P = - 1548. \end{array} \right\} \text{Logarithme} \left\{ \begin{array}{l} M = 10,3985733. \\ N = 9,6086375. \\ P = 8,1897710. \\ \sqrt{(Pr)} = 9,0948855. \end{array} \right.$$

Puisque  $N$  est positive &  $P$  négatif, l'équation qui satisfait au Problème est  $s^2 - 2Ns - Pr = 0$ .

Si je compare cette équation avec les équations générales du 2.<sup>e</sup> degré (IV.<sup>e</sup> Mem. §. 41 & suiv. année 1766) je vois que dans le cas que je discute

$$\text{Tangente} \left\{ \frac{B}{B'} \right\} = \frac{r\sqrt{(Pr)}}{N},$$

$$s = \text{tang.} \frac{B}{a} \times \frac{\sqrt{(Pr)}}{r}, s = \text{tang.} \frac{B'}{a} \times \frac{\sqrt{(Pr)}}{r}.$$

$$\left. \begin{array}{l} M' = + 18631. \\ N' = - 148216. \\ P' = + 264792. \end{array} \right\} \text{Logarithme} \left\{ \begin{array}{l} M' = 9,2703362. \\ N' = 10,1708936. \\ P' = 10,4229046. \\ \sqrt{(P'r)} = 10,2114123. \end{array} \right.$$

Puisque  $N'$  est négative &  $P'$  positif, l'équation qui satisfait au Problème est  $s^2 - 2N's + P'r = 0$ .

Si je compare cette équation avec les équations générales du 2.<sup>e</sup> degré, je vois que dans le cas que je discute

$$\text{Sinus} \left\{ \frac{B}{B'} \right\} = \frac{r\sqrt{(P'r)}}{N'}.$$

$$s = \text{tang.} \frac{B}{a} \times \frac{\sqrt{(P'r)}}{r}, s = \text{tang.} \frac{B'}{a} \times \frac{\sqrt{(P'r)}}{r},$$

L'angle

L'angle  $B$  est entre  $90^\circ$  &  $180^\circ$ .  
 l'angle  $B'$  est entre  $270^\circ$  &  $360^\circ$ ; l'angle  $\frac{B}{2}$  est par conséquent moindre que  $90^\circ$ ; & sa tangente est positive; l'angle  $\frac{B'}{2}$  est entre  $90^\circ$  &  $180^\circ$ , & sa tangente est négative; la première valeur de  $s$  est donc positive & la seconde négative.

$$+ 19,0948855 \dots \log. r \sqrt{Pr}.$$

$$- 9,6086375 \dots \log. N.$$

$$9,4862480 \dots \log. \tan. \left\{ \frac{B}{B'} \right\}$$

$$B = 162^\circ 57' 58''$$

$$\frac{B}{2} = 81. 28. 59.$$

$$+ 10,8246250 \dots \log. \tan. \frac{B}{2}.$$

$$+ 9,0948855 \dots \log. \sqrt{Pr}.$$

$$9,9195105 \dots \log. s'.$$

$s'$  positive.

$$B' = 342^\circ 57' 58''$$

$$\frac{B'}{2} = 171. 28. 59.$$

$$+ 9,1753760 \dots \log. \tan. \frac{B'}{2}.$$

$$+ 9,0948855 \dots \log. \sqrt{Pr}.$$

$$8,2702615 \dots \log. s'.$$

$s'$  négative.

Les angles  $B$  &  $B'$  sont chacun moindres que  $180^\circ$ , les angles  $\frac{B}{2}$ ,  $\frac{B'}{2}$  sont moindres que  $90^\circ$ , leurs tangentes sont positives & les valeurs de  $s$  sont toutes deux positives.

$$+ 20,2114523 \dots \log. r \sqrt{Pr}.$$

$$- 10,1708936 \dots \log. N'.$$

$$10,0405587 \dots \log. \sin. \left\{ \frac{B}{B'} \right\}$$

Résultat imaginaire.

*Second calcul dans lequel on suppose*

$$\Delta = \sqrt{p^2 + \frac{s'^2 (p^2 q^2 + p^2 r^2) \times (p^2 - r^2)}{r^6}}.$$

(58.) On pourroit se contenter de la première approximation.

Mém. 1769.

XX

# 346 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

du §. 57; on concluroit alors que le lieu qui le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, a vu le premier, un contact extérieur des limbes au lever du Soleil, est situé sous le parallèle austral de 1<sup>d</sup> 4' 24"; que celui qui a vu le dernier, un contact extérieur des limbes au coucher du Soleil, est situé sous le parallèle boréal de 56<sup>d</sup> 19' 58". Comme je ne veux rien laisser à desirer sur l'usage de ces formules, je ne regarderai ce résultat que comme une approximation. Je vais donc évaluer une nouvelle quantité  $\Delta$ , en prenant d'abord une des deux valeurs de  $s$ , trouvées par le calcul précédent; celle, par exemple, qui a pour logarithme 9,9195105.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = + 100957. \\ H = + 101125. \\ L = + 56968. \end{array} \right\} \text{Logarithme, } \left\{ \begin{array}{l} \Delta = 10,0041364. \\ H = 10,0048586. \\ L = 9,7556310. \end{array} \right.$$

$$\frac{LH}{r} = + 57609.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{LH}{r} + \Delta = + 158566. \\ L + \Delta = + 157923. \\ M = + 251880. \\ N = + 40624. \\ P = - 1487. \end{array} \right\} \log. \left\{ \begin{array}{l} \frac{LH}{r} + \Delta = 10,2002100. \\ L + \Delta = 10,1984503. \\ M = 10,4011937. \\ N = 9,6087827. \\ P = 8,1723110. \\ \sqrt{Pr} = 9,0861555. \end{array} \right.$$

Puisque  $N$  est positive &  $P$  négatif, l'équation qui satisfait au Problème est

$$s^2 - 2Ns - Pr = 0;$$

on trouvera donc par un calcul semblable à celui du §. 57,

$$\text{Log. } s = 9,9192893.$$

$s$  positive.

$$\text{Latit. corr.} = 56^{\text{d}} 8' 25''$$

$$+ 0. 8. 56.$$

$$\text{Latit. vraie} = 56. 17. 21. \text{ B.}$$

Si l'on substitue cette valeur de  $s$ , & celle de  $f$  correspondante; dans les équations du §. 56; on verra qu'elles rendent nulle la

dernière de ces équations. Le phénomène est donc arrivé, au coucher du Soleil,  $2^h 34' 40''$  après la conjonction; on comptoit  $6^h 28' 41''$  du soir dans le lieu; sa longitude est de  $80^d 39' 17''$ , orientale.

Si l'on évalue une nouvelle quantité  $\Delta$ , en prenant celle des valeurs de  $s'$ , qui a pour logarithme  $8,2702615$ ; on trouvera que le lieu qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, a vu le premier, un contact extérieur des limbes au lever du Soleil, est situé sous le parallèle austral de  $1^d 1' 55''$ . Le phénomène est arrivé  $2^h 53' 41''$  avant la conjonction; on comptoit  $6^h 0' 21''$  du matin dans le lieu, sa longitude est de  $24^d 20' 21''$ , occidentale.

Le second calcul n'a donné qu'une légère correction pour les latitudes; on pourra donc, généralement parlant, se dispenser de ce second calcul, à moins que l'on ne veuille parvenir à une précision géométrique.

Puisque l'on connoît le premier & le dernier instant physique où l'on a pu observer l'Éclipse sur la Terre, il est sensible que l'on connoît sa durée totale sur notre globe; lors de l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, cette durée a été de  $5^h 28' 21''$ .

(59.) Les recherches précédentes peuvent donner les plus grandes lumières sur la figure des courbes d'*illumination*; je vais parcourir rapidement celles qui se présentent le plus ordinairement sur la Terre; car toutes les formes; géométriquement possibles, n'ont pas lieu sur notre globe, attendu la rapidité du mouvement propre des Planètes, en comparaison de la rotation diurne.

Lorsque les quatre racines des équations du §. 55, sont réelles, la courbe est composée de deux *ovales* distincts & séparés, qui ne peuvent avoir d'intersections qu'en nombre pair, c'est-à-dire deux ou aucune. On a, généralement parlant, dans ce cas, un premier lieu qui voit le phénomène au lever du Soleil, un dernier lieu qui l'observe au lever de cet astre; un premier lieu qui voit le phénomène au coucher du Soleil, un dernier lieu qui l'observe au coucher de cet astre. La courbe pourroit alors avoir un point, ou d'*osculat*ion, ou d'*embrassement*, si les *ovales* au lieu de se couper, venoient à se toucher. Le passage de l'espèce présente à celle du §. 61, se fait par un point de *rebroussement* ordinaire, combiné

348 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
avec une branche de courbe perpendiculaire à la direction du  
*rebroussement*.

(60.) Il peut cependant arriver dans des circonstances assez rares (lorsque, par exemple, la Lune a une très-grande latitude), que quoique les quatre racines des équations du §. 55, soient réelles, elles ne rendent cependant nulles que les deux premières ou les deux dernières équations du §. 56. Deux des valeurs appartiennent alors au premier & au dernier lieu absolu qui voit le phénomène au lever ou au coucher du Soleil; les deux autres valeurs appartiennent au dernier point du premier *ovale* & au premier du second. Le passage de l'espèce présente à celle du §. 62, se fait par un point de *croix*, combiné avec une inflexion dans chacune des branches qui forment le point.

(61.) Lorsque des quatre racines que semblent promettre les équations du §. 55, deux sont imaginaires; la courbe d'*illumination* est composée d'une seule suite continue de points.

Si les deux racines réelles rendent nulles la 1.<sup>re</sup> & la 4.<sup>e</sup> ou la 2.<sup>e</sup> & la 3.<sup>e</sup> équation du §. 56; la courbe a la figure d'une espèce de *huit de chiffre* alongé. Dans ce cas il n'y a pas, géométriquement parlant, de dernier lieu où l'on observe le phénomène au lever ou au coucher du Soleil, de premier lieu où l'on puisse l'observer au coucher ou au lever de cet astre, attendu la continuité de la courbe. Astronomiquement parlant, ces lieux répondent aux sommets déterminés par la formule du §. 31.

(62.) Si les deux racines réelles ne rendent nulles que la 1.<sup>re</sup> & la 2.<sup>e</sup>, ou la 3.<sup>e</sup> & la 4.<sup>e</sup> équation du §. 56; la courbe peut ressembler à un *ovale*, ou à une espèce de *cœur*, ou à une espèce de *huit de chiffre* dont le noeud n'est pas formé & dont les *ovales* pourroient même encore ressembler à une espèce de *cœur*. Lors du passage de la présente supposition à celle du §. 61, la courbe a un point de *rebroussement à bec*, situé à un de ses sommets.

Quoique dans l'espèce précédente & dans celle du §. 60, la totalité presque entière de la courbe appartienne au lever ou au coucher du Soleil, il peut cependant y avoir une petite portion de la courbe qui appartienne au coucher ou au lever de cet astre.

Lorsque toutes les racines réelles du §. 55 sont égales, la courbe est réduite à un *point isolé*.

Lorsque les quatre racines réelles sont égales deux à deux, la courbe est réduite à deux points *conjugués*. Ces points sont le dernier état des *ovales* qui s'évanouissent. \*

On ne doit point oublier (& cette remarque est importante si l'on veut faire une vérification complète) que lorsque l'on porte dans les équations du §. 56 les valeurs de  $s$  tirées du §. 55, conformément à ce qui est prescrit §. 56, on doit supposer dans chacune de ces équations, la quantité  $L$  positive, puis ensuite négative, autrement on feroit une vérification incomplète.

Remarquons, en finissant, que la trace de l'Éclipse centrale peut être considérée comme une suite de *courbes d'illumination* prises dans un sens étendu (§. 9), réduites à des *points conjugus*.

## SECTION HUITIÈME.

*Détermination du lieu de la Terre qui voit le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre; ou réciproquement, le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil & la fin au lever.*

(63.) Il se présente naturellement une question intéressante à résoudre; c'est la détermination du lieu de la Terre qui voit le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre; ou réciproquement, le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil & la fin au lever. Si l'on considère la question astronomiquement, elle consiste à déterminer le lieu particulier de la Terre, relativement auquel la demi-durée de l'Éclipse est égale à l'arc sémi-diurne ou à l'arc sémi-nocturne. Si l'on considère la question géométriquement, elle consiste à déterminer sur notre globe, les intersections des ovales d'illumination. Le premier point de vue nous fait voir qu'il n'est pas possible de parvenir à une solution directe & rigoureuse. On auroit pour résoudre la question une équation de la forme suivante, ainsi que je le ferai voir §. 70.

Arc sémi-diurne égale fonction du sinus & du cosinus de la latitude.

Il faudroit, pour réduire l'équation à une seule variable, avoir l'expression finie de l'arc sémi-diurne, en valeur du sinus & du cosinus de la latitude, ce que la Géométrie n'a encore pu donner; la question est liée à la quadrature du cercle; il est donc nécessaire d'avoir recours à une méthode d'approximation.

Afin de parvenir à une approximation très-convergente, je considérerai le Problème sous le second point de vue; je déterminerai sur notre globe, les intersections des ovales d'illumination. Cette détermination dépend de plusieurs questions préliminaires.

(64.) Si l'on cherche sous chaque parallèle terrestre, les longitudes des lieux respectifs qui observent le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre, ou réciproquement; il sera aisé de voir que ces longitudes diffèrent d'une quantité plus ou moins grande, suivant les parallèles pour lesquels on calcule. Cette différence, par exemple, n'est pas la même sous l'Équateur que sous le parallèle de  $50^{\circ}$ . Comme il s'agit de déterminer le parallèle sous lequel cette différence est nulle; il est intéressant de connoître pour chaque parallèle, cette différence en longitude, & la loi qui règne entre la variation de cette différence & la variation de la latitude. Telle est la question préliminaire que je me propose de résoudre.

*De la différence en longitude sous chaque parallèle, des lieux respectifs dont l'un observe le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & l'autre observe la fin de ce phénomène au coucher de cet astre, ou réciproquement: Et de la loi qui règne entre la variation de cette différence & la variation de la latitude.*

Soit

$$f = \frac{\sqrt{(p^2 q^2 r^2 - p^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r},$$

où l'arc de  $15^{\circ}$  rectifié.

$$H = \frac{p^2 q^2}{r^3} + \frac{p^2}{r}.$$

$L = \frac{e r' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} - \frac{\delta r r}{\pi \zeta}$  s'il s'agit d'un contact intérieur.

$L = \frac{e r' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} + \frac{\delta r r}{\pi \zeta}$  s'il s'agit d'un contact extérieur.

*Lever du Soleil.*

$$M = \frac{\vartheta l}{\zeta} - \frac{\vartheta s}{q} - \frac{f \omega}{q}.$$

$$F = \frac{\vartheta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f \vartheta}{q}.$$

*Coucher du Soleil.*

$$A' = \frac{\vartheta l}{\zeta} - \frac{\vartheta s}{q} + \frac{f \omega}{q}.$$

$$F' = \frac{\vartheta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f \vartheta}{q}.$$

$\delta$  la distance de la conjonction au commencement de l'Eclipse, observé au lever du Soleil, évaluée en secondes horaires.

$\beta$  la même distance évaluée en arc de cercle.

$\delta'$  la distance de la conjonction à la fin de l'Eclipse, observée au coucher du Soleil, évaluée en secondes horaires.

$\beta'$  la même distance évaluée en arc de cercle.

On peut conclure du §. 25 que l'on a en général

$$\delta = -\frac{3600'' \zeta}{n r} \times [F + \sqrt{L^2 - A'^2}]. \quad \delta' = -\frac{3600'' \zeta}{n r} \times [F' - \sqrt{L^2 - A'^2}].$$

$$\beta = -\frac{\zeta \vartheta}{n r} \times [F + \sqrt{L^2 - A'^2}]. \quad \beta' = -\frac{\zeta \vartheta}{n r} \times [F' - \sqrt{L^2 - A'^2}].$$

Soit

$m$  l'arc sémi-diurne du parallèle, évalué en arc de cercle.

$m'$  l'arc sémi-diurne, évalué en temps.

$Y$  la différence en longitude, des lieux respectifs qui voient le commencement de l'Eclipse au lever du Soleil & la fin au coucher de cet astre, évaluée en arc de cercle.

$Y'$  la différence en longitude, évaluée en secondes de temps.

$Y''$  la différence en longitude, évaluée en secondes de degré.

$dY''$  la variation de la longitude, évaluée en secondes de degré.

$dS$  la variation de la latitude, évaluée en arc de cercle.

$dS'$  la variation de la latitude, évaluée en secondes de degré.

206265'' le nombre de secondes de degré que contient le rayon du cercle lorsqu'on le compare à la circonférence.



Ann. 1785. On conclura de l'article VI du III.<sup>e</sup> Mémoire, que l'on a indistinctement

$$Y = 2m - \beta' + \beta.$$

$$Y = 2m - \frac{\zeta v}{nr} \left[ \frac{2fp}{q} + \sqrt{L^2 - A^2} + \sqrt{L^2 - A^2} \right].$$

$$Y' = 2m' - b' + b.$$

$$Y' = 2m' - \frac{3600''\zeta}{nr} \times \left[ \frac{2fp}{q} + \sqrt{L^2 - A^2} + (L^2 - A^2) \right].$$

$$Y'' = 15 Y'.$$

$$Y'' = 15 \times (2m' - \frac{3600''\zeta}{nr} \times \left[ \frac{2fp}{q} + \sqrt{L^2 - A^2} + \sqrt{L^2 - A^2} \right]).$$

$$Y'' = 206265'' \times \frac{Y}{r}.$$

$$Y'' = 206265'' \times \left[ \frac{2m}{r} - \frac{\zeta v}{nr} \times \left( \frac{2fp}{qr} + \frac{\sqrt{L^2 - A^2} + \sqrt{L^2 - A^2}}{r} \right) \right].$$

Mais d'ailleurs

$$\sin m = \frac{fr^3}{cpq} \quad \cos m = -\frac{pr^2s}{cpq} \quad dm = \frac{pr^2ds}{c^2f} \quad df = -\frac{Hds}{fr}$$

$$d\sqrt{L^2 - A^2} = \left( \frac{p}{q} + \frac{Hws}{qfr} \right) \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}} ds.$$

$$d\sqrt{L^2 - A^2} = \left( \frac{p}{q} - \frac{Hws}{qfr} \right) \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}} ds;$$

$$dS = \frac{rds}{r} \quad dS' = \frac{206265''}{r} dS.$$

On a donc

$$dY'' = dS \left\{ \frac{2pr}{c^2f} + \frac{\zeta vc}{nr^2} \left[ \frac{2Hps}{qfr} - \left( \frac{p}{q} + \frac{Hws}{qfr} \right) \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}} \right] - \frac{\zeta vc}{nr^2} \left( \frac{p}{q} - \frac{Hws}{qfr} \right) \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}} \right\}.$$

(65.) On peut maintenant déterminer, sous chaque parallèle, la différence en longitude des lieux, dont l'un observe le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & l'autre observe la fin au coucher de cet astre; avec la loi qui règne entre la variation de

de cette différence, & la variation de la latitude : on a pour résoudre cette question,

*Premier système d'équations corélatives\*.*

$$Y' = 2m' - 2 \times \frac{3600'' \zeta \phi f}{n q r} - \frac{3600'' \zeta}{n r} [\sqrt{L^2 - A'^2} + \sqrt{L^2 - A^2}].$$

$$dS : dY'' :: r : \left\{ \begin{array}{l} \frac{2pr^2}{cf} + \frac{2\zeta v H \phi cs}{nr^2 qf} - \frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} + \frac{H \omega s}{qf} \right) \times \frac{A'}{\sqrt{L^2 - A'^2}} \\ - \frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} - \frac{H \omega s}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}}. \end{array} \right.$$

(66.) Si l'on avoit demandé, pour chaque parallèle, la différence en longitude des lieux dont l'un observe le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, & l'autre observe la fin au lever de cet astre; avec la loi qui règne entre la variation de cette différence, & la variation de la latitude; on seroit parvenu aux résultats suivans.

*Deuxième système d'équations corélatives.*

$$Y' = 2m' - 2 \times \frac{3600'' \zeta \phi f}{n q r} + \frac{3600'' \zeta}{n r} [\sqrt{L^2 - A'^2} + \sqrt{L^2 - A^2}].$$

$$dS : dY'' :: r : \left\{ \begin{array}{l} \frac{2pr^2}{cf} + \frac{2\zeta v H \phi cs}{nr^2 qf} + \frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} + \frac{H \omega s}{qf} \right) \times \frac{A'}{\sqrt{L^2 - A'^2}} \\ + \frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} - \frac{H \omega s}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}}. \end{array} \right.$$

(67.) Dans ces équations,  $Y'$  positif indique que le lieu qui voit le phénomène au coucher du Soleil, est plus oriental que celui qui voit le phénomène au lever de cet astre; si l'on étoit dans une supposition contraire, on en seroit averti par la valeur négative de  $Y'$ .

$dY''$  positif, indique que la différence en longitude est croissante;  $dY''$  négatif, indique que cette différence est décroissante.

\* J'entends par *équations corélatives*, des équations qui ont lieu dans les mêmes circonstances.

354 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

$dS'$  positif, apprend que l'on s'approche du pôle boréal de l'équateur;  $dS'$  négatif, fait voir que l'on s'éloigne de ce pôle.

Il est superflu d'avertir que l'arc sémi-diurne se calcule par la formule  $\text{cofinus } m = - \frac{pr^2}{699}$ ;

TABLE des quantités constantes, relatives à la présente recherche, pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764.

	$\frac{Y'}{f \& 2 \times \frac{3600'' \zeta \varphi f}{nqr}}$	$\frac{A \& A'}{(A_1) \& (A_1)}$
$\text{cofinus } m$	$\frac{pq}{r} = + 100210.$	$\frac{\psi l}{\zeta} = 73159.$
		$(A_2) \& (A_2)$
$\text{Log.} \left\{ \frac{pr^2}{pq} = + 8,9129504; \right.$	$\text{Log.} \left\{ \frac{\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2} = + 0,0024293. \right.$	$\text{Log.} \left\{ \frac{p}{q} = - 0,0555664; \right.$
	$2 \times \frac{00'' \zeta \varphi}{nqr} = - 5,9035583.$	$(A_3) \& (A_3)$
		$\frac{u}{q} = - 0,3164551$
	$\text{Contact intérieur.}$	$\text{Contact extérieur.}$
	$L = + 2415.$	$L = + 56968.$
	$\text{Log.} \left\{ \frac{3600'' \zeta}{nr} \right\} = - 6,1490219.$	
	$\frac{dY''}{H = + 101125 \dots \log. H = 10,0048586.}$	
	$\frac{qr}{q} = 87990.$	
	$2 pr^2 = + 29,2248924.$	
	$\frac{2 \zeta v H \varphi}{nr^2 q} = - 0,0370336.$	
	$\frac{H u}{q} = + 9,6884131.$	
	$\frac{\zeta u}{nr^2} = - 10,2873558.$	

## E X E M P L E.

(68.) Lors de l'Eclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on demande quelle étoit sous le parallèle boréal de 50<sup>d</sup>, la différence en longitude des lieux respectifs, dont l'un a vu le commencement de l'Eclipse au lever du Soleil, & l'autre a observé la fin de ce phénomène au coucher de cet astre; avec le rapport de la variation de cette différence en longitude, à la variation de la latitude.

SOLUTION. On voit d'abord par la nature de la question, qu'il faut employer les équations du §. 65; d'ailleurs à cause du parallèle boréal de 50<sup>d</sup>, on a

$$\left. \begin{array}{l} s = + \sinus \ 49^{\text{d}} \ 50' \ 28'' \\ c = + \cosin. \ 49. \ 50. \ 28 \end{array} \right\} \text{Logarithme} \left\{ \begin{array}{l} s = 9,8832405. \\ c = 9,8094988. \\ \frac{s}{c} = + 0,0737417. \end{array} \right.$$

TYPE du Calcul pour trouver la valeur de Y'.

$$\begin{array}{r} \text{cosinus } m. \\ + 8,9229504 \log. \dots \left\{ \frac{pr^2}{pq} \right. \\ + 0,0737414 \dots \log. \frac{s}{c}. \\ \hline 8,9966918 \dots \log. \cos. m. \\ 2 m' = 12^{\text{h}} \ 45' \ 34''. \\ \quad \quad \quad \underline{f} \\ + 9,8832405 \dots \log. s. \\ + 0,0024293. \\ \hline 9,8856698 \dots \log. 76854. \\ \frac{pq}{r} + s \frac{\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2} = + 177064. \left. \begin{array}{l} = 10,2481306. \\ = 9,3683985. \\ = 19,6165291. \\ = 2. \end{array} \right\} \text{Log.} \left\{ \begin{array}{l} 9,8082645 \dots \log. f. \\ \hline \end{array} \right. \\ \frac{pq}{r} - s \frac{\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2} = + 23356. \\ \text{Log. } f = 9,8082645. \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{f} \\ \frac{cs}{f} \end{array} \right\} = + 0,0749760. \quad \text{Log. } cf = 19,6177633, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{f} \\ \frac{cs}{f} \end{array} \right\} = + 9,8844748. \end{array}$$

Y y ij

$$\begin{aligned}
& 2 \times \frac{3600'' \zeta \phi f}{n q r} \\
& + 9,8082645 \dots \log. f. \\
& - 5,9035583 \dots \log. 2 \times \frac{3600'' \zeta \phi}{n q r} \\
& \hline
& 3,9047062 \dots \log. 8030''. \\
& 2 \times \frac{3600'' \zeta \phi f}{n q r} = 8030''.
\end{aligned}$$

$$A = + (A_1) - (A_2) - (A_3) \dots (A_1) = 73159.$$

$$\begin{array}{rcl}
(A_2) & (A_3) & \\
+ 9,8832405 \dots \log. s. & + 9,8082645 \dots \log. f. & A = - 25121. \\
- 0,0555664. & - 0,3164455. & \\
\hline
9,8276741 \dots \log. 67247. & 9,4918190 \dots \log. 31033. & \log. A = 9,4000369. \\
L + A = + 31847. & \log. \begin{cases} L + A = 9,5030685. \\ L - A = 9,9142850. \end{cases} & \sqrt{L^2 - A^2} = + 51130. \\
L - A = + 82089. & \hline & \log. \left\{ \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}} \right\} = - 0,3086334. \\
& + 19,4173535. & \\
& \hline & + 9,7086767 \dots \log. (L^2 - A^2).
\end{array}$$

$$A' = + (A'_1) - (A'_2) + (A'_3) \dots (A'_1) = 73159 \dots (A'_2) = 67247 \dots (A'_3) = 31033.$$

$$\begin{array}{rcl}
A' = + 36945. & \log. A' = 9,5675557. & \\
L + A' = + 93913. & \log. \begin{cases} L + A' = 9,9727257. \\ L - A' = 9,3015291. \end{cases} & \sqrt{L^2 - A'^2} = + 43364. \\
L - A' = + 20023. & \hline & \log. \left\{ \frac{A'}{\sqrt{L^2 - A'^2}} \right\} = - 0,0699717. \\
& 19,2742548. & \\
& \hline & + 9,6371274 \dots \log. \sqrt{L^2 - A'^2}.
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{L^2 - A^2} + \sqrt{L^2 - A'^2} &= 94494. \\
+ 9,9754042 \dots \log. 94494. & \\
- 6,1490219 \dots \log. \frac{3600'' \zeta}{n r} & \\
\hline
3,8263823 \dots \log. 6705''. &
\end{aligned}$$

$$Y' = \left\{ \begin{array}{l} + 12^h 45' 34'' \\ - 2. 13. 50 \\ - 1. 51. 45 \end{array} \right\} = + 8^h 39' 59''.$$

TYPE du Calcul pour trouver le rapport de  $dY''$  à  $dS'$ .

$\frac{2pr^2}{cf}$ $+ 29,2248924 \dots \log. 2pr^2.$ $- 19,6177633 \dots \log. cf.$ <hr/> $9,6071291 \dots \log. 40470.$ $\frac{2pr^2}{cf} = + 40470.$	$\frac{2\zeta v H \phi cs}{nr^2 qf}$ $+ 9,8844748 \dots \log. \frac{cs}{f}$ $- 0,0370336 \dots \log. \frac{2\zeta v H \phi}{nr^2 q}$ <hr/> $9,8474412 \dots \log. 70379.$ $\frac{2\zeta v H \phi cs}{nr^2 qf} = + 70379.$	$\frac{H\omega s}{qf}$ $+ 9,6884131 \dots \log. \frac{H\omega}{q}$ $+ 0,0749760 \dots \log. \frac{s}{f}$ <hr/> $9,7633891 \dots \log. 57995.$ $\frac{H\omega s}{qf} = + 57995.$		
<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <math display="block">\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}</math> <math display="block">\frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} = \left\{ \begin{array}{l} + 87990. \\ + 57995. \\ + 145985. \end{array} \right.</math> <math display="block">+ 10,1643084 \dots \log. 145985.</math> <math display="block">- 0,0695717 \dots \log. \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}.</math> <hr/> <math display="block">+ 10,0947367.</math> <math display="block">+ 9,8094988 \dots \log. c.</math> <math display="block">+ 19,9042355.</math> <math display="block">- 10,2873558 \dots \log. \frac{\zeta v}{nr^2}.</math> <hr/> <math display="block">9,6168797 \dots \log. 41388.</math> <math display="block">\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}} = + 41388.</math> </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <math display="block">\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}</math> <math display="block">\frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} = \left\{ \begin{array}{l} + 87990. \\ - 57995. \\ + 29995. \end{array} \right.</math> <math display="block">+ 9,4770489 \dots \log. 29995.</math> <math display="block">- 0,3086398 \dots \log. \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}.</math> <hr/> <math display="block">+ 9,1684091.</math> <math display="block">+ 9,8094988 \dots \log. c.</math> <math display="block">+ 18,9779079.</math> <math display="block">- 10,2873558 \dots \log. \frac{\zeta v}{nr^2}.</math> <hr/> <math display="block">8,6905521 \dots \log. 4904.</math> <math display="block">\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}} = - 4904.</math> </td> </tr> </table>			$\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}$ $\frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} = \left\{ \begin{array}{l} + 87990. \\ + 57995. \\ + 145985. \end{array} \right.$ $+ 10,1643084 \dots \log. 145985.$ $- 0,0695717 \dots \log. \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}.$ <hr/> $+ 10,0947367.$ $+ 9,8094988 \dots \log. c.$ $+ 19,9042355.$ $- 10,2873558 \dots \log. \frac{\zeta v}{nr^2}.$ <hr/> $9,6168797 \dots \log. 41388.$ $\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}} = + 41388.$	$\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}$ $\frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} = \left\{ \begin{array}{l} + 87990. \\ - 57995. \\ + 29995. \end{array} \right.$ $+ 9,4770489 \dots \log. 29995.$ $- 0,3086398 \dots \log. \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}.$ <hr/> $+ 9,1684091.$ $+ 9,8094988 \dots \log. c.$ $+ 18,9779079.$ $- 10,2873558 \dots \log. \frac{\zeta v}{nr^2}.$ <hr/> $8,6905521 \dots \log. 4904.$ $\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}} = - 4904.$
$\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}$ $\frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} = \left\{ \begin{array}{l} + 87990. \\ + 57995. \\ + 145985. \end{array} \right.$ $+ 10,1643084 \dots \log. 145985.$ $- 0,0695717 \dots \log. \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}.$ <hr/> $+ 10,0947367.$ $+ 9,8094988 \dots \log. c.$ $+ 19,9042355.$ $- 10,2873558 \dots \log. \frac{\zeta v}{nr^2}.$ <hr/> $9,6168797 \dots \log. 41388.$ $\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A^2)}} = + 41388.$	$\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}$ $\frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} = \left\{ \begin{array}{l} + 87990. \\ - 57995. \\ + 29995. \end{array} \right.$ $+ 9,4770489 \dots \log. 29995.$ $- 0,3086398 \dots \log. \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}.$ <hr/> $+ 9,1684091.$ $+ 9,8094988 \dots \log. c.$ $+ 18,9779079.$ $- 10,2873558 \dots \log. \frac{\zeta v}{nr^2}.$ <hr/> $8,6905521 \dots \log. 4904.$ $\frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\phi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}} = - 4904.$			

Cette valeur est négative parce que  $A$  est négatif.

$$dS : dY'' :: 100000 : \left\{ \begin{array}{l} + 40470 \\ + 70379 \\ - 41388 \\ + 4904 \end{array} \right\} :: + 100000 : + 74365.$$

(69.) On voit par ces calculs, que le lieu qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, a observé la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil, sous le parallèle boréal de 50<sup>d</sup>, étoit plus oriental de 8<sup>h</sup> 39' 59" que celui qui a observé le commencement de l'Éclipse au lever de cet astre : cette différence en longitude augmentoit à mesure que l'on s'approchoit du pôle boréal, elle diminuoit en descendant vers l'Équateur ; la variation, exprimée en secondes de degré, étoit à la variation de la latitude comme 744 est à 1000. Les branches des ovals d'illumination s'éloignoient donc en remontant vers le pôle.

On auroit trouvé pareillement que le lieu qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, a observé le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil sous le parallèle boréal de 50<sup>d</sup>, étoit plus oriental de 12<sup>h</sup> 23' 29", ou (ce qui revient au même) plus occidental de 11<sup>h</sup> 36' 31" que celui qui a observé la fin de l'Éclipse au lever de cet astre : cette différence en longitude, considérée comme orientale, augmentoit à mesure que l'on s'approchoit du pôle boréal, elle diminuoit en descendant vers l'Équateur ; la variation, exprimée en secondes de degré, étoit à la variation de la latitude comme 1473 est à 1000. Comme la différence en longitude surpassoit 12 heures, on en doit conclure que les branches des ovals d'illumination se rapprochoient réellement en remontant vers le pôle.

(70.) Si l'on jette les yeux sur les équations des §. 65 & 66, on verra que la supposition de  $Y' = 0$  réduit ces équations à

$$2m' - 2 \times \frac{3600'' \zeta \varphi f}{n r} \mp \frac{3600'' \zeta}{n r} [\sqrt{L^2 - A^2} + \sqrt{L^2 - A^2}] = 0.$$

La supposition de  $Y' = 0$  détermine évidemment les intersections des ovals d'illumination. J'ai donc eu raison de dire, (§. 61) que dans le cas des intersections de ces ovals, on avoit à résoudre une équation de cette forme,

Arc sémi-diurne égale fonction du sinus & du cosinus de la latitude.

(71.) Dans les équations

$$r dY^n = dS \left\{ \begin{aligned} & \frac{2pr^2}{cf} + \frac{2\zeta v H \varphi cs}{nr^2 qf} \mp \frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\varphi r}{q} + \frac{Hws}{qf} \right) \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}} \\ & \mp \frac{\zeta v c}{nr^2} \times \left( \frac{\varphi r}{q} - \frac{Hws}{qf} \right) \times \frac{A}{\sqrt{L^2 - A^2}}. \end{aligned} \right.$$

Soit que l'on suppose

$$\sqrt{L^2 - A^2} = 0 \quad \sqrt{L^2 - A'^2} = 0 \quad \text{ou} \quad f = 0;$$

la valeur de  $dY''$  devient infinie. Ces suppositions (*Section cinquième*) donnent les sommets des courbes d'illumination.

On voit donc qu'aux sommets des courbes d'illumination, la variation de la différence en longitude est à la variation de la latitude dans un rapport infini.

*Détermination de la durée de l'Éclipse, abstraction faite du mouvement diurne.*

(72.) Avant de déterminer les intersections des courbes d'illumination, il faut encore résoudre une question que l'on peut exposer de la manière suivante. Pour chaque observateur, la durée de l'Éclipse est d'un certain nombre de secondes horaires : cette durée est le résultat du mouvement de la Lune dans son orbite, combiné avec le mouvement diurne de l'observateur. Supposons que le mouvement de rotation de la Terre soit suspendu, & que l'observateur conserve toujours la même position que celle qu'il a, au commencement ou à la fin de l'Éclipse; la durée du phénomène ne dépendra plus que du mouvement de la Lune dans son orbite; elle sera différente de celle observée dans la supposition de la rotation de la Terre. On peut donc demander quelle eût été cette durée dans cette nouvelle hypothèse, & conséquemment pour quelle quantité le mouvement diurne est entré dans la durée de l'Éclipse.

(73.) Pour résoudre le Problème,

Soit

$$L = \frac{\sigma \tau' r E}{\pi \zeta \sigma} - \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta}, \text{ contact intérieur.}$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r E}{\pi \zeta \sigma} + \frac{\delta \tau \tau}{\pi \zeta}, \text{ contact extérieur.}$$



$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{q s \varphi}{r^2} + \frac{c g p \omega}{r^3} + \frac{c h p p \varphi}{r^4} \\ F &= \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q s \omega}{r^2} - \frac{c g p \varphi}{r^3} + \frac{c h p p \omega}{r^4} \\ E &= \xi - \frac{p s \pi}{r^2} - \frac{c p q h \pi}{r^4} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Valeurs correspon-} \\ \text{dantes à la fin du} \\ \text{phénomène, observée} \\ \text{dans un lieu quel-} \\ \text{conque } N. \end{array}$$

$b$  le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à la fin du phénomène, observée dans le lieu  $N$ .

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{q s \varphi}{r^2} + \frac{c g p \omega}{r^3} + \frac{c h p p \varphi}{r^4} \\ F' &= \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q s \omega}{r^2} - \frac{c g p \varphi}{r^3} + \frac{c h p p \omega}{r^4} \\ E' &= \xi - \frac{p s \pi}{r^2} - \frac{c p q h \pi}{r^4} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Valeurs correspon-} \\ \text{dantes au commence-} \\ \text{ment du phénomène,} \\ \text{observé dans le lieu } N, \end{array}$$

$b'$  le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'au commencement du phénomène, observé dans le lieu  $N$ .

Il est évident que l'on a en général

$$b - b' = \frac{3600'' \zeta}{n r} \times [F' - F + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

$$b - b' = \text{durée totale de l'Éclipse dans le lieu } N.$$

Mais si l'on suppose le mouvement horaire suspendu, l'Observateur ne changera pas de cercle horaire, il verra le commencement & la fin de l'Éclipse, lorsque le Soleil sera dans le même cercle, les valeurs  $A, A', F, F', E, E'$  seront identiques.

On aura donc

$$\text{Durée de l'Éclipse} = 2 \times \frac{3600'' \zeta}{n r} \times \begin{cases} \sqrt{(L + A) \times (L - A)} \\ \text{ou} \\ \sqrt{(L + A') \times (L - A')} \end{cases}$$

Suivant que l'on demandera quelle eût été la durée du phénomène dans l'hypothèse que l'Observateur eut toujours conservé la position qu'il avoit à la fin ou au commencement de l'Éclipse.

(74.) Telle est en général, la solution du Problème proposé. Dans le cas particulier du lever & du coucher du Soleil, on a

$$L =$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \delta'} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ contact intérieur.}$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \delta} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ contact extérieur.}$$

$$f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - \rho^2 r^2 s^2)}}{r^2}.$$

*Lever du Soleil.**Coucher du Soleil.*

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f w}{q}. \quad | \quad A' = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f w}{q}.$$

$$\text{Durée de l'Éclipse} = 2 \times \frac{3600'' \zeta}{\pi r} \times \begin{cases} \sqrt{(L + A) \times (L - A)} \\ \text{ou} \\ \sqrt{(L + A') \times (L - A')} \end{cases}$$

Suivant que l'on demande quelle eût été la durée du phénomène dans l'hypothèse que l'Observateur eut toujours conservé la position qu'il avoit, lorsque l'Éclipse commençoit ou finissoit pour lui, au lever ou au coucher du Soleil.

Voyons quel usage on peut faire du Problème que nous venons de résoudre.

(75.) J'ai remarqué, §. 32, que les sommets des courbes d'illumination déterminés par les équations du §. 31 sont situés sous le dernier des parallèles terrestres, où le Soleil puisse se lever ou se coucher; relativement à ces sommets le Soleil n'est qu'un instant à l'horizon. L'Astronomie nous apprend que l'arc sémi-diurne varie avec une très-grande rapidité dans les latitudes voisines de ces sommets. Quelques minutes de différence sur la latitude du parallèle introduisent une très-grande altération dans la durée du jour. Cette réflexion démontre qu'il n'est pas possible que les courbes d'illumination aient une intersection dans l'hémisphère boréal, si les sommets de ces courbes donnés par les équations du §. 31 sont imaginaires dans l'hémisphère boréal; qu'il est pareillement impossible que les courbes d'illumination aient une intersection dans l'hémisphère-austral, à moins que les sommets de ces courbes déterminés par les équations du §. 31, ne soient réels dans l'hémisphère austral.

*Mém. 1769.*

. Z. z

Supposons en effet que les sommets soient imaginaires; on doit conclure que sous les parallèles déterminés par les formules du §. 31, aucun lieu ne peut voir le disque du Soleil entamé par la Lune, même instantanément, au lever ou au coucher du Soleil; supposons maintenant que l'on redescende un peu vers l'Équateur, on pourra retrouver l'Éclipse au lever ou au coucher de cet Astre. Par la supposition, la durée de l'Éclipse n'est pas même instantanée sous les parallèles des sommets; elle ne peut donc être que fort petite dans les points de la Terre que nous considérons. L'Astronomie nous apprend que vers les parallèles des sommets du §. 31, l'arc sémi-diurne varie avec une très-grande rapidité; on aura donc essentiellement une durée du phénomène moindre que la durée du jour ou de la nuit.

Les raisonnemens précédens peuvent servir à démontrer que dans tous les cas la latitude du lieu qui voit le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre, ou le commencement au coucher du Soleil & la fin au lever de cet astre, ne doit pas être fort différente de celle des sommets des courbes d'illumination.

(76.) Vers les sommets des courbes d'illumination, déterminés par les formules du §. 31, les rayons des parallèles terrestres sont fort petits; le mouvement de rotation de la Terre influe donc peu sur la durée de l'Éclipse; on aura par conséquent une idée approchée de l'arc sémi-diurne ou sémi-nocturne du lieu qui voit le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre, ou le commencement au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre; en calculant quelle eût été la demi-durée de l'Éclipse aux sommets de la courbe d'illumination dans l'hypothèse que le mouvement diurne de la Terre vint à être suspendu.

(77.) J'ai fait voir (§. 31) qu'aux sommets de la courbe d'illumination l'on a

*Hémisphère boréal.*

$$A = \frac{\varphi}{\zeta} - \frac{\varphi}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}$$

*Hémisphère austral.*

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} + \frac{p}{r} \times \frac{r^2 p}{\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}.$$

Soit donc

$y$  le nombre de secondes horaires égal à la demi-durée de l'Éclipse aux sommets de la courbe d'illumination dans l'hypothèse que le mouvement diurne de la Terre vint à être suspendu.

$h''$  le cosinus de l'arc de l'Équateur correspondant au nombre  $y$  de secondes horaires.

$S$  la latitude corrigée du lieu dont la demi-durée du jour ou de la nuit est égale à  $y$ .

On aura

$$y = \frac{3600'' \zeta}{n r} \times \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}.$$

$$\text{Tangente } S = - \frac{q p}{p r} \times h''.$$

Comme la plus grande durée de l'Éclipse pour un lieu particulier, ne peut guère surpasser trois heures; dans l'hémisphère boréal le phénomène se passe pendant le jour lorsque la déclinaison du Soleil est australe; le commencement de l'Éclipse arrive au lever du Soleil & la fin au coucher de cet astre; on doit faire alors  $h''$  positive.

Lorsque la déclinaison du Soleil est boréale, le phénomène se passe pendant la nuit; le commencement de l'Éclipse arrive au coucher du Soleil & la fin au lever de cet astre; on doit faire  $h''$  négative.

Dans l'hémisphère austral le phénomène se passe pendant le jour lorsque la déclinaison du Soleil est boréale; le commencement de l'Éclipse arrive au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre; on doit faire  $h''$  positive.

Lorsque la déclinaison du Soleil est australe, le phénomène se passe pendant la nuit; le commencement de l'éclipse arrive au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre; on doit faire  $h''$  négative.

Si l'on applique le calcul à l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, on

Z z ij

364 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
trouvera pour les contacts extérieurs des limbes,

*Hémisphère boréal.*

$$A = - 14524.$$

$$L + A = + 42444.$$

$$L - A = + 71492.$$

$$y = 3909''.$$

$$h = - \cos. 16^d 17' 15''.$$

$$S = 85^d 0' 50''.$$

On voit donc que dans l'hémisphère boréal on a pu observer le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre.

*Hémisphère austral.*

$$A = + 160842.$$

$$L + A = + 217810.$$

$$L - A = - 103874.$$

$$y \text{ imaginaire.}$$

$$S \text{ imaginaire.}$$

Il n'y a donc eu dans l'hémisphère austral aucun lieu qui ait pu voir le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil & la fin au coucher de cet astre, ou réciproquement le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre.

(78.) Rien de plus simple que de démontrer, ainsi que je l'ai avancé, §. 75, que vers les sommets des courbes d'illumination, déterminés par les formules du §. 31, l'arc sémi-diurne varie avec une très-grande rapidité; ou, ce qui revient au même, que la variation de l'arc sémi-diurne est infiniment plus grande que celle de la latitude. Pour le prouver, soit  $H$  l'arc sémi-diurne,  $h$  son cosinus,  $g$  son sinus,  $S$  la latitude du parallèle, & conservons toutes les autres dénominations de cet ouvrage.

On a vu (§. 25) que l'on a en général  $h' = - \frac{pr^2s}{cpg}$ ,

donc

$$dh' = - \frac{pr^2s}{cpg} \times \frac{ds}{s} + \frac{pr^2s}{cpg} \times \frac{dc}{c} = h' \times \left( \frac{dc}{c} - \frac{ds}{s} \right) = - \frac{hr^2ds}{c^2s};$$

$$\text{mais } dh' = - \frac{g'dH}{r}, ds = \frac{cdS}{r}; \text{ donc } dH = \frac{hr^2dS}{g'cs}.$$

Dans le cas des sommets  $h' = \pm r$ ,  $g' = 0$ ; Donc  $dH$  est à  $dS$  dans un rapport infini.

*Analyse pour déterminer les intersections des courbes  
d'illumination.*

(79.) Je supposerai, dans cette recherche, que l'on a constaté par la méthode précédente, que les courbes d'illumination peuvent avoir des points d'intersection dans l'hémisphère pour lequel on calcule. Vainement, en effet, chercheroit-on les intersections de ces courbes, s'il étoit démontré que leurs branches ne peuvent pas se couper.

(80.) Je remarque que lorsque l'on connoît à peu près sous quel parallèle les ovales d'illumination ont leur intersection, il est aisé d'avoir très-promptement la correction qu'il faut faire à cette première latitude pour tomber rigoureusement sur le parallèle qui satisfait à la question.

Soit  $S$  cette latitude approchée, ou plutôt la latitude corrigée correspondante. Je cherche, par le premier ou par le second système d'équations corrélatives du §. 65 ou 66, suivant que la nature de la question le détermine, quelle est sous le parallèle, dont la latitude corrigée  $= S$ , la différence en longitude des lieux qui observent le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre, ou réciproquement; avec la loi qui règne entre la variation de cette différence en longitude, & la variation de la latitude; c'est-à-dire, que je calcule pour le parallèle dont la latitude corrigée  $= S$ , les valeurs correspondantes de  $Y'$ , & de  $\frac{dS'}{dY''}$ .

Si la variation de la latitude étoit à la variation de la différence en longitude dans un rapport constant pour tous les parallèles, il est évident que l'on auroit

$$\text{Latitude corrigée qui satisfait au Problème} = S + Y' \frac{dS'}{dY''}.$$

Mais cette équation n'est pas rigoureuse. Je cherche donc, sous le nouveau parallèle, la différence en longitude des lieux qui observent le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre, ou réciproquement; avec la loi qui

règne entre la variation de la différence en longitude, & la variation de la latitude; c'est-à-dire, que je calcule pour le parallèle, dont la latitude corrigée égale  $S + 15 Y' \times \frac{dS'}{dY''}$ , les valeurs correspondantes de  $Y'$ , & de  $\frac{dS'}{dY''}$ .

Pour ne pas confondre ces résultats, je nomme ces quantités

$$Y' (2) \text{ \& } \frac{dS'}{dY''} (2),$$

& j'ai, à cause de la loi de continuité,

$$\text{Latitude corrigée} = S + 15 Y' \frac{dS'}{dY''} + 15 Y' (2) \times \frac{dS'}{dY''} (2).$$

(81.) Si l'on vouloit avoir une expression de la latitude encore plus approchée; soit  $X$  la quantité qu'il faut ajouter à l'expression de la latitude du *paragraphe précédent*; ou, si l'on veut, la quantité qu'il faut ajouter au terme  $15 Y' (2) \frac{dS'}{dY''} (2)$ , pour tomber sur la valeur rigoureuse de la latitude.

En vertu de la loi de continuité qui est suffisamment établie entre les grandeurs successives  $15 Y' \frac{dS'}{dY''}$ ,  $15 Y' (2) \frac{dS'}{dY''} (2)$ , &c. & les différences des quantités successives  $Y'$ ,  $Y' (2)$  &c. on a la proportion suivante:

$$X : 15 Y' (2) \frac{dS'}{dY''} (2) :: Y' (2) - Y' (3) : Y' - Y' (2).$$

Dans cette dernière proportion la quantité  $Y' (3)$  est la valeur de  $Y'$  qui a lieu pour le parallèle dont la latitude corrigée

$$= S + 15 Y' \frac{dS'}{dY''} + 15 Y' (2) \times \frac{dS'}{dY''} (2); \text{ cette}$$

quantité est évidemment infiniment petite, relativement à  $Y' (2)$ ; on peut donc n'y avoir aucun égard dans le calcul; on aura alors

$$X : 15 Y' (2) \frac{dS'}{dY''} (2) :: Y' (2) : Y' - Y' (2).$$

$$X = 15 Y' (2) \frac{dS'}{dY''} (2) \times \frac{Y' (2)}{Y' - Y' (2)}.$$

Latitude corrigée

$$\begin{aligned}
 &= S + 15 Y' \frac{dS'}{dY''} + 15 Y' (2) \times \frac{dS'}{dY''} (2) + 15 Y' (2) \frac{dS'}{dY''} (2) \times \frac{Y' (2)}{Y' - Y' (2)} \\
 &= S + 15 Y' \frac{dS'}{dY''} + 15 Y' (2) \frac{dS'}{dY''} (2) \times \frac{Y'}{Y' - Y' (2)};
 \end{aligned}$$

c'est de cette dernière formule dont je ferai usage par la suite.

(82.) Il est bien facile maintenant de déterminer les intersections des ovals d'illuminations. Par les formules du §. 77, je cherche sous quel parallèle l'arc sémi-diurne ou l'arc sémi-nocturne est égal à la demi-durée qu'auroit eue l'Éclipse aux sommets des courbes d'illumination, déterminés par les équations du §. 31, dans l'hypothèse que la rotation de la Terre vint à cesser. Soit  $S$  la latitude de ce parallèle, ou plutôt la latitude corrigée; c'est de cette latitude approchée dont il faut faire usage dans les calculs prescrits §. 80. Je cherche donc pour cette

latitude, les valeurs de  $Y'$ , & de  $\frac{dS'}{dY''}$ , en ayant égard aux circonstances du Problème, pour employer de préférence les équations du §. 65 ou du §. 66; je fais ensuite les mêmes calculs pour le parallèle dont la latitude corrigée  $= S + 15 Y' \times \frac{dS'}{dY''}$ , je nomme  $Y' (2)$ ,  $\frac{dS'}{dY''} (2)$ . ces nouvelles quantités, afin de ne les pas confondre avec les résultats précédens; je porte toutes ces valeurs dans la formule du §. 81, & j'ai la solution de la question proposée.

(83.) Quand on connoîtra la latitude du lieu qui satisfait au Problème, on déterminera, par les méthodes générales, l'heure que l'on compte dans ce lieu au commencement & à la fin de l'Éclipse; le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'au commencement & à la fin du phénomène; & la longitude du lieu qui l'observe.

(84.) Lors de l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, la latitude corrigée du lieu qui satisfaisoit au Problème, étoit de  $85^{\circ} 1' 47''$ ,



# 368 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

& la latitude vraie de  $85^{\text{d}} 3' 28''$ , boréale. On comptoit dans ce lieu  $10^{\text{h}} 57' 24''$  du soir, lors du commencement de l'Eclipse, &  $1^{\text{h}} 2' 36''$  du matin lors de la fin; la longitude étoit de  $169^{\text{d}} 47' 38''$  occidentale.

J'ai cru qu'il étoit inutile de mettre sous les yeux le Type du calcul pour l'Eclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764; on auroit vu que souvent il est superflu de faire usage de la totalité de l'équation du §. 81; en effet, comme le terme  $15 Y' \frac{dS'}{dY'}$  ne donnoit déjà qu'une correction de  $57''$ , le troisième terme de cette équation n'auroit évidemment donné qu'une correction inappréciable.

(85.) Il est aisé de voir que les sommets des courbes d'illumination donnés par l'équation du §. 31, & le point déterminé par les formules précédentes, forment une espèce de triangle curviligne, dont les côtés sont 1.<sup>o</sup> l'arc du parallèle compris entre les deux sommets; 2.<sup>o</sup> les branches de la courbe d'illumination, compris entre chacun de ces sommets, & le point que je viens d'apprendre à connoître. D'ailleurs les valeurs de  $Y'$  des §. 65 & 66 donnent pour chaque parallèle, la distance des points relatifs de ce triangle; on ne peut donc rien désirer, ce me semble, sur la nature, puisque toutes les parties sont déterminées par mes formules.

## SECTION NEUVIÈME.

*Détermination du rapport entre l'accroissement de la distance apparente des centres du Soleil & de la Lune, & l'accroissement du temps.*

(86.) Quoiqu'au premier coup d'œil la détermination du rapport entre l'accroissement de la distance apparente des centres du Soleil & de la Lune, & l'accroissement du temps pour un lieu & pour une heure quelconques, paroisse étrangère aux courbes d'illumination; il est cependant nécessaire de résoudre cette question, si l'on

Si l'on veut ne laisser aucune incertitude sur quelques cas particulier de ces courbes. J'ai remarqué en effet, §. 27, que quoiqu'en général, des deux valeurs de  $b$  déterminées par les équations des §. 11 & 25, celle qui appartient à l'instant qui précède le passage apparent du centre de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative, désigne le commencement de l'Eclipse; & que celle qui appartient à l'instant qui suit le passage apparent du centre de la Lune par cette perpendiculaire, désigne la fin de l'Eclipse, la règle n'étoit cependant pas infaillible; il est donc indispensable d'avoir une méthode qui ne puisse jamais induire en erreur. Pour y parvenir, je vais déterminer généralement le rapport entre l'accroissement de la distance apparente des centres du Soleil & de la Lune, & l'accroissement du temps; Bien entendu que l'on n'aura recours à la méthode, que dans les cas particuliers où il restera quelque incertitude sur les conclusions.

(87.) Soit

$$\begin{aligned} A &= \frac{\downarrow l}{\zeta} - \frac{q s \phi}{r^2} + \frac{c g p \omega}{r^3} + \frac{c h p p \phi}{r^4} \\ B &= \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q s \omega}{r^2} - \frac{c g p \phi}{r^3} + \frac{c h p p \omega}{r^4} + b \times \frac{97}{3600 \zeta} \\ E &= \zeta - \frac{p s \pi}{r^2} - \frac{c p q h \pi}{r^4} - \frac{7 b^2 \pi}{3600 r^2} \end{aligned}$$

$\lambda$  = tangente (distance apparente des centres du Soleil & de la Lune);

J'ai démontré (III.<sup>e</sup> Mémoire, §. 1.<sup>er</sup>) que

Année 1765

$$\lambda = \frac{\pi \zeta}{E r} \times \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Si l'on différencie cette équation, on aura

$$d\lambda = \frac{\pi \zeta}{E r} \times \frac{(A dA + B dB)}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{\pi \zeta dE}{E^2 r} \times \sqrt{A^2 + B^2},$$

ou plutôt

$$d\lambda = \frac{\pi \zeta}{E r} \times \frac{(A dA + B dB)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Car, ainsi que je l'ai démontré dans le 4.<sup>e</sup> article de mon Mém. 1769.

. A a a

370 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Année 1768. III.<sup>e</sup> Mémoire, la quantité  $\frac{\pi \zeta dE}{E^2 r} \times \sqrt{A^2 + B^2}$ ; c'est-

à-dire, celle qui provient du changement de distance de l'Observateur à l'horizon absolu, est infiniment petite relativement au changement occasionné dans les distances des centres par les mouvemens relatifs de la Lune & de l'Observateur; c'est-à-dire, relativement à la quantité donnée par le terme

$$\frac{\pi \zeta}{E r} \times \frac{(A dA + B dB)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(88.) Puisque dans la question présente, on considère les différentes distances successives des centres du Soleil & de la Lune, relativement à un même lieu, la latitude est une quantité connue; il faut, dans la différentiation, ne regarder comme variable que l'angle horaire. On a donc

$$dA = \frac{-c p p \phi g dg + c p \omega r h dg}{r^4 h},$$

$$dB = \frac{-c p p \omega g dg - c p \phi r h dg}{r^4 h} + \frac{\pi r^2 dg}{\zeta v h}.$$

Soit maintenant

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q s \omega}{r^2} - \frac{c g p \phi}{r^3} + \frac{c h p p \omega}{r^4}.$$

$$C = \frac{\pi r^2}{\zeta v} - \frac{c p p \omega g}{r^4} - \frac{c p \phi h}{r^3}.$$

$$D = \frac{c p p \phi g}{r^4} - \frac{c p \omega h}{r^3}.$$

L'équation du §. 87, deviendra

$$d\lambda = \frac{\pi \zeta}{E r} \times \frac{[C \times (F + b \times \frac{\pi r}{3600'' \zeta}) - A D]}{\sqrt{A^2 + (F + b \times \frac{\pi r}{3600'' \zeta})^2}} \times \frac{dg}{h};$$

D'ailleurs (*Trigonométrie rectiligne*)

$$\frac{dg}{h} = \frac{\text{diff. arc horaire}}{r},$$

$$d\lambda = \frac{r^2}{\cos^2 \mu \text{ (distance des centres)}} \times \text{diff. distance des centres.}$$

Donc si l'on suppose, cosin. distance des centres égale  $r$ , attendu l'erreur infiniment petite que cette supposition introduit dans le calcul, on aura

Accroiss. de l'arc horaire est à l'accroiss. simultanée de la distance des centres

$$\text{comme } r \text{ est à } \frac{\pi \zeta}{Er} \times \frac{[C \times (F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}) - AD]}{\sqrt{[A^2 + (F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta})^2]}}$$

(89.) L'équation précédente peut être mise sous une forme plus commode.

Soit

$$H \text{ un angle dont la tangente égale } \frac{Ar}{F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}}.$$

$$M \text{ un angle dont la tangente égale } \frac{Cr}{D}.$$

On parviendra au résultat suivant,

Accroiss. de l'arc horaire est à l'accroiss. simultanée de la distance des centres

$$\text{comme } r \text{ est à } \frac{\pi \zeta}{Er} \times \frac{D \times \sin. (M - H)}{\cos. M}.$$

(90.) Dans l'usage de cette formule on aura grand soin de ne point se tromper dans le choix des angles  $H$  &  $M$  qu'il faut employer; la règle est fort simple.

En général; la tangente de chacun de ces angles est déterminée par une fraction. Si le dénominateur & le numérateur sont tous deux positifs, l'angle est entre  $0^d$  &  $90^d$ ; si le numérateur est positif & le dénominateur négatif, l'angle est entre  $90^d$  &  $180^d$ ; si le numérateur & le dénominateur sont tous deux négatifs, l'angle est entre  $180^d$  &  $270^d$ ; si le numérateur est négatif & le dénominateur positif, l'angle est entre  $270^d$  &  $360^d$ .

On évaluera l'angle  $M - H$  relativement à ce premier calcul, en donnant à son sinus le signe qui lui convient; ce sinus sera positif si l'angle  $M - H$  est entre  $0^d$  &  $180^d$ ; le sinus sera négatif si l'angle est entre  $180^d$  &  $360^d$ . On donnera

A a a ij

# 372 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

pareillement à  $D$  & à cosinus  $M$  le signe convenable ; ce cosinus, par exemple, sera positif, si l'angle  $M$  est entre  $0^d$  &  $90^d$ , entre  $270^d$  &  $360^d$  ; il sera négatif, si l'angle est entre  $90^d$  &  $270^d$ .

On peut remarquer que la plupart des quantités qui composent la formule du §. 89, entrent également dans la formule qui détermine la distance des centres.

Année 1765. En effet, on a (III.<sup>e</sup> Mémoire, §. 1.<sup>er</sup>)  $\lambda = \frac{A\zeta\pi}{E \times \sin. H}$  ;

la recherche de la distance apparente des centres du Soleil & de la Lune, & celle du rapport de l'accroissement de cette distance à l'accroissement du temps, sont donc liées entre elles.

(91.) Pour récapituler en peu de mots ce qui vient d'être démontré,

Soit

$$A = \frac{(A_1)}{\zeta} - \frac{(A_2)}{r^2} + \frac{(A_3)}{r^3} + \frac{(A_4)}{r^4} ;$$

$$F = \frac{(F_1)}{\zeta} - \frac{(F_2)}{r^2} - \frac{(F_3)}{r^3} + \frac{(F_4)}{r^4} ;$$

$$E = \frac{(E_1)}{\zeta} - \frac{(E_2)}{r^2} - \frac{(E_3)}{r^4} - \frac{(E_4)}{3600^2 \pi} ;$$

$$C = \frac{(C_1)}{\zeta^2} - \frac{(C_2)}{r^4} - \frac{(C_3)}{r^5} ;$$

$$D = \frac{(D_1)}{r^4} - \frac{(D_2)}{r^5} ;$$

$$\text{Tang. } H = \frac{Ar}{F + b \times \frac{\pi r}{3600\zeta}} \quad \text{Tang. } M = \frac{Cr}{D} ;$$

$\lambda =$  tangente (distance apparente des centres du Soleil & de la Lune).

On aura

$$x = \frac{A \zeta \pi}{E \sin. H}$$

Accroiss. de l'arc horaire est à l'accroiss. simultané de la distance des centres

$$\text{comme } r \text{ est à } \frac{\pi \zeta}{Er} \times D \frac{\sin. (M - H)}{\cos. M}.$$

des quantités constantes relatives à la présente recherche pour  
l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764.

<u>A.</u>	<u>F.</u>	<u>E.</u>
$\frac{1}{\zeta} = 73159.$	$\frac{1}{\zeta} = 7354.$	$\xi = 99993.$
$\frac{\varphi}{r^2} = - 0,0586358.$	$\frac{q\omega}{r^2} = - 0,3195149.$	$\frac{p\pi}{r^2} = - 2,8798346.$
$\frac{\omega}{r^2} = - 10,3155335.$	$\text{Log. } \frac{p\varphi}{r^2} = - 10,0546544.$	$\text{Log. } \frac{pq\pi}{r^2} = - 11,8027850.$
$\frac{p\varphi}{r^2} = - 11,1307920.$	$\frac{pp\omega}{r^2} = - 11,3916711.$	$\frac{\gamma\pi}{3600''r} = - 1,6154055.$
	$\text{Log. } \frac{nr}{3600''\zeta} = + 6,1490219.$	$\text{Log. } \frac{\pi\zeta}{r} = + 8,1949633.$

<u>C.</u>	<u>D.</u>
$\frac{nr^2}{\zeta v} = 193801.$	
$\frac{pp\omega}{r^2} = - 11,3916711.$	$\text{Log. } \frac{pp\varphi}{r^2} = - 11,1307920.$
$\frac{p\varphi}{r^2} = - 10,0546544.$	$\frac{p\omega}{r^2} = - 10,3155335.$

## E X E M P L E.

(92.) On demande quels ont été, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, la distance apparente des centres du Soleil & de la Lune, observée à Londres

# 374 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

à 9<sup>h</sup> 4' 33" du matin, & le rapport de l'accroissement de l'angle horaire à l'accroissement simultané de la distance des centres.

SOLUTION. Puisque la latitude de Londres est de 51<sup>d</sup> 31' boréale, je conclus que la latitude corrigée est de 51<sup>d</sup> 21' 33"; que par conséquent

$$\left. \begin{array}{l} s = + \sinus \ 51^{\text{d}} \ 21' \ 33'' \\ c = + \cosin. \ 51. \ 21. \ 33 \end{array} \right\} \text{Logarithme} \left\{ \begin{array}{l} s = 9,8926912. \\ c = 9,7954889. \end{array} \right.$$

L'angle horaire du Soleil est de 43<sup>d</sup> 51' 45", & l'heure de l'observation est entre six heures du matin & midi; donc

$$\left. \begin{array}{l} g = - \sinus \ 43^{\text{d}} \ 51' \ 45'' \\ h = + \cosin. \ 43. \ 51. \ 45 \end{array} \right\} \text{Logarithme} \left\{ \begin{array}{l} g = 9,8406895. \\ h = 9,8579381. \\ cg = 19,6361784. \\ ch = 19,6534270. \end{array} \right.$$

D'ailleurs Londres est plus occidental que Paris de 9' 41" de temps; donc puisque la conjonction est arrivée lorsqu'il étoit à Paris 10<sup>h</sup> 31' 23", il étoit alors à Londres 10<sup>h</sup> 21' 42" du matin; donc à 9<sup>h</sup> 4' 33" la conjonction étoit encore éloignée de 4629"; donc  $b = - 4629''$ .

$$\text{Log. } b = 3,6654872. \quad \text{Log. } b^2 = 7,3309744.$$

TYPE du Calcul.

$$\begin{array}{r} b \times \frac{n^2}{3600''\zeta} \\ + 3,6654872 \dots \text{log. } b. \\ + 6,1490219 \dots \text{log. } \frac{n^2}{3600''\zeta}. \\ \hline 9,8145091 \dots \text{log. } 65239. \\ b \times \frac{n^2}{3600''\zeta} = - 65239. \end{array}$$

$$A = + (A_1) - (A_2) - (A_3) + (A_4) \dots (A_1) = + 73159.$$

$\begin{array}{r} (A_2) \\ +9,8926912 \dots \log. s. \\ -0,0586358. \\ \hline 9,8340554 \dots \log. 68243. \end{array}$	$\begin{array}{r} (A_3) \\ +19,6361784 \dots \log. cg. \\ -10,3155335. \\ \hline 9,3206449 \dots \log. 20924. \end{array}$	$\begin{array}{r} (A_4) \\ +19,6534270 \dots \log. ch. \\ -11,1307920. \\ \hline 8,5226350 \dots \log. 33312. \end{array}$
---	--	--

$$A = - 12677 \dots \log. A = 9,1030165.$$

$$F = + (F_1) - (F_2) + (F_3) + (F_4) \dots (F_1) = + 7354.$$

$\begin{array}{r} (F_2) \\ +9,8926912 \dots \log. s. \\ -0,3195149. \\ \hline 9,5731763 \dots \log. 37426. \end{array}$	$\begin{array}{r} (F_3) \\ +19,6361784 \dots \log. cg. \\ -10,0546544. \\ \hline 9,5815240 \dots \log. 38153. \end{array}$	$\begin{array}{r} (F_4) \\ +19,6534270 \dots \log. ch. \\ -11,3916711. \\ \hline 8,2617559 \dots \log. 18271. \end{array}$
---	--	--

$$F + b \times \frac{n^r}{3600^\circ \zeta} = - 55331 \dots \log. (F + b \times \frac{n^r}{3600^\circ \zeta}) = 9,7429685.$$

$$E = + (E_1) - (E_2) - (E_3) \dots (E_1) = + 99993.$$

$\begin{array}{r} (E_2) \\ +9,8926912 \dots \log. s. \\ -2,8798346. \\ \hline 7,0128566 \dots \log. 103. \end{array}$	$\begin{array}{r} (E_3) \\ +19,6534270 \dots \log. ch. \\ -11,8027850. \\ \hline 7,8506420 \dots \log. 709. \end{array}$	$\begin{array}{r} (E_4) \\ +7,3309744 \dots \log. b^2. \\ -1,6154055. \\ \hline 5,7155689 \dots \log. 5. \end{array}$
---	--	---

$$E = + 99176 \dots \log. E = 9,9964066.$$

$$C = + (C_1) + (C_2) - (C_3) \dots (C_1) = + 193801.$$

$\begin{array}{r} (C_2) \\ +19,6361784 \dots \log. cg. \\ -11,3916711. \\ \hline 8,2445073 \dots \log. 1756. \end{array}$	$\begin{array}{r} (C_3) \\ +19,6534270 \dots \log. ch. \\ -10,0546544. \\ \hline 9,5987726 \dots \log. 39698. \end{array}$
---	--

$$C = + 155859. \quad \text{Log. } C = 10,1927320.$$

$$D = - (D_1) - (D_2)$$

$\begin{array}{r} (D_1) \\ +19,6361784 \dots \log. cg. \\ -11,1307920. \\ \hline 8,5053864 \dots \log. 3202. \end{array}$	$\begin{array}{r} (D_2) \\ +19,6534270 \dots \log. ch. \\ -10,3155335. \\ \hline 9,3378935 \dots \log. 21772. \end{array}$
---	--

$$D = - 24974.$$

$$\text{Log. } D = 9,3974881.$$



# 376 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

$$+19,1030165 \dots \log. Ar.$$

$$- 9,7429685 \dots \log. (F + b \frac{nr}{3600''\zeta}).$$

$$\hline 9,3600480 \dots \log. \text{Tang. } H.$$

Tang.  $H$  positive.

Et comme  $A$  &  $F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}$  sont négat.

$$H = 192^d 54' 15''.$$

$$\text{Log. sinus } H = 9,3489300.$$

$$M - H = \left\{ \begin{array}{l} + 99^d 6' 12'' \\ - 192. 54. 15 \end{array} \right\} = - 93^d 48' 3'' = + 266^d 11' 57''.$$

$$\text{Log. sinus } (M - H) = 9,9990437.$$

sin.  $(M - H)$  négatif, cosin.  $M$  négatif.

$$+20,1927320 \dots \log. Cr.$$

$$- 9,3974881 \dots \log. D.$$

$$\hline 10,7952439 \dots \log. \text{Tang. } M.$$

Tang.  $M$  négative.

Et comme  $C$  est positif &  $D$  négatif.

$$M = 99^d 6' 12''.$$

$$\text{Log. cosinus } M = 9,1992500.$$

$$\begin{array}{r} \lambda \\ + 18,1949633 \dots \log. \zeta \pi. \\ + 9,1030165 \dots \log. A. \end{array}$$

$$\hline + 27,2979798.$$

$$- 9,9964066 \dots \log. E.$$

$$\hline + 17,3015732.$$

$$- 9,3489300 \dots \log. \text{sin. } H.$$

$$\hline 7,9526432 \dots \log. \lambda$$

$$\text{Distance des centres} = 30' 49'', 5.$$

$$\frac{\pi \zeta}{Er} \times D \frac{\text{sin. } (M - H)}{\text{cosin. } M}.$$

$$\hline + 8,1949633 \dots \log. \frac{\pi \zeta}{r}.$$

$$+ 9,3974881 \dots \log. D.$$

$$+ 9,9990437 \dots \log. \text{sin. } (M - H).$$

$$\hline + 27,5914951.$$

$$- 9,9964066 \dots \log. E.$$

$$\hline + 17,5950885.$$

$$- 9,1992500 \dots \log. \text{cos. } M.$$

$$\hline 8,3958385$$

$$\frac{\pi \zeta}{Er} \times D \frac{\text{sin. } (M - H)}{\text{cos. } M} = - 2488.$$

On voit

On voit par ce calcul, que, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, la distance des centres, observée à Londres à 9<sup>h</sup> 4' 33" du matin, étoit de 30' 49",5; l'accroissement de l'angle horaire étoit à l'accroissement simultané de la distance des centres, comme plus cent mille est à moins deux mille quatre cents quatre-vingt-huit; la distance des centres étoit donc décroissante.

(93.) On sait que 15 secondes de degré répondent à une seconde de temps; si donc on veut exprimer en secondes de degré, l'accroissement de la distance des centres correspondant à un nombre  $x$  de secondes horaires, ou réciproquement; soit  $y$  le nombre de secondes de degré qui exprime l'accroissement de la distance des centres, puisqu'en général  $15x$  égale le nombre de secondes de degré du premier mobile écoulées pendant un nombre  $x$  de secondes de temps; que d'ailleurs l'accroissement de la distance des centres évalué en arc-de-cercle égale  $\frac{r}{206265''}$ ; que de plus l'accroissement de l'angle horaire évalué en arc-de-cercle égale  $\frac{15r}{206265''}$ ; on aura

$$15x \frac{\pi \zeta D \sinus (M - H)}{Er \cosinus M} - ry = 0.$$

Cette formule nous apprend que, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, la distance des centres observée à Londres à 9<sup>h</sup> 4' 33" du matin, décroissoit de 1",1195 de degré en 3" de temps; c'est-à-dire d'une seconde de degré en 2",680 de temps.

(94.) On n'a pas besoin de tout cet appareil de calcul pour les courbes d'illumination qui ont donné lieu à la question présente.

Dans ce cas la plupart des valeurs telles que  $A, F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}$ ,  $E, \lambda$ , seront connues par des opérations préliminaires, il ne s'agira donc que d'évaluer  $C$  &  $D$ ; comme d'ailleurs il n'est question que de prononcer si la distance des centres croît ou décroît, sans qu'il soit nécessaire de connoître la quantité précise de l'accroissement ou du décroissement de cette distance; on pourra se contenter de vérifier si  $F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta} - \frac{AD}{C}$  est positif ou négatif.

Mém. 1769.

B b b

*Remarque sur la méthode précédente , relativement aux passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil.*

(95.) Je suis entré dans quelques détails sur la question proposée dans la section présente , attendu qu'elle peut être fort utile dans plusieurs cas. C'est par elle que l'on peut calculer pour tous les lieux de la Terre, le temps que Vénus ou Mercure emploient à entrer sur le Soleil, ou à sortir du disque de cet astre : cet usage, quand il seroit unique, méritoit une considération particulière.

Le procédé par lequel nous venons de former l'équation du §. 93, donne lieu aux réflexions suivantes. Cette formule n'est autre chose qu'une équation différentielle dans laquelle on a substitué, aux différentielles de l'angle horaire & de la distance des centres, l'accroissement simultané de ces quantités; les résultats seront donc d'autant plus rigoureux que les temps seront plus courts. Lors des passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil, ces planètes emploient plusieurs minutes à entrer ou à sortir du disque de cet astre. On pourroit donc craindre quelque inexactitude, si l'on se contentoit d'un seul calcul. Pour obvier à cet inconvénient, on fera deux calculs, le premier avec les élémens qui conviennent au commencement du phénomène; le second avec les élémens qui conviennent à la fin; la moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux résultats satisfera au Problème.

*Méthode pour calculer directement le temps que Vénus ou Mercure emploient à entrer sur le Soleil, ou à sortir, du disque de cet astre.*

(96.) Quoique la formule du §. 93 soit très-suffisante pour déterminer avec exactitude le temps que Vénus ou Mercure emploient à entrer sur le Soleil, ou à sortir du disque de cet astre; il est cependant possible de parvenir à une équation plus directe, mais alors elle sera plus compliquée.

(97.) Pour déterminer cette nouvelle équation, je reprends la formule du §. 88, ou plutôt je la mets sous la forme suivante;

Accroissement de la distance des centres

$$= \frac{\pi \zeta}{\xi r} \times \frac{[C \times (F + \frac{nr}{\zeta v} \int \frac{r dg}{h}) - AD]}{r \sqrt{A^2 + (F + \frac{nr}{\zeta v} \int \frac{r dg}{h})^2}} \times \text{accroiss. arc horaire.}$$

Cette équation n'est qu'une transformation de celle du §. 88, dans laquelle on a substitué  $\xi$  à  $E$ , &  $\int \frac{r dg}{h v}$  à  $\frac{b}{3600''}$ .

Je remarque que puisque cette équation exprime en général, le rapport entre l'accroissement de la distance des centres & l'accroissement du temps (car l'accroissement de l'arc horaire n'est autre chose qu'une expression de l'accroissement du temps), on peut supposer donné, un certain intervalle de temps, & demander quelle est, dans cette hypothèse, la variation de l'accroissement de la distance des centres, dépendante de l'angle horaire au commencement de chacun de ces intervalles; il ne s'agit que de différencier l'équation précédente, en supposant variable l'angle horaire, & constante la quantité, accroissement de l'arc horaire, qui est un des facteurs de cette équation. Soit donc

$$N = \frac{c p q g}{r^3} - \frac{c p q \omega h}{r^2} \quad P = \frac{c p \omega g}{r^2} + \frac{c p q \phi h}{r^2}.$$

On aura

Variation de l'accroissement de la distance des centres =

$$\frac{\pi \zeta}{\xi r} \times \left\{ \frac{(N \times (F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}) - AP)}{r \sqrt{A^2 + (F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta})^2}} + \frac{[AC + D \times (F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta})]^2}{r [A^2 + (F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta})^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \times \frac{\text{Accroiss. } ^a \text{ arc horaire}}{r}$$

Soit maintenant

$H$  un angle dont la tangente égale  $\frac{Ar}{F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}}$ .

$K$  un angle dont la tangente égale  $\frac{Nr}{P}$ .

B b b ij

$M$  un angle dont la tangente égale  $\frac{Cr}{D}$ .

$Q$  un angle dont la tangente égale  $\frac{Dr}{C}$ .

L'équation précédente deviendra

Variation de l'accroissement de la distance des centres =

$$\frac{\pi \zeta}{\xi r} \times \left( \frac{P \sin.(K - H)}{r \cosin. K} + \frac{D^2 \sin. H \sin.^2 (Q + H)}{A r^2 \sin.^2 Q} \right) \frac{\text{Accroissement}^2 \text{ de l'arc horaire}}{r}.$$

(98.) Si l'on demande, pour les différens lieux de la Terre, quelle est, dans un temps donné, la quantité dont les centres du Soleil & de la Lune s'approchent ou s'éloignent; il est évident que cette quantité est égale à l'accroissement de la distance des centres de ces corps, dû à la vitesse qu'ils ont au commencement de l'instant que l'on considère & que l'on suppose uniforme pendant le temps en question, plus à l'accroissement de la distance dû à la variation de la vitesse, que l'on suppose pareillement varier d'une manière uniforme. On a donc (S. 91 & 97) pour expression de cette quantité,

$$\text{accroissement de la distance des centres} = \frac{\pi \zeta D \sin.(M - H)}{Er^2 \cosin. M} \times \text{accroiss. arc hor.} \\ + \frac{\pi \zeta}{\xi r} \times \left( \frac{P \sin.(K - H)}{r \cosin. K} + \frac{D^2 \sin. H \sin.^2 (Q + H)}{A r^2 \sin.^2 Q} \right) \times \frac{\text{accroiss.}^2 \text{ arc hor.}}{r}.$$

(99.) Rien de plus simple que d'avoir en secondes de degré, l'expression de l'accroissement de la distance des centres, correspondant à un nombre  $x$  de secondes horaires; ou réciproquement. Soit  $y$  le nombre de secondes de degré qui exprime cet accroissement de distance des centres; puisqu'une seconde de temps répond à 15 secondes du premier mobile,  $15 x$  exprime le nombre de secondes du premier mobile écoulées pendant le temps  $x$ ; d'ailleurs, l'accroissement de la distance des centres évalué en arc-de-cercle égale

$\frac{15 y}{206265''}$ , l'accroissement de l'angle horaire évalué en arc-de-cercle égale  $\frac{15 r s}{206265''}$ : on aura donc

$$\frac{206265''}{225} y - \frac{206265''}{15} x \frac{\pi \zeta D \sin.(M - H)}{Er^2 \cosinus M} x \\ - \frac{\pi \zeta}{\xi r} \times \left( \frac{P \sin.(K - H)}{r \cosin. K} + \frac{D^2 \sin. H \sin.^2 (Q + H)}{A r^2 \sin.^2 Q} \right) x^2 = 0;$$

Cette équation, pour être rigoureuse, n'a pas besoin, comme celle du §. 93, que les mouvemens apparens du Soleil & de la Lune soient uniformes pendant le temps que l'on considère; elle exige uniquement (ce qui est toujours vrai lorsque le temps n'est pas fort grand) que la vitesse varie uniformément.

(100.) Pour récapituler en peu de mots ce qui vient d'être démontré :

Soit

$$A = \frac{(A_1)}{\zeta} - \frac{(A_2)}{r^2} + \frac{(A_3)}{r^3} + \frac{(A_4)}{r^4}.$$

$$F = \frac{(F_1)}{\zeta} - \frac{(F_2)}{r^2} - \frac{(F_3)}{r^3} + \frac{(F_4)}{r^4}.$$

$$E = \xi - \frac{(E_2)}{r^2} - \frac{(E_3)}{r^3}.$$

$$C = \frac{(C_1)}{\zeta \omega} - \frac{(C_2)}{r^2} - \frac{(C_3)}{r^3}.$$

$$D = \frac{(D_1)}{r^2} - \frac{(D_2)}{r^3}.$$

$$N = \frac{(N_1)}{r^2} - \frac{(N_2)}{r^3}.$$

$$P = \frac{(P_1)}{r^3} + \frac{(P_2)}{r^4}.$$

$$\text{Tang. } H = \frac{Ar}{(F + b \times \frac{nr}{3600\zeta})}, \quad \text{Tang. } M = \frac{Cr}{D}.$$

$$\text{Tang. } Q = \frac{Dr}{C}, \quad \text{Tang. } K = \frac{Nr}{P}.$$

↳ l'accroissement de la distance des centres, exprimé en secondes de degré.

\* le nombre de secondes horaires correspondant.

$$R = \frac{\pi \zeta}{\xi r} \times \left( \frac{P \sin. (K - H)}{\cosin. K} + \frac{D^2 \sin. H \sin.^2 (Q + H)}{Ar \sin.^2 Q} \right)$$

$$T = \frac{206265''}{30} \times \frac{\left( \frac{\pi \zeta}{Er} \times \frac{D \sin. (M - H)}{\cosin. M} \right)}{R}$$

$$V = \frac{206265''}{225} \times \frac{r}{R}$$

$$\text{on aura} \quad x^3 + 2Tx - Vy = 0.$$

(101.) Dans l'usage de cette formule, on doit avoir grand soin de ne point se tromper dans le choix des angles  $H, M, Q, K$ . En général la tangente de chacun de ces angles est déterminée par une fraction. Si le numérateur & le dénominateur sont tous deux positifs, l'angle est entre  $0^\circ$  &  $90^\circ$ . Si le numérateur est positif & le dénominateur négatif, l'angle est entre  $90^\circ$  &  $180^\circ$ ; si le numérateur & le dénominateur sont tous deux négatifs, l'angle est entre  $180^\circ$  &  $270^\circ$ ; si le numérateur est négatif & le dénominateur positif, l'angle est entre  $270^\circ$  &  $360^\circ$ . On évaluera les angles  $M - H, K - H, Q + H$  relativement à ce premier calcul, en donnant à leurs sinus le signe qui leur convient; ces sinus seront positifs si les angles sont entre  $0^\circ$  &  $180^\circ$ , ces sinus seront négatifs si les angles sont entre  $180^\circ$  &  $360^\circ$ . On donnera pareillement à  $\cosinus M$ ,  $\cosinus K$ , le signe convenable; ces cosinus seront positifs si les angles sont entre  $0^\circ$  &  $90^\circ$ , entre  $270^\circ$  &  $360^\circ$ ; ils seront négatifs si les angles sont entre  $90^\circ$  &  $270^\circ$ . On n'oubliera pas également de donner à  $P$  & à  $D$  le signe qui leur convient.  $y$  est positif, lorsque la distance des centres du Soleil & de la Lune est croissante.

$y$  est négatif, lorsque la distance est décroissante.

$\alpha$  positive, indique que la variation  $y$  a lieu dans un temps postérieur à celui pour lequel on a calculé.

$\alpha$  négative, indique que la variation  $y$  a lieu dans un temps antérieur à celui pour lequel on a calculé.

*Usage de l'équation précédente pour déterminer les diamètres de Vénus & de Mercure, par la durée de leur entrée sur le disque du Soleil, ou de leur sortie du disque de cet astro.*

(102.) L'équation du §. 100, ordonnée par rapport à  $y$ , peut faire conclure, avec beaucoup de précision, le diamètre de Vénus ou de Mercure, par la durée de leur entrée sur le disque du Soleil, ou de leur sortie du disque de cet astro, sur-tout si l'on a observé avec exactitude cette entrée ou cette sortie. Il est clair en effet que le diamètre de ces planètes est égal à la quantité dont la distance des centres a varié pendant le temps de leur entrée ou de leur sortie, ce que l'équation du §. 100 apprend à connoître.

Il est superflu d'avertir qu'il faut avoir égard aux altérations que les causes physiques peuvent apporter. Supposons en effet que les rayons solaires s'infléchissent en passant dans l'atmosphère de Vénus; comme dans cette hypothèse le premier contact est observé plus tard, & le second contact est observé plus tôt qu'ils n'arrivent véritablement; il est bien évident que les durées totales de l'entrée ou de la sortie sont altérées d'une manière quelconque. On concluroit donc, par cette méthode, un diamètre plus petit que ne l'est celui de la planète. Quoique je sois éloigné de rien affirmer sur cette hypothèse, cette remarque est importante pour juger sainement du degré d'exactitude de ces déterminations délicates. Je remarquerai que lors du passage de Vénus du 3 Juin 1769, les durées observées de l'entrée & de la sortie de cette planète, ont été, en général, plus courtes que les durées calculées. Cette différence vient-elle des observations? doit-elle être attribuée à quelque cause physique ou à quelque incertitude dans les élémens? c'est ce que je n'entreprendrai pas de décider.

(103.) Appliquons le calcul à l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, & cherchons quel a dû être, à Londres, vers 9<sup>h</sup> 4' 33" du matin, le temps employé par le centre de la Lune, à s'approcher de 3" de degré, du centre du Soleil. Je suppose (ainsi qu'il est aisé de le constater par des calculs entièrement semblables à ceux du §. 92) que l'on avoit pour cet instant



$$\begin{array}{lcl}
 A = -12677. & & \\
 F + b \times \frac{\eta r}{3600'' \zeta} = -55331. & & \\
 E = +99176. & & \\
 C = +155859. & & \\
 D = -24974. & & \\
 N = -39980. & & \\
 P = -17593. & & 
 \end{array}
 \quad \text{Log.} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 A = 9,1030165. \\
 F + b \times \frac{\eta r}{3600'' \zeta} = 9,7429685. \\
 E = 9,9964066. \\
 C = 10,1927320. \\
 D = 9,3974881. \\
 D^2 = 18,7949762. \\
 N = 9,6018428. \\
 P = 9,2453399.
 \end{array} \right.$$

$$H = 192^{\circ} 54' 15'', M = 99^{\circ} 6' 12'', Q = 350^{\circ} 53' 48'', K = 246^{\circ} 14' 55''.$$

$$M - H = 266^{\circ} 11' 57'', K - H = 53^{\circ} 20' 40'', Q + H = 183^{\circ} 48' 3''.$$

$$\begin{array}{lcl}
 \sin. H = \sin. 192^{\circ} 54' 15'' \text{ nég.} & & \\
 \sin. (M-H) = \sin. 266. 11. 57. \text{ nég.} & & \\
 \cos. M = \cosin. 99. 6. 12. \text{ nég.} & & \\
 \sin. (K-H) = \sin. 53. 20. 40. \text{ posit.} & & \\
 \cosin. K = \cosin. 246. 14. 55. \text{ nég.} & & \\
 \sin.^2 (Q+H) = + \sin.^2 183. 48. 3. & & \\
 \sin.^2 Q = + \sin.^2 350. 53. 48. & & 
 \end{array}
 \quad \text{Log.} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 9,3489300. \\
 9,9990437. \\
 9,1992500. \\
 9,9043038. \\
 9,6050560. \\
 17,6428800. \\
 18,3984980.
 \end{array} \right.$$

D'ailleurs, on suppose que la distance des centres décroît de 3" de degré. Donc  $y = -3''$ .

$$\text{Log. } y = 0,4771213 \dots \text{Log. } \frac{206265''}{30} = +3,8373043. \text{Log. } \frac{206265''}{225} = +1,9611431.$$

donc

$$\begin{array}{lcl}
 R = +579,23 & & \\
 T \text{ négatif.} & & \\
 V \text{ positif.} & & 
 \end{array}
 \quad \text{Log.} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 R = 7,7628534. \\
 T = 4,4702544. \\
 V = 5,1993897. \\
 Vy = 5,6765110. \\
 \sqrt{Vy} = 2,8382555.
 \end{array} \right.$$

Puisque  $T$  &  $y$  sont des quantités négatives, l'équation qui résout la question est

$$x^2 - 2Tx + Vy = 0.$$

Si je

Si je compare cette équation avec les équations générales du second degré (*IV.<sup>e</sup> Mémoire*, §. 41 & suivans); je vois que *Année 1766.* dans le cas que je discute

$$\sinus \left\{ \frac{B}{B'} \right\} = \frac{r\sqrt{(Vy)}}{T}$$

$$x = \frac{\sqrt{(Vy)}}{r} \text{ tang. } \frac{B}{2} \quad \left| \quad x = \frac{\sqrt{(Vy)}}{r} \text{ tang. } \frac{B'}{2},$$

Les angles  $B, B'$  sont chacun moindres que  $180^d$ , les angles  $\frac{B}{2}, \frac{B'}{2}$  sont par conséquent chacun moindres que  $90^d$ , & les deux valeurs de  $x$  sont positives.

$$\begin{aligned} &+ 12,8382555 \dots \log. r\sqrt{(Vy)}. \\ &- \frac{4,4702544 \dots \log. T.}{8,3680011 \dots \log. \sinus \left\{ \frac{B}{B'} \right\}} \end{aligned}$$

$$B = 1^d 20' 14''.$$

$$B' = 178^d 39' 46''.$$

$$\frac{B}{2} = 0. 40. 7.$$

$$\frac{B'}{2} = 89. 19. 53.$$

$$+ 8,0670411 \dots \log. \text{tang. } \frac{B}{2} \quad + 11,9329000 \dots \log. \text{tang. } \frac{B'}{2}$$

$$+ 2,8382555 \dots \log. \sqrt{(Vy)}. \quad + 2,8382555 \dots \log. \sqrt{(Vy)}.$$

$$\frac{0,9052966 \dots \log. x.}{x = + 8'',041.}$$

$$\frac{4,7711555 \dots \log. x.}{x = + 59041''.$$

La première valeur de  $x$  nous fait voir que, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, vers  $9^h 4' 33''$  du matin à Londres, le centre de la Lune a employé  $8'',041$  de temps à s'approcher de  $3''$  de degré du centre du Soleil.

(104.) Cette solution est conforme à celle du §. 93; en effet, si l'on multiplie par 3 le nombre  $2'',680$  qui exprime le temps employé par le centre de la Lune, à s'approcher d'une seconde de degré du centre du Soleil, on aura  $8'',040$ . Dans le cas particulier que nous considérons, les deux équations des §. 93 & 100, conduisent donc au même résultat, mais il faut observer que le temps du phénomène est très-court, & que par conséquent

*Mém. 1769.*

Ccc

les différences des résultats ont dû être nulles. On ne doit donc pas conclure qu'il y auroit toujours une parfaite identité entre ces résultats.

(105.) Des deux valeurs de l'équation

$$x^2 + 2Tx - Vy = 0;$$

celle qui ne devient pas nulle par la supposition de  $y = 0$ ; n'appartient certainement pas au Problème astronomique que nous considérons. En effet, la seule racine utile est évidemment celle qui donne un temps nul lorsque l'accroissement de la distance des centres est nulle. Cette considération exclut la valeur  $x = + 59041''$ .

#### SECTION DIXIÈME.

*Détermination des points de passage de la portion de la courbe d'illumination, appartenante au commencement de l'Éclipse, à la portion appartenante à la fin.*

(106.) J'ai donné (S. 94) une méthode générale pour vérifier si un résultat quelconque appartient au commencement ou à la fin de l'Éclipse; je vais déterminer, dans cette section, d'une manière plus directe les points de passage de la portion de la courbe d'illumination appartenante au commencement de l'Éclipse, à la portion de la courbe appartenante à la fin.

(107.) Cette nouvelle question est intimement liée avec la détermination des sommets. J'ai fait voir, dans la *cinquième section de ce Mémoire*, que les sommets des courbes d'illumination sont donnés par deux équations différentes, celle du S. 31 & celle du S. 33. J'ai remarqué que ces équations ne peuvent avoir plus de quatre racines réelles, quoiqu'au premier coup d'œil elles semblent en promettre huit; que par conséquent quatre de ces racines sont essentiellement imaginaires: examinons ce qui a lieu dans tous les cas, relativement à la question présente.

(108.) Si les quatre sommets déterminés par les formules du S. 31, sont réels, comme il arrive presque toujours dans les passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil, la

question n'a aucune difficulté; l'ovale d'illumination appartenant au commencement de l'Éclipse est absolument distinct de celui qui appartient à la fin.

Soit

$$f = \sqrt{\left(\frac{pq}{r} + s \frac{\sqrt{p^2 q^2 + p^2 r^2}}{r^2}\right) \times \left(\frac{pq}{r} - s \frac{\sqrt{p^2 q^2 + p^2 r^2}}{r^2}\right)}.$$

$$\begin{array}{l} \text{Lever du Soleil.} \\ A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f \omega}{q}, \\ F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f \varphi}{q}. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Coucher du Soleil.} \\ A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f \omega}{q}, \\ F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f \varphi}{q}. \end{array} \right.$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact intérieur;}$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact extérieur;}$$

L'ovale d'illumination appartenant au commencement de l'Éclipse, est entièrement déterminé par la plus négative ou la moins positive des deux valeurs

$$b = \frac{3600'' \zeta}{nr} [-F - \sqrt{L^2 - A^2}].$$

$$b = \frac{3600'' \zeta}{nr} [-F + \sqrt{L^2 - A^2}].$$

L'ovale d'illumination appartenant à la fin de l'Éclipse, est entièrement déterminé par la moins négative ou la plus positive des deux valeurs

$$b = \frac{3600'' \zeta}{nr} [-F + \sqrt{L^2 - A^2}].$$

$$b = \frac{3600'' \zeta}{nr} [-F - \sqrt{L^2 - A^2}].$$

bien entendu qu'il faut substituer successivement dans chacune de ces équations les valeurs de  $A$  & de  $F$  correspondantes au lever & au coucher du Soleil sous les différens parallèles terrestres.

(109.) La seule difficulté qui peut se rencontrer, c'est lorsque l'équation du §. 33 a toutes les valeurs, ou du moins quelques-unes de ses valeurs réelles; la portion de la courbe d'illumination appartenante au commencement de l'Éclipse, n'est pas alors séparée de

celle qui appartient à la fin. Il est donc nécessaire de déterminer le point de passage.

*Année 1768.* (110.) Pour résoudre le Problème, il faut employer les équations de la section huitième de mon *VI.<sup>e</sup> Mémoire*. En effet, le passage de la portion de la courbe d'illumination appartenante au commencement de l'Éclipse, à la portion qui appartient à la fin, doit se faire nécessairement par un point de notre globe, relativement auquel le commencement & la fin de l'Éclipse ont lieu dans le même instant physique; la durée de l'Éclipse est donc instantanée pour ce point particulier, & par conséquent le contact des limbes est un *maximum* de phase relativement à ce point. Dans la section huitième de mon *VI.<sup>e</sup> Mémoire*, j'ai donné des formules pour déterminer les points de la Terre qui observent une plus grande phase assignée au lever & au coucher du Soleil; il est donc évident que ces formules résolvent le Problème proposé dans la section présente. On trouvera dans la table du paragraphe suivant, le résultat des calculs relatifs à la question présente.

#### SECTION ONZIÈME.

*Application sommaire des théories précédentes à la courbe d'illumination proprement dite, pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764.*

(111.) J'ai cru qu'il seroit agréable aux Astronomes d'avoir sous les yeux une application sommaire des méthodes précédentes à la courbe d'illumination pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764. Ce travail leur présentera une esquisse des principales recherches auxquelles je viens de me livrer; ils verront, d'un coup d'œil, dans quelle partie de notre globe la courbe d'illumination s'est étendue, & quelles étoient les principales propriétés de cette courbe. J'ai eu soin de distinguer par un titre particulier chacune de ces propriétés; le titre ne s'applique qu'à la solution immédiatement inférieure; les autres valeurs sans titre désignent les points des différens parallèles qui n'ont aucune propriété particulière; ils servent uniquement à développer la suite de la courbe.

*Courbe d'illumination pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764.*

LONGITUDES DES LIEUX QUI ONT OBSERVÉ								
LATITUDES.	LA FIN DE L'ÉCLIPSE au lever du Soleil.		LE COMMENCEMENT DE L'ÉCLIPSE au lever du Soleil.		LA FIN DE L'ÉCLIPSE au coucher du Soleil.		LE COMMENCEMENT DE L'ÉCLIPSE au coucher du Soleil.	
	BRANCHES de la courbe d'illumination appartenantes au lever du Soleil.				BRANCHES de la courbe d'illumination appartenantes au coucher du Soleil.			
Sommets de la courbe d'illumination. Section V. <sup>e</sup> §. 32.								
14' 27 <sup>m</sup> boréal.	173 <sup>d</sup> 49' 30 <sup>m</sup> or.	153 <sup>d</sup> 36' 0 <sup>m</sup> occ.	173 <sup>d</sup> 49' 30 <sup>m</sup> or.	153 <sup>d</sup> 36' 0 <sup>m</sup> occ.				
Lieu qui a vu le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil & la fin au lever, ou intersection des branches de la courbe d'illumination. Section VIII. <sup>e</sup> §. 84.								
3. 28...	169. 47. 38 occ.	.....	.....	169. 47. 38.				
0. 0...	119. 33. 29...	88. 13. 29...	107. 42. 14...	141. 11. 44 or.				
Plus grande largeur des branches appartenantes au coucher du Soleil. Section VI. <sup>e</sup> §. 44.								
7. 22...	.....	.....	95. 35. 3...	129. 16. 3.				
0. 0...	98. 36. 35...	68. 32. 5...	88. 41. 35...	122. 9. 35.				
Plus petite largeur des branches appartenantes au lever du Soleil. Section VI. <sup>e</sup> §. 48.								
53. 52...	88. 57. 58...	59. 17. 58.	.....	.....				
0. 0...	88. 11. 22...	58. 30. 50...	81. 41. 5...	112. 58. 35.				
Lieu qui a vu le dernier contact extérieur des limbes visible sur la terre. Sect. VII. <sup>e</sup> §. 58.								
17. 21...	.....	.....	80. 39. 17.	.....				
0. 0...	80. 39. 28...	50. 25. 28...	79. 34. 13...	105. 12. 43.				
0. 0...	76. 46. 10...	45. 17. 10...	81. 32. 10...	92. 34. 10.				
Point de passage de la portion de la courbe appartenante au commencement de l'Éclipse à la portion qui appartient à la fin. Section X. <sup>e</sup> La durée de l'Éclipse a été instantanée pour ce point particulier de la terre, d'ailleurs le moins boréal de tous ceux qui ont vu la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil.								
12. 2...	.....	.....	88. 13. 12.	.....				
Sommet de la courbe d'illumination. Section V. <sup>e</sup> §. 37.								
10. 50...	.....	.....	.....	88. 48. 17.				

LATITUDES.	LONGITUDES DES LIEUX QUI ONT OBSERVÉ			
	LA FIN DE L'ÉCLIPSE au lever du Soleil.	LE COMMENCEMENT DE L'ÉCLIPSE au lever du Soleil.	LA FIN DE L'ÉCLIPSE au coucher du Soleil.	LE COMMENCEMENT DE L'ÉCLIPSE au coucher du Soleil.
	BRANCHES de la courbe d'illumination appartenantes au lever du Soleil.		BRANCHES de la courbe d'illumination appartenantes au coucher du Soleil.	
30 <sup>d</sup> 0' 0" boréale.	70 <sup>d</sup> 7' 36" occ.	37 <sup>d</sup> 16' 6" occ.		
20. 0. 0...	64. 36. 38...	30. 57. 48.		
	<i>Plus grande largeur de l'ovale d'illumination appartenant au lever du Soleil. Sect. VI. §. 4.</i>			
18. 5. 24...	63. 41. 47...	30. 0. 47.		
10. 0. 0...	59. 51. 59...	26. 44. 29.		
0. 0. 0...	54. 46. 0...	24. 26. 30.		
	<i>Lieu qui a vu le premier contact extérieur des limbes visible sur la terre. Section VI. §. 3.</i>			
1. 1. 55 australe.	.....	24. 20. 21.		
10. 0. 0...	48. 28. 1...	24. 55. 1.		
	<i>Point de passage de la portion de la courbe appartenante au commencement de l'Éclipse à la portion qui appartient à la fin. Section X. La durée de l'Éclipse instantanée pour ce point particulier de la terre, d'ailleurs le plus austral de ceux où on a vu le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil.</i>			
19. 34. 23...	.....	33. 56. 12.		
	<i>Sommet de la courbe d'illumination. Section V. §. 37.</i>			
19. 36. 12...	34. 38. 17.			

(112.) Rien de plus simple que de tracer maintenant sur un globe la courbe d'illumination pour l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764. Cette courbe étoit composée d'une suite continue de points qui formoient une espèce de huit de chiffre. La portion de la courbe appartenante à la fin de l'Éclipse au lever du Soleil, commençoit sous le parallèle austral de 19<sup>d</sup> 34' 23", avec une longitude occidentale de 33<sup>d</sup> 56' 12"; c'est-à-dire, dans la mer qui sépare l'Afrique de l'Amérique; elle traversoit le Brésil,

le pays des Amazones, coupoit l'Équateur à l'embouchure de la rivière des Amazones, passoit à l'ouest de la Cayenne, laissoit un peu à l'est les îles du Vent, traversoit la nouvelle Angleterre, le lac Ontario, la baie d'Hudson dans la partie occidentale, & venoit finir sous le parallèle de  $85^{\text{d}} 14' 27''$ , avec une longitude orientale de  $173^{\text{d}} 49' 30''$ .

La portion de la courbe appartenante au commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, commençoit sous le parallèle austral de  $19^{\text{d}} 34' 23''$ , avec une longitude occidentale de  $33^{\text{d}} 56' 12''$ , c'est-à-dire, dans la mer qui sépare l'Afrique de l'Amérique; elle coupoit l'Équateur sous une longitude occidentale de  $24^{\text{d}} 26' 30''$ , passoit à l'ouest des îles du Cap Verd, traversoit la mer du nord, passoit à l'est du banc de Terre-Neuve, de la Terre de Labrador, à l'ouest de la baie de Bafins, & finissoit sous le parallèle de  $85^{\text{d}} 14' 27''$ , avec une longitude occidentale de  $153^{\text{d}} 36' 0''$ .

La portion de la courbe appartenante à la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil, commençoit sous le parallèle boréal de  $38^{\text{d}} 12' 2''$ , avec une longitude orientale de  $88^{\text{d}} 13' 12''$ ; elle s'étendoit dans le pays des Tartares indépendans, passoit à l'Est de Tobolsk, traversoit la Tartarie Russe, la mer glaciale, & finissoit sous le parallèle de  $85^{\text{d}} 14' 27''$ , avec une longitude orientale de  $173^{\text{d}} 49' 30''$ .

La portion de la courbe appartenante au commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, commençoit sous le parallèle boréal de  $38^{\text{d}} 12' 2''$ , avec une longitude orientale de  $88^{\text{d}} 13' 12''$ ; elle s'étendoit dans la Tartarie Chinoise, dans la partie orientale de la Tartarie Russe, dans la mer glaciale, & venoit finir sous le parallèle de  $85^{\text{d}} 14' 27''$ , avec une longitude occidentale de  $153^{\text{d}} 36' 0''$ .

(113.) Le lieu qui a vû le premier contact extérieur des limbes, visible sur la terre, est situé en Amérique, aux environs de l'embouchure de la rivière des Amazones; celui qui a observé le dernier contact visible sur notre globe, est situé en Tartarie, très-près de la ville de Biélojerck; celui enfin qui a observé le



commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre, est situé dans la mer glaciale, sous une latitude de  $85^{\circ} 3' 28''$ , avec une longitude occidentale de  $169^{\circ} 47' 38''$ ; c'est-à-dire, dans une partie de notre globe entièrement inconnue.

*Remarque sur une propriété des courbes d'illumination.*

(114.) Si l'on jette les yeux sur la table du §, 111, il est aisé de voir que les courbes d'illumination sont susceptibles d'une espèce de *maximum*, je m'explique. Si l'on parcourt les différentes longitudes correspondantes aux branches qui appartiennent à la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil, & au commencement de l'Éclipse au lever de cet astre; il est bien évident que les longitudes, après avoir déchu jusqu'à une certaine latitude, recommencent à croître, & réciproquement \*. Le point de la courbe où se fait le passage de l'accroissement de la longitude au décroissement de cette même quantité, & réciproquement, est donc un véritable *maximum* géométrique que je dois déterminer.

(115.) Les équations démontrées dans cet ouvrage, donneront facilement la solution de ce Problème. Il est sensible en effet qu'il ne s'agit que de déterminer le *maximum* des longitudes correspondantes aux différentes branches de la courbe d'illumination.

Soit

$y$  la différence en longitude entre le lieu qui compte midi à l'instant de la conjonction, & celui qui, sous un parallèle donné, observe le commencement ou la fin de l'Éclipse au lever ou au coucher du Soleil.

$m$  l'arc sémi-diurne du parallèle,

$\beta$  l'angle horaire qui mesure le temps écoulé depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène.

J'ai démontré qu'en général

$$y = m - \beta$$

la supposition de  $dy = 0$ , donne donc pour condition du Problème

$$dm - d\beta = 0.$$

\* Voyez le parallèle boréal de  $50^{\circ}$  pour les branches qui appartiennent à la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil, & le parallèle austral de  $1^{\circ} 1' 55''$  pour les branches qui appartiennent au commencement de l'Éclipse au lever de cet astre.

(116.)

(116.) Si l'on suppose

$$f = \frac{\sqrt{(p^2 q^2 r^2 - p^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}$$

$$H = \frac{p^2 q^2}{r^3} + \frac{p^2}{r}.$$

On a (S. 64)

$$\beta = -\frac{\zeta v}{nr} \times \left[ \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} \pm \frac{f\varphi}{q} \pm \sqrt{L^2 - \left( \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} \right)^2} \right];$$

$$dm = \frac{pr^2 ds}{c^2 f}; df = -\frac{Hs ds}{fr}; \text{ donc}$$

$$d\beta = -\frac{\zeta v ds}{nr} \times \left\{ \begin{aligned} & \pm \frac{\left( \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} \right) \times \left( -\frac{\varphi}{q} \pm \frac{H\omega s}{fq r} \right)}{\sqrt{L^2 - \left( \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} \right)^2}} \\ & + \left( -\frac{\omega}{q} \mp \frac{H\varphi s}{fq r} \right). \end{aligned} \right.$$

On a donc pour équation du Problème

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{L^2 - \left( \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} \right)^2} \times \left[ \frac{pr^2}{c^2 f} + \frac{\zeta v}{nr} \left( -\frac{\omega}{q} \mp \frac{H\varphi s}{fq r} \right) \right] \\ & \mp \frac{\zeta v}{nr} \times \left[ \left( \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} \right) \times \left( -\frac{\varphi}{q} \pm \frac{H\omega s}{fq r} \right) \right] \end{aligned} \right\} = 0;$$

(117.) Comme la question présente me paroît plus curieuse qu'utile, & que le résultat du calcul est d'un degré fort élevé, je me contente d'indiquer l'équation qui la résout. Il ne seroit cependant pas impossible de parvenir à l'équation finale, si quelque circonstance importante l'exigeoit.

(118.) Remarquons un cas particulier, celui de  $p = 0$ , & par conséquent de  $q = r$ . L'équation qui résout la question est alors

$$\left\{ \begin{aligned} & L^2 \times \left( -\omega \mp \frac{H\varphi s}{fr} \right)^2 \\ & - \left( \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{r} \mp \frac{f\omega}{r} \right)^2 \times \left[ \left( -\omega \mp \frac{H\varphi s}{fr} \right)^2 + \left( -\varphi \pm \frac{H\omega s}{fr} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} = 0;$$

ou (à cause de  $H = \frac{p^2}{r}$ ; & de  $f = \frac{p^2}{r^2}$ ),

$$L^2 \times \left( -\omega \mp \frac{\varphi p s}{r^2} \right) \mp \left( \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{r} \mp \frac{\omega p^2}{r^2} \right) \times \sqrt{r^2 + \frac{p^2 s^2}{c^2}} = 0;$$

Mém. 1769.

Ddd

Cette dernière équation est identique avec celle qui résout le Problème proposé dans la section septième de ce Mémoire, ainsi qu'il est aisé de le vérifier (S. 51). La raison en est bien simple; dans le cas de l'équinoxe, l'arc sémi-diurne est une quantité constante pour tous les parallèles; la question présente est donc identique avec celle de la section septième de ce Mémoire.

## ARTICLE SECOND.

*De quelques questions que l'on résout par les équations aux courbes d'illumination, & que l'on peut regarder comme des cas particuliers de ces courbes.*

## SECTION PREMIÈRE.

*De plusieurs questions générales.*

(119.) Je vais parcourir maintenant plusieurs questions que l'on résout par les équations générales aux courbes d'illumination, & que l'on peut regarder comme des cas particuliers de ces courbes. On pourroit demander, par exemple, quelle est la courbe qui passe par tous les points de la Terre, qui observent une phase quelconque, une heure avant ou après le coucher du Soleil; lorsque le Soleil a parcouru une certaine portion de son arc sémi-diurne, le tiers, le quart, le cinquième, &c. lorsque cet astre a une certaine hauteur donnée; mais ces Problèmes que l'on peut varier à l'infini, sont plutôt du ressort de la Trigonométrie sphérique, que l'objet de l'ouvrage que je me suis proposé. En effet, tout consiste à déterminer trigonométriquement les angles horaires correspondans aux instans qui satisfont au Problème; la question se résout alors par les équations générales aux courbes d'illumination des S. 9 & suivans.

(120.) Parmi ces différens Problèmes, il y en a un sur-tout qui mérite une attention particulière: je veux parler de la courbe d'illumination qui a lieu lorsque le centre apparent du Soleil se trouve à l'horizon, en faisant entrer dans la question la considération des réfractions horizontales & de la parallaxe.

Soit

$\left. \begin{array}{l} s' \text{ le sinus} \\ c' \text{ le cosinus} \end{array} \right\} \text{ de la latitude vraie de l'Observateur.}$

(121.) A cause de la très-grande distance du Soleil à la Terre, on peut démontrer que, sans erreur sensible, le sinus de la hauteur du Soleil sur l'horizon, abstraction faite de la réfraction & de la parallaxe, a en général pour expression

$$\sinus (\text{hauteur du Soleil}) = \frac{c' q h}{r} + \frac{p s'}{r} *.$$

La parallaxe abaisse l'astre, & la réfraction l'élève; donc lorsque le Soleil est à l'horizon apparent, il est réellement élevé sur l'horizon d'une quantité égale à la parallaxe moins la réfraction horizontale; donc à cet instant

$$\sinus (\text{hauteur vraie du } \odot) = \sin. (\text{parall. horiz.} - \text{réfract. horiz.});$$

On a donc pour cet instant

$$k = - \frac{p s' r}{c' q} + \sin. (\text{parallaxe horizontale} - \text{réfraction horizontale}) \times \frac{r^2}{c' q}.$$

(122.) Puisque l'on vient de déterminer l'heure que l'on compte sous chaque parallèle terrestre, à l'instant où le centre du Soleil est à l'horizon apparent, en ayant égard à la réfraction & à la parallaxe; la courbe d'illumination correspondante peut se construire par les équations générales des §. 9 & suivants.

## SECTION DEUXIÈME.

*Détermination de l'instant où un Observateur supposé au centre de la Terre, verroit une phase quelconque.*

(123.) Rien de plus facile que de déterminer, par les équations générales aux courbes d'illumination, l'instant où un Observateur supposé au centre de la Terre, verroit une phase quelconque. En effet, puisque le centre de la Terre coïncide avec le centre de l'Équateur; il est sensible que l'on peut appliquer à ce point

\* Cette équation n'est pas géométriquement exacte; elle ne peut cependant pas induire en erreur, vu la très-grande distance du Soleil, comparée à l'excentricité de notre globe. Je donnerai dans un autre Mémoire la véritable forme de cette équation.

particulier ce que l'on a démontré en général pour un point quelconque pris à la surface de la Terre, en supposant 1.<sup>o</sup> que la latitude du lieu soit nulle; 2.<sup>o</sup> que le parallèle terrestre soit concentré en un seul point; c'est-à-dire que le rayon du parallèle soit nul.

*Année 1764.* (124.) On a vu (*second Mémoire*, §. 19) que le rayon d'un parallèle terrestre quelconque a pour expression  $\frac{c\rho}{r}$ ; la supposition que le parallèle soit concentré dans un seul point, donne donc  $\frac{c\rho}{r} = 0$ ; de plus, puisque la latitude du lieu est supposée nulle, on a  $s = 0$ .

Soit donc

$$L = \frac{\sigma\tau'r\xi}{\pi\zeta\sigma} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} \text{ s'il s'agit d'un contact intérieur.}$$

$$L = \frac{\sigma\tau'r\xi}{\pi\zeta\sigma} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} \text{ s'il s'agit d'un contact extérieur.}$$

$$L = \frac{\xi r \lambda}{\pi\zeta} \text{ s'il s'agit d'une distance assignée des centres dont la tangente égale } \lambda.$$

On aura

$$b = -\frac{3600''\zeta}{\pi r} \left[ \frac{\theta l}{\zeta} + \sqrt{L^2 - \frac{\psi^2 r^2}{\zeta^2}} \right].$$

$$b = -\frac{3600''\zeta}{\pi r} \left[ \frac{\theta l}{\zeta} - \sqrt{L^2 - \frac{\psi^2 r^2}{\zeta^2}} \right].$$

Des deux valeurs de  $b$ , la plus négative ou la moins positive appartient à l'instant où l'Éclipse est croissante relativement au centre de la Terre; l'autre valeur appartient à l'instant où l'Éclipse est décroissante.

(125.) Il est évident que si l'on suppose  $L$  moindre que  $\pm \frac{\psi l}{\zeta}$ , les valeurs de  $b$  sont imaginaires; l'Observateur placé au centre de la Terre ne pourroit donc voir le phénomène qu'autant que  $L$  surpasse  $\pm \frac{\psi l}{\zeta}$ , ou (ce qui revient au même) qu'autant que

sinus (latitude de la Planète à l'instant de la conjonction) est moindre que  $\pm \frac{\pi\zeta L}{\psi r}$ .

*Détermination de la plus courte distance apparente des centres , relativement au centre de la Terre.*

(126.) Il est aisé de voir que lors du passage des valeurs réelles de  $b$  aux valeurs imaginaires

$$L \pm \frac{\psi l}{\zeta} = 0;$$

$$b = - \frac{3600'' \zeta}{r} \times \frac{\psi l}{\zeta},$$

On a donc

Pour déterminer la plus courte distance apparente des centres qu'un Observateur placé au centre de la Terre puisse observer ,

$$\lambda = \pm \frac{\pi}{\xi} \times \frac{\psi l}{r}.$$

Pour déterminer la distance de l'instant du phénomène à l'instant de la conjonction ,

$$b = - \frac{3600''}{r} \times \frac{\psi l}{r}.$$

(127.) Lors de l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764, un Observateur placé au centre de la Terre, n'auroit pas vu le disque du Soleil éclipé par la Lune; la plus courte distance des centres, relativement à cet Observateur, eût été de 39' 24" de degré, 8' 42" de temps avant la conjonction.

### SECTION TROISIÈME.

*Détermination du lieu où l'on peut observer une phase donnée lorsque le Soleil est au zénit de l'Observateur.*

(128.) Parmi les différentes observations que l'on peut se proposer lors d'une Éclipse de Soleil, il y en a sur-tout une qu'il seroit à désirer que les circonstances permissent de faire avec exactitude; celle du commencement ou de la fin de l'Éclipse, lorsque le Soleil est au zénit de l'Observateur. Cette observation ne peut être affectée d'aucune des illusions optiques qui ont leur source dans les réfractions; & par cela seul elle devient fort importante. Je ferai voir un autre usage, non moins utile, de cette observation, lorsque je parlerai des secours que les Éclipses de Soleil peuvent fournir pour déterminer la figure de la Terre,

sans aucune opération géodésique. Je vais donc chercher à déterminer le lieu où l'on peut faire cette observation.

(129.) Puisque par la supposition la phase arrive lorsque le Soleil est au zénit de l'Observateur, je conclus qu'il est midi dans le lieu de l'Observation, & que la déclinaison du Soleil égale la distance de l'Équateur au zénit vrai de l'Observateur; c'est-à-dire la latitude vraie \*.

Donc

$$\text{Sinus ( angle horaire )} = 0.$$

$$\text{Cosinus ( angle horaire )} = r.$$

$$\text{Tang. ( déclinaison du } \odot ) = \text{tang. ( latitude vraie de l'Observateur ).}$$

*Année 1764. Mais ( 2.<sup>e</sup> Mémoire, §. 18 )*

$$\text{Tang. ( latitude vraie )} = \frac{p}{r} \times \text{tang. ( latitude corrigée )} = \frac{p^2}{c}.$$

donc

$$g = 0, h = r, \frac{pr}{q} = \frac{p^2}{c}.$$

(130.) Les réflexions précédentes nous font voir que si l'on suppose

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} + \frac{pqg(p-r) \times (p+r)}{r^2 \sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} + \frac{pqw(p-r) \times (p+r)}{r^2 \sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}.$$

$$E = \xi - \frac{\pi \sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2}.$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r E}{\pi \zeta d} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact intérieur.}$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r E}{\pi \zeta d} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact extérieur.}$$

$$L = \frac{Er\lambda}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'une distance assignée des centres dont la tangente égale } \lambda.$$

On aura pour déterminer l'instant physique où l'on pourra observer la phase assignée lorsque le Soleil est au zénit.

\* Cette proposition n'est pas rigoureusement exacte, elle ne peut cependant pas induire en erreur, vu la très-grande distance du Soleil comparée à l'excentricité de notre globe: je donnerai dans un autre Mémoire la véritable forme de cette équation.

$$b = - \frac{3600'' \zeta}{n r} \times F - \frac{3600'' \zeta}{n r} \sqrt{(L + A) \times (L - A)}.$$

$$b = - \frac{3600'' \zeta}{n r} \times F + \frac{3600'' \zeta}{n r} \sqrt{(L + A) \times (L - A)}.$$

(131.) Des deux valeurs de  $b$ , la plus négative ou la moins positive appartient à l'Observateur qui voit la phase assignée avant le passage apparent du centre de la Planète par la perpendiculaire à l'orbite relative, menée par le centre du Soleil; l'autre valeur désigne le lieu qui voit la phase après le passage de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative.

(132.) Rien de plus simple que la détermination de la longitude du lieu qui voit le phénomène; en effet, puisque nous venons de déterminer le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène, & que d'ailleurs on compte midi dans le lieu; on aura tout de suite la longitude du lieu par la méthode de l'article VI du 3.<sup>e</sup> Mémoire. Année 1785.

(133.) On remarquera que la quantité  $\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}$  peut se calculer par la seconde Table du §. 20 du II.<sup>e</sup> Mémoire. Année 1784.

En effet, ainsi qu'il a déjà été observé (§. 31)  $\frac{r^2 p}{\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}}$  est l'expression de celui des demi-diamètres terrestres, qui fait, avec le plan de l'équateur, un angle égal au complément de la déclinaison du Soleil. Soit donc  $Y$  ce demi-diamètre que l'on trouvera tout calculé par la Table dont je viens de parler; on aura  $\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)} = \frac{r^2 p}{Y}$ .

(134.) Il est évident que si l'on suppose  $L$  moindre que  $\pm A$ , les valeurs de  $b$  sont imaginaires; aucun Observateur ne peut donc voir la phase assignée lorsque le Soleil est au zénit, qu'autant que  $L$  surpasse  $\pm A$ , ou (ce qui revient au même) qu'autant que

sin. (lat. de la Plan. à l'instant de la conj.) est moindre que  $\frac{\pi \zeta}{4 r} \left( \mp L - \frac{p q \varphi (p - r) \times (p + r)}{r^2 \sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}} \right)$ .



*Détermination de la plus courte distance apparente des centres que l'on puisse observer lorsque le Soleil est au zénit.*

(135.) Il est aisé de voir que lors du passage des valeurs réelles de  $b$  aux valeurs imaginaires,

$$L = \pm A,$$

$$b = - \frac{3600'' \zeta}{nr} \times F,$$

on a donc

Pour déterminer la plus courte distance apparente des centres que l'on puisse observer lorsque le Soleil est au zénit

$$\lambda = \pm \frac{A \pi \zeta}{Er}.$$

Pour déterminer la distance de l'instant du phénomène à l'instant de la conjonction

$$b = - \frac{3600'' \zeta}{nr} \times F.$$

(136.) Lors de l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril, aucun Observateur n'a pu voir le disque du Soleil éclipsé par la Lune, lorsque le Soleil étoit au zénit; la plus courte distance des centres que l'on ait pu observer dans cette circonstance étoit de  $40' 5''$  de degré,  $8' 45''$  de temps avant la conjonction; la longitude du lieu où l'on auroit pu faire l'observation, est de  $24^d 19' 45''$  orientale, & la latitude de  $4^d 48' 50''$  boréale. Je remarquerai en passant que cette latitude est toujours égale à la déclinaison du Soleil.

On seroit dans l'erreur si l'on croyoit qu'en changeant dans les valeurs de  $A$ ,  $F$ ,  $E$  du §. 130 & dans l'équation du §. 134, le signe des termes qui contiennent  $\sqrt{(q^2 q^2 + p^2 r^2)}$ , on auroit les formules pour le Nadir; cette proposition n'est pas vraie pour un globe elliptique; il faudroit que toutes les normales passassent par le centre du globe.

*Détermination de l'azimut de la Planète à l'instant du phénomène.*

(137.) Il est aisé de déterminer l'angle que fait, avec le premier vertical, la ligne qui joint les centres du Soleil & de la Planète à l'instant du phénomène, c'est-à-dire, l'azimut de la Planète

Planète. En effet, j'ai démontré que la tangente de l'angle de la ligne qui joint les centres du Soleil & de la Planète, avec la parallèle à l'orbite relative, a pour expression  $\frac{rA}{F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}}$ .

Soit

$m$  le sinus } de l'angle de la ligne des centres avec la parallèle à l'orbite  
 $n$  le cosinus } relative.

$\omega$  le sinus } de l'angle de l'orbite relative avec le fil parallèle ou équatorial, qui coïncide à cet instant avec le premier vertical.  
 $\phi$  le cosinus }

$X$  le sinus } de l'angle azimutal de la Planète,  
 $X'$  le cosinus }

Puisque d'après les constructions de ce Mémoire, l'angle azimutal égale  $360^d$ , moins l'angle de la ligne des centres avec la parallèle à l'orbite relative, moins l'angle de la parallèle à l'orbite relative avec le fil équatorial; on a

$$X = - \frac{nw + m\phi}{r}, \quad X' = \frac{n\phi - m\omega}{r}.$$

Les angles azimutaux sont comptés, suivant l'usage ordinaire; depuis  $0^d$  jusqu'à  $360^d$ , en commençant par l'orient vrai, & en continuant par le midi.

(138.) Dans les équations

$$X = - \frac{nw + m\phi}{r}, \quad X' = \frac{n\phi - m\omega}{r},$$

on donnera à  $\omega$  le signe qui lui convient (S. 1.<sup>re</sup>);  $\phi$  est toujours positif; quant à  $m$  &  $n$ , ils doivent avoir respectivement le même signe que les quantités  $A$  &  $F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}$ .

(139.) Si  $X$  &  $X'$  sont des quantités toutes deux positives; l'azimut est entre  $0^d$  &  $90^d$ , le centre de la Planète est entre l'orient & le midi.

Si  $X$  est positif &  $X'$  négatif; l'azimut est entre  $90^d$  &  $180^d$ , le centre de la Planète est entre le midi & le couchant.

Si  $X$  &  $X'$  sont des quantités toutes deux négatives; l'azimut

# 402 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

est entre  $180^d$  &  $270^d$ ; le centre de la Planète est entre le couchant & le nord.

Si  $X$  est négatif &  $X'$  positif; l'azimut est entre  $270^d$  &  $360^d$ , le centre de la Planète est entre le nord & l'orient.

## SECTION QUATRIÈME.

*Détermination du nombre de secondes horaires écoulées entre le premier & le dernier instant physique, où l'on peut observer une phase quelconque sous un parallèle donné.*

(140.) On peut se proposer un Problème analogue à celui résolu dans la Section septième du 1.<sup>er</sup> article de ce Mémoire. On demandoit alors en général, quel lieu de la Terre observe le premier, quel lieu observe le dernier une phase quelconque; on peut, par analogie, demander le premier & le dernier instant physique où cette phase peut être observée sous un parallèle donné, & par conséquent le nombre de secondes horaires écoulées entre ces instans extrêmes.

(141.) Les équations démontrées dans ce Mémoire, fournissent les moyens de résoudre cette nouvelle question.

Soit

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{q s \varphi}{r^2} + \frac{c g p w}{r^3} + \frac{c h p p \varphi}{r^4}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q s w}{r^2} - \frac{c g p \varphi}{r^3} + \frac{c h p p w}{r^4}.$$

$$E = \xi - \frac{p s \pi}{r^2} - \frac{c p q h \pi}{r^4}.$$

$$L = \frac{c \tau' r E}{\pi \zeta \vartheta} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact intérieur.}$$

$$L = \frac{c \tau' r E}{\pi \zeta \vartheta} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact extérieur.}$$

On a vu (S. 11) que pour déterminer à quel instant physique un lieu situé sous un parallèle donné, observe une phase quelconque, lorsque l'on compte dans ce lieu une certaine heure assignée, on a

$$b = - \frac{3600^s \zeta}{\pi r} [F \pm \sqrt{L^2 - A^2}].$$

Il s'agit donc de différencier cette quantité, en ne supposant variable que l'angle horaire; on connoîtra alors l'heure que l'on compte à l'instant du phénomène, dans le lieu particulier qui observe le premier ou le dernier la phase assignée; on connoîtra de plus, par les méthodes ordinaires, la distance à la conjonction, & la longitude du lieu.

(142.) La méthode de *maximis* & *minimis* donne tout de suite,

*Pour un contact intérieur.*

$$(\phi rh + p \phi g)^2 \times (L^2 - A^2) - (A \times (\omega rh - p \phi g) - \frac{\sigma \tau \tau}{\zeta \sigma} q g L)^2 = 0.$$

*Pour un contact extérieur.*

$$(\phi rh + p \phi g)^2 \times (L^2 - A^2) - (A \times (\omega rh - p \phi g) - \frac{\sigma \tau \tau}{\zeta \sigma} q g L)^2 = 0.$$

(143.) Si l'on exécute les opérations indiquées par l'analyse, & que l'on veuille réduire l'équation à une seule variable, le résultat final sera d'un degré trop élevé pour être discuté facilement: remarquons cependant un cas particulier, celui où la distance assignée des centres est nulle. On n'a alors qu'un seul facteur qui satisfasse à la question,  $A = 0$  \*. La supposition de  $A = 0$  (IV. Mémoire, §. 9) détermine sous chaque parallèle, les deux seuls points où l'on puisse observer l'Éclipse centrale; la solution actuelle est donc conforme à ce que l'on fait d'ailleurs. En effet, puisque l'on cherche le premier & le dernier instant où la phase peut être observée sous le parallèle, on doit trouver les deux seuls points où elle est visible sous ce parallèle.

Année 1766.

(144.) Soit maintenant

$g$ le sinus	{	de l'angle horaire correspondant au dernier instant où une
$h$ le cosinus		phase quelconque peut être observée sous un parallèle.
$g'$ le sinus	{	de l'angle horaire correspondant au premier instant où la
$h'$ le cosinus		même phase peut être observée sous le parallèle.

(ces valeurs doivent être déterminées par les équations du §. 142.)

\* La proposition est évidente puisqu'il est évident que dans notre supposition,  $L = 0$  que par conséquent toute la partie de l'équation multipliée par  $L$ , disparaît.

E e e ij

404 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{q^2 \varphi}{r^2} + \frac{c g p \omega}{r^3} + \frac{c h p p \varphi}{r^4}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q^2 \omega}{r^2} - \frac{c g p \varphi}{r^3} + \frac{c h p p \omega}{r^4}.$$

$$E = \xi - \frac{p^2 \pi}{r^2} - \frac{c p q h \pi}{r^4}.$$

$b$  le nombre de secondes horaires écoulées entre la conjonction & le dernier instant physique où l'on peut observer la phase sous le parallèle.

$$A' = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{q^2 \varphi}{r^2} + \frac{c g' p \omega}{r^3} + \frac{c h' p p \varphi}{r^4}.$$

$$F' = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q^2 \omega}{r^2} - \frac{c g' p \varphi}{r^3} + \frac{c h' p p \omega}{r^4}.$$

$$E' = \xi - \frac{p^2 \pi}{r^2} - \frac{c p q h' \pi}{r^4}.$$

$b'$  le nombre de secondes horaires écoulées entre la conjonction & le premier instant physique où l'on peut observer la phase sous le parallèle.

$y$  = le nombre de secondes horaires écoulées entre les deux instans.

On aura

$$b - b' = \frac{3600'' \zeta}{\eta r} \times [-F + F' + \sqrt{L^2 - A^2} + \sqrt{L'^2 - A'^2}].$$

Donc

$$y = \frac{3600'' \zeta}{\eta r} \times \left[ \frac{c g p \varphi}{r^3} - \frac{c g' p \varphi}{r^3} - \frac{c h p p \omega}{r^4} + \frac{c h' p p \omega}{r^4} + \sqrt{L^2 - A^2} + \sqrt{L'^2 - A'^2} \right].$$

*Détermination du nombre de secondes horaires écoulées entre l'instant physique où l'on observe sous un parallèle assigné, une phase quelconque au lever du Soleil, & l'instant où l'on observe la même phase au coucher de cet astre.*

(145.) Soit

$$f = \frac{\sqrt{(p^2 q^2 r^2 - p^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}.$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \vartheta} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact intérieur.}$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \delta} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact extérieur.}$$

<i>Lever du Soleil.</i>	<i>Coucher du Soleil.</i>
$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f\omega}{q}.$	$A' = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f\omega}{q}.$
$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f\varphi}{q}.$	$F' = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f\varphi}{q}.$

$b$  le nombre de secondes horaires écoulées entre la conjonction & l'instant physique de la phase observée au lever du Soleil.

$b'$  le nombre de secondes horaires écoulées entre la conjonction & l'instant physique de la phase observée au coucher du Soleil.

$y$  le nombre de secondes horaires écoulées entre les deux instans.

On aura

$$b' - b = \frac{3600''\zeta}{qr} \times [-F' + F + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

Donc

$$y = \frac{3600''\zeta}{qr} \times \left[ \frac{2\varphi f}{q} + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)} \right].$$

*Détermination du maximum, & du maximum maximorum de la quantité précédente.*

(146.) Rien de plus simple que de déterminer sans calcul, le *maximum* de cette dernière quantité ; en effet, on aura évidemment le *maximum* de  $y$ , si l'on peut avoir à la fois les conditions qui donnent le *maximum* de chacun des termes qui composent  $y$ . Or je vois que la supposition de  $\omega = 0$ ,  $\varphi = r$ , & de  $\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{rs}{q} = 0$  remplissent ces conditions ; en effet, puisque  $\omega = 0$ , &  $\varphi = r$ , le terme  $\frac{2f\varphi}{q}$  est le plus grand possible ; de plus puisque  $\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{rs}{q} = 0$ ,  $A$  &  $A' = 0$  ; donc la quantité  $\sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}$  a la plus grande valeur ; donc si l'on suppose  $\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{rs}{q} = 0$ , condition qui n'implique pas avec la supposition de  $\omega = 0$  &  $\varphi = r$  ; on aura le cas où les trois composans de  $y$  sont les plus grands possibles ; la valeur de  $y$  fera alors

$$y = \frac{3600'' \zeta}{nr} \times \left( \frac{2fr}{q} + 2L \right).$$

(147.) Quant au *maximum maximorum* de cette dernière quantité, il est clair qu'il aura lieu sous l'Équateur; en effet, dans l'expression  $y = \frac{3600'' \zeta}{nr} \times \left( \frac{2fr}{q} + 2L \right)$ , il n'y a de variable que la quantité  $f$ ; la méthode de *maximis & minimis* donne donc tout de suite (à cause de  $df = - \frac{(p^2 q^2 + p^2 r^2) s ds}{fr^2}$ )

$$s = 0.$$

On a dans ce cas

$$y = \frac{3600'' \zeta}{nr} \times (2p + 2L)$$

sinus (latitude de la Lune à l'instant de la conjonction) = 0.

(148.) On peut conclure de cette recherche, que le *maximum maximorum* de temps qui puisse s'écouler entre le premier instant physique où l'on commence à observer une Éclipse sur notre globe au lever du Soleil, & le dernier instant où l'on finit de l'observer au coucher de cet astre, a lieu lorsque l'orbite relative de la Lune est perpendiculaire au cercle de déclinaison du Soleil, la latitude de la Lune étant d'ailleurs nulle à l'instant de la conjonction. L'entrée & la sortie de l'ombre se fait par deux points de l'Équateur; la trace du phénomène traverse la Terre dans le sens de son plus grand diamètre.

(149.) Si l'on supposoit la Terre sphérique, toutes les autres circonstances étant d'ailleurs les mêmes, on auroit

$y = \frac{3600'' \zeta}{nr} \times (2r + 2L)$ . L'ellipticité de la Terre augmente donc la durée totale de l'Éclipse sur notre globe d'une quantité égale à  $\frac{3600'' \zeta}{nr} \times (2p - 2r)$ . Je réserve à m'étendre sur ce sujet, lorsque je parlerai des moyens que les Éclipses de Soleil peuvent fournir pour déterminer la figure de la Terre sans aucune opération géodésique.

*Remarques sur les équations des S. 142 & 144, & sur les méthodes que l'on en peut tirer pour déterminer le maximum de temps écoulé entre le premier & le dernier instant physique où l'on observe une phase assignée sous un parallèle quelconque.*

(150.) Les recherches auxquelles nous venons de nous livrer ont bien déterminé le *maximum* de temps écoulé entre l'instant physique où l'on observe sous un parallèle assigné, une phase quelconque au lever du Soleil, & l'instant où l'on observe la même phase au coucher de cet astre; mais elles ne nous font rien connoître sur le *maximum* de temps écoulé entre le premier & le dernier instant physique où l'on observe la phase sous un parallèle quelconque; en effet, pour peu que l'on réfléchisse sur la nature des deux questions, il sera aisé de voir que les solutions ne doivent point toujours coïncider.

(151.) La méthode naturelle qui se présente pour résoudre ce nouveau Problème, est de substituer, dans l'équation du S. 144, les valeurs de  $g, h, g', h'$ , que l'on tire des équations du S. 142, & de différencier cette nouvelle équation en faisant varier tous les élémens de l'Éclipse. Il est évident que le résultat ne peut être que très-compiqué. Quelques réflexions analogues à celles que nous avons faites ci-dessus, nous dispenseront de ce calcul, & nous conduiront fort simplement à un résultat très-approché.

(152.) Dans l'équation du S. 142, si l'on suppose à la fois, (ce qui n'implique aucune contradiction)

$$A = 0, \omega = 0, \varphi = r,$$

On aura

$$\left. \begin{aligned} r h &= \frac{\sigma \tau' 18}{\zeta \sigma} \\ r h &= \frac{\sigma \tau' 18}{\zeta \eta} \end{aligned} \right\} = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{s'il s'agit d'un contact intérieur.} \\ &\text{s'il s'agit d'un contact extérieur.} \end{aligned} \right.$$



408 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

On connoîtra donc l'heure que l'on compte au premier & au dernier instant où l'on observe la phase assignée sous un parallèle quelconque, dans l'hypothèse que l'orbite relative soit perpendiculaire au cercle de déclinaison du Soleil, & que la Lune ait la latitude déterminée par l'équation

$$\frac{\phi l}{\zeta} - \frac{qs}{r} + \frac{chpp}{r^2} = 0.$$

Je vais faire voir maintenant que ces suppositions ne peuvent manquer d'approcher très-près de celles qui donneroient le véritable *maximum* de  $y$  sous le parallèle. Afin de ne pas multiplier les calculs, je ne considérerai que les équations qui ont lieu pour le contact extérieur, bien entendu que le procédé est absolument semblable pour les autres cas.

(153.) De l'équation  $rh \mp \frac{\sigma\tau'qs}{\zeta\delta} = 0$ , on tire

$$\frac{gr}{h} = \pm \frac{\zeta\delta r^2}{\sigma\tau'q}. \text{ On peut conclure d'abord que les tangentes;}$$

& conséquemment les sinus des deux angles horaires qui appartiennent au premier & au dernier instant physique, où l'on observe la phase sous le parallèle assigné, ne diffèrent que par le signe; & que les cosinus de ces angles ont le même signe; on a donc

$$g = -g' = \frac{r^2\zeta\delta}{\sqrt{(\zeta^2\delta^2r^2 + \sigma^2\tau'^2q^2)}};$$

$$h = h' = -\frac{\sigma\tau'qr}{\sqrt{(\zeta^2\delta^2r^2 + \sigma^2\tau'^2q^2)}};$$

& l'équation du §. 144, devient

$$y = \frac{3600^{\circ}\zeta}{\pi r} \left\{ \frac{2cpg}{r^2} + \frac{2\delta\tau r}{\pi\zeta} + \frac{2\sigma\tau'r}{\pi\zeta\delta} \times \left( \zeta - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{cpgk\pi}{r^2} \right), \right.$$

$$\left. y = \frac{3600^{\circ}\zeta}{\pi r} \left\{ \frac{2cpg}{r^2} \times \frac{r^2\zeta\delta}{\sqrt{(\zeta^2\delta^2r^2 + \sigma^2\tau'^2q^2)}} + \frac{2\delta\tau r}{\pi\zeta} + \frac{2\sigma\tau'r}{\pi\zeta\delta} \times \left( \zeta - \frac{ps\pi}{r^2} + \frac{cpg\pi}{r^2} \times \frac{\sigma\tau'qr}{\sqrt{(\zeta^2\delta^2r^2 + \sigma^2\tau'^2q^2)}} \right) \right\}, \right.$$

(154.) Dans

(154.) Dans les suppositions qui ont lieu pour notre système planétaire, la quantité  $\frac{r^2 \zeta \delta}{\sqrt{(\zeta^2 \delta^2 r^2 + \sigma^2 \tau^2 q^2)}}$ , approche très-près d'être égale au sinus total, c'est le sinus d'environ  $89^d 44'$ ; le terme  $\frac{2cp\pi}{r^2}$  approche donc très-près de la plus grande valeur. Ce terme, à la vérité, seroit un peu plus grand si l'on supposoit  $g$  plus grand que sinus  $89^d 44'$ , mais alors on auroit  $h$  moindre que  $\frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \delta^2 r^2 + \sigma^2 \tau^2 q^2)}}$ , & le terme  $\frac{2\sigma \tau' r}{\pi \zeta \delta} \times (\xi - \frac{p^2 \pi}{r^2} + \frac{cpq\pi}{r^2} \times \frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \delta^2 r^2 + \sigma^2 \tau^2 q^2)}})$ , seroit évidemment plus petit; l'augmentation du premier terme ne compenseroit pas la diminution du second. Par un raisonnement contraire, si l'on supposoit  $g$  moindre que sinus  $89^d 44'$ , & conséquemment  $h$  plus grand que  $\frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \delta^2 r^2 + \sigma^2 \tau^2 q^2)}}$ , l'augmentation du second terme ne compenseroit pas la diminution du premier. Les suppositions du §. 152 ne peuvent donc être que très-près de celles qui donneroient le véritable *maximum* de  $y$  du §. 144.

(155.) Le calcul confirme ces réflexions. Soit proposé, en effet, de déterminer sous l'Équateur, le *maximum* de durée de l'Éclipse, en supposant que l'orbite relative soit perpendiculaire au cercle de déclinaison du Soleil, que l'Éclipse arrive à l'instant de l'équinoxe, & que la Lune ait la latitude déterminée par l'équation du §. 152, c'est-à-dire que la latitude soit nulle. (Quoique cette hypothèse n'ait pas lieu dans notre système planétaire, il suffit, pour que l'on puisse la calculer, qu'elle n'implique pas géométriquement contradiction, & qu'elle arrive dans les circonstances les plus défavorables à la formule du §. 153). Si l'on conserve d'ailleurs toutes les autres données de l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764; on tirera de l'équation du §. 153,  $y = 6^h 12' 35''$ .

L'équation  $y = \frac{3600'' \zeta}{\pi} \times (2g \pm 2L)$  du §. 147,

Mém. 1769.

Fff

#### 410 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

donne rigoureusement le même résultat; or il est évident, par la forme de la solution, que pour la Terre, cette dernière équation doit répondre à la plus grande durée de l'Eclipse sous l'Équateur; donc la formule du §. 153 donne aussi cette plus grande durée.

(156.) Les raisonnemens par lesquels nous sommes parvenus à l'équation du §. 153, ne sont pas particuliers à l'Équateur; ils peuvent également s'appliquer à un parallèle quelconque. On doit donc conclure que, toutes choses d'ailleurs égales, l'on a le *maximum* de temps qui puisse s'écouler entre le premier & le dernier instant physique où l'on puisse observer une phase quelconque sous un parallèle, lorsque l'orbite relative est perpendiculaire au cercle de déclinaison du Soleil, & que la Lune a la latitude déterminée par l'équation

$$\sinus (\text{latitude de la Lune}) = \frac{\pi \zeta}{\downarrow r} \times \left( \frac{qs}{r} + \frac{c p p}{r^2} \times \frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{\zeta^2 d^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2}} \right).$$

Les points de ces parallèles qui observent les premiers & les derniers, le phénomène assigné, sont ceux pour lesquels il arrive aux heures déterminées par les équations

$$\begin{aligned} g &= - \frac{r^2 \zeta d}{\sqrt{\zeta^2 d^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2}} & g &= + \frac{r^2 \zeta d}{\sqrt{\zeta^2 d^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2}} \\ h &= - \frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{\zeta^2 d^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2}} & h &= - \frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{\zeta^2 d^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2}} \end{aligned}$$

(157.) Nous remarquerons en finissant, que le *maximum maximorum* de  $y$  n'a pas précisément lieu sous l'Équateur, mais sous le parallèle déterminé par l'équation

$$g \zeta d s + \frac{\sigma^2 \tau'^2 q^2 p s}{\zeta d r^2} + \frac{\sigma \tau' p c}{\zeta d r} \times \sqrt{\zeta^2 d^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2} = 0.$$

### ARTICLE TROISIÈME.

*Détermination de l'heure que l'on compte dans un lieu dont la longitude est donnée, lorsque l'on observe dans ce lieu une phase quelconque assignée.*

(158.) Je terminerai ce Mémoire par la méthode pour trouver l'heure que l'on compte dans un lieu dont la longitude

est connue, lorsque l'on observe dans ce lieu une phase quelconque assignée. J'ai déjà remarqué que la solution directe des Problèmes dans lesquels la longitude du lieu est donnée, dépend de la quadrature du cercle; on ne peut donc pas les résoudre directement. Examinons s'il ne seroit pas possible de suppléer à la solution directe, en employant une série très-convergente, dont les premiers termes exprimeroient, sans erreur sensible, l'heure demandée.

(159.) Pour entendre la formation de cette série, soit; comme dans le §. 9.

$\sinus$  (demi-diamètre horizontal de la Lune)  $= \frac{d}{y} \times \sinus$  (parallaxe horizontale polaire).

$\vartheta = \cosinus$  (somme du demi-diamètre du Soleil & du demi-diamètre horizontal de la Lune).

$\vartheta' = \cosinus$  (différence du demi-diamètre du Soleil & du demi-diamètre horizontal de la Lune).

$\sigma = \sinus$  } demi-diamètre du Soleil.  
 $\tau = \cosinus$  }

$\tau' = \cosinus$  (demi-diamètre horizontal de la Lune).

$\delta = \sinus$  (demi-diam. horiz. de la Lune)  $\times \frac{\cos. (\text{parall. horiz. polaire})}{r}$ .

$b$  le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant pour lequel on calcule.

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{q s \vartheta}{r} + \frac{c g p \vartheta}{r^2} + \frac{c h p p \vartheta}{r^3}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q s \omega}{r^2} - \frac{c g p \vartheta}{r^3} + \frac{c h p p \omega}{r^4}.$$

$$E = \xi - \frac{p s \pi}{r^2} - \frac{c p q h \pi}{r^3} - \frac{b^2 \gamma \pi}{3600'' r}.$$

Si, pour simplifier le calcul, on suppose  $\tau = r$ , & que de plus, l'on nomme  $H$  un angle dont la tangente égale

$$\frac{Ar}{F + b \times \frac{\pi r}{3600'' \zeta}}; \text{ il suit de ce que j'ai démontré dans les}$$

précédens Mémoires (III.<sup>e</sup> Mémoire §. 1.<sup>er</sup>, & V.<sup>e</sup> Mémoire <sup>Années 1768</sup> §. 46), que l'on a <sup>& 1767.</sup>

Contact extérieur des limbes.

Contact intérieur des limbes;

$$\sigma = \left( \frac{A \zeta \pi}{E \times \sin. H} - \frac{\delta r}{E} \right) \times \frac{\partial}{r}, \quad \left| \quad \sigma = \left( \frac{A \zeta \pi}{E \times \sin. H} + \frac{\delta r}{E} \right) \times \frac{\partial}{r}, \right.$$

Au moyen de ces dernières équations, il est sensible que l'on peut demander quel devoit être le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on pût observer un contact des limbes dans un lieu donné, à un instant assigné. Voyons comment ce Problème peut mener à la solution de celui que je me suis proposé dans cet article. Je me contenterai de développer l'analyse pour un commencement d'Éclipse, bien entendu qu'elle s'applique à une phase quelconque.

(160.) Soit

*B* le lieu pour lequel on calcule.*K* l'heure que l'on compte dans le lieu *B* à l'instant du commencement de l'Éclipse.*m* l'heure que l'on compte dans le lieu *B* à l'instant de la conjonction.

Comme il n'est aucun lieu où la plus grande phase arrive trois heures ou même deux heures avant la conjonction; par la formule du paragraphe précédent, je cherche quel devoit être le demi-diamètre du Soleil, pour que dans le lieu *B*, on pût voir commencer l'Éclipse aux heures  $m - 3$ ,  $m - 2$ .

Soient  $\Sigma$  &  $\Sigma'$  ces valeurs respectives, &  $\Delta$  le vrai demi-diamètre du Soleil; il est sensible que si la différence des heures étoit proportionnelle à la différence des demi-diamètres, on auroit

$$\Sigma - \Sigma' : 3600'' :: \Sigma - \Delta : 3600'' \times \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'},$$

&amp; par conséquent

$$K = m - 3 + 3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'};$$

Cette dernière équation n'est pas rigoureusement exacte; soit

$$\text{donc } n \text{ un nouvel instant} = m - 3 + 3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'};$$

Par la formule du paragraphe précédent, je cherche quel devoit être le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on pût observer un contact à cet instant. Soit  $\Sigma''$  ce demi-diamètre; en vertu de la

loi de continuité qui tend à s'établir, on approche d'avoir la proportion suivante,

$$\Sigma - \Sigma'' : 3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'} :: \Sigma - \Delta : 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')},$$

& par conséquent

$$K = m - 3 \mp 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')};$$

Cette dernière équation n'est pas encore rigoureuse; soit

$$m - 3 \mp 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} \mp X \text{ l'expression rigoureuse de } K.$$

En vertu de la loi de continuité, qui tend à s'établir entre les différences des demi-diamètres successifs déterminés par la formule du §. 159, & l'accroissement du temps; on a, avec une exactitude suffisante,

$$X : 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{\Sigma - \Sigma'} :: \Sigma'' - \Delta; \Sigma' - \Sigma'',$$

Donc

$$X = \left( 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{\Sigma - \Sigma'} \right) \times \frac{\Sigma'' - \Delta}{\Sigma' - \Sigma''};$$

Donc

$$K = m - 3 \mp 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} \mp \left( 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')} \right) \times \frac{(\Sigma'' - \Delta)}{(\Sigma' - \Sigma'')};$$

(161.) Pour récapituler ce qui vient d'être démontré, dans les paragraphes précédens, & réunir les formules du commencement & de la fin de l'Éclipse,

Soit

$B$  le lieu pour lequel on calcule.

$K$  l'heure que l'on compte dans le lieu  $B$  à l'instant du commencement ou de la fin de l'Éclipse.

$m$  l'heure que l'on compte dans le lieu  $B$  à l'instant de la conjonction.

$\Delta$  le demi-diamètre du Soleil.

$\Sigma$  la valeur que devrait avoir le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on put observer un contact des limbes dans le lieu  $B$ , à l'heure  $m \mp 3$ .

#### 414 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

$\Sigma'$  la valeur que devoit avoir le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on put observer un contact des limbes dans le lieu  $B$ , à l'heure  $m \mp 2$ .

$\Sigma''$  la valeur que devoit avoir le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on put observer un contact des limbes dans le lieu  $B$ , à l'heure

$$m \mp 3 \pm 3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'}.$$

On a

$$K = m \mp 3 \pm 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} \\ \pm (3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')} \times \frac{(\Sigma'' - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')}).$$

Les signes supérieurs appartiennent au commencement de l'Éclipse, les signes inférieurs appartiennent à la fin.

Les quantités  $\Delta$ ,  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$ , doivent être évaluées en secondes & dixièmes de secondes de degré.

Si l'on veut avoir égard à l'inflexion des rayons solaires, il faudra, lors des contacts extérieurs, diminuer le demi-diamètre du Soleil d'une quantité de secondes de degré égale à l'inflexion; il faudra augmenter le demi-diamètre du Soleil de la même quantité lors des contacts intérieurs.

$$(162.) \text{ Puisque tangente } H = \frac{A r}{F + b \times \frac{r''}{3600'' \zeta}}; \text{ on a}$$

$$\sinus H : \cosinus H :: A : F + b \times \frac{r''}{3600'' \zeta}.$$

Les quantités  $A$  & sinus  $H$  ont donc le même signe; c'est-à-dire, que sinus  $H$  doit être positif lorsque  $A$  est positif, que sinus  $H$  doit être négatif lorsque  $A$  est négatif. Cette remarque fait voir que dans l'usage des formules du §. 159, on peut tou-

jours calculer, comme si les quantités  $A$ ,  $F + b \times \frac{r''}{3600'' \zeta}$

& sinus  $H$  étoient réellement positives, quel que soit d'ailleurs le signe de ces quantités.

## E X E M P L E.

(163.) On demande quelle a dû être, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764; l'heure du commencement de l'Éclipse à Pithiviers, que je suppose de 31" de temps plus occidental que Paris, avec une latitude de 48<sup>d</sup> 12' 38" boréale.

SOLUTION. Puisque Pithiviers est plus occidental de 31" de temps que Paris, on comptoit 10<sup>h</sup> 30' 52" du matin dans ce lieu, lors de la conjonction; d'ailleurs, si l'on suppose une inflexion de 4",5 dans les rayons solaires qui rasent le limbe de la Lune,  $\Delta = 15' 55"$ . Je cherche, conformément à ce qui est prescrit, les valeurs de  $\Sigma$  & de  $\Sigma'$  correspondantes à 10<sup>h</sup> 30' 52" — 3<sup>h</sup>, & à 10<sup>h</sup> 30' 52" — 2<sup>h</sup>; c'est-à-dire, à 7<sup>h</sup> 30' 52", & à 8<sup>h</sup> 30' 52" du matin; j'ai  $\Sigma = 53' 44"$ ,  $\Sigma' = 30' 1"$ ,  $3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'} = 1^h 35' 40''$ . Je cherche pareillement la valeur de  $\Sigma''$  correspondante à 7<sup>h</sup> 30' 52" + 1<sup>h</sup> 35' 40"; c'est-à-dire, à 9<sup>h</sup> 6' 32", & j'ai  $\Sigma'' = 16' 38''$ ,

$$3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} = 1^h 37' 31'',$$

$$3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')} = 1' 51'',$$

$$\Sigma'' - \Delta = 43'', \Sigma' - \Sigma'' = 13' 23'',$$

$$(3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')}) \times \frac{(\Sigma'' - \Delta)}{(\Sigma' - \Sigma'')} = 6''.$$

Donc

$$K = 10^h 30' 52'' - 3^h + 1^h 37' 31'' + 6'' = 9^h 8' 29''.$$

On voit par-là que, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, l'Éclipse a commencé à Pithiviers à 9<sup>h</sup> 8' 29" du matin.

(164.) On trouveroit par de semblables calculs, que si l'on suppose Saint-Maur sous le parallèle boréal de 48<sup>d</sup> 50' 2" avec une longitude orientale de 17" de temps, comptée de Paris; l'Éclipse du 1.<sup>er</sup> Avril 1764 a dû finir dans ce lieu à midi 10' 29".



# 416 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

(165.) Dans la formule du §. 159, j'ai supposé  $\tau = r$ ; dans la rigueur géométrique,  $\tau$  est une inconnue, puisque c'est le cosinus du demi-diamètre cherché du Soleil. Il n'est pas difficile d'éviter cette légère inexactitude, & de parvenir à l'expression rigoureuse de ce demi-diamètre; mais alors on aura à résoudre une équation du second degré,

Soit

$$H \text{ un angle dont la tangente } = \frac{Ar}{F + b \times \frac{rr}{3600^2 \zeta}}$$

Soit de plus

*Contacts extérieurs.*

$$P \text{ un angle dont la tangente égale } \frac{\delta \delta'}{E \tau'}$$

$$\left. \begin{matrix} Q \\ Q' \end{matrix} \right\} \text{ les angles dont le sin. égale } \frac{A \zeta \pi \delta \cosin. P}{E \tau \tau' \sin. H}$$

*Contacts intérieurs.*

$$P \text{ un angle dont la tangente égale } \frac{\delta \delta'}{E \tau'}$$

$$\left. \begin{matrix} Q \\ Q' \end{matrix} \right\} \text{ les angles dont le sin. égale } \frac{A \zeta \pi \delta' \cosin. P}{E \tau \tau' \sin. H}$$

On aura

$$\text{demi-diam. du } \odot = \left\{ \begin{matrix} Q - P \\ Q' - P \end{matrix} \right\} \quad \text{demi-diam. du } \odot = \left\{ \begin{matrix} Q + P \\ Q' + P \end{matrix} \right\}$$

(166.) Pour entendre ce que signifient les deux racines de ces dernières équations; soit cherché par ces formules le demi-diamètre du Soleil qui, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, auroit donné un commencement d'Éclipse à Pithiviers, à 7<sup>h</sup> 30' 52" du matin. On aura

$$\text{demi diamètre du Soleil} = \left\{ \begin{matrix} 0^d 53' 43'' \\ 178. 36. 33 \end{matrix} \right.$$

La première valeur ne diffère que de 1" de celle donnée par la formule du §. 159; elle appartient donc au véritable Problème des Éclipses. Quant à la seconde valeur, elle apprend que si l'on supposoit un Soleil, dont le demi-diamètre fut de 178<sup>d</sup> 36' 33", & que l'on n'eut aucun égard à l'épaisseur de la Terre, on auroit pu également observer à Pithiviers, le 1.<sup>er</sup> Avril 1764, un contact des limbes à 7<sup>h</sup> 30' 52" du matin; ou plutôt on auroit pu mener par l'œil de l'Observateur, une ligne droite qui eût été à la fois tangente au disque de la Lune & au disque d'un Soleil, dont le demi-diamètre eût été de 178<sup>d</sup> 36' 33".



OBSERVATION

**OBSERVATION**  
**DU PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL,**  
**FAITE À PARIS LE 3 JUIN 1769,**  
*Dans l'Observatoire du Collège Mazarin.*

Par M. DE LA LANDE.

**J**E m'étois occupé depuis plusieurs jours des préparatifs nécessaires pour cette importante observation, & j'avois pris des arrangements pour qu'elle fut faite par cinq ou six Observateurs avec moi; j'avois fait venir de Londres une excellente lunette achromatique de Dollond, portant 40 lignes d'ouverture, & j'avois réglé une pendule dans la lanterne qui est au haut de la coupole, d'où Vénus pouvoit être vue jusqu'à 7<sup>h</sup> 58' du soir; mais le mauvais temps a rendu mes précautions presque inutiles.

7 Juin  
1769.

Le 1.<sup>er</sup> Juin, il plut presque toute la journée; le 2 & même le 3, il y eut encore de la pluie; & jusqu'à 6 heures du soir, on n'avoit presque pas d'espérance d'apercevoir l'entrée de Vénus sur le Soleil; les nuages parurent ensuite se dissiper, mais à 6<sup>h</sup> 53' ils revinrent couvrir le Soleil.

J'avois annoncé, dans la *Connoissance des Temps*, le premier contact pour 7<sup>h</sup> 14', mais les nuages qui me cachotent précisément le bord supérieur du Soleil, ne se dissipèrent qu'à 7<sup>h</sup> 21' 12". de temps vrai, & Vénus étoit déjà avancée sur le Soleil assez sensiblement. M. l'abbé Marie, Professeur de Mathématiques au Collège Mazarin, avec qui j'observois, estima l'entrée du centre de Vénus à 7<sup>h</sup> 29' 7"; il s'occupoit principalement à considérer le disque de Vénus, sur lequel il ne voyoit, non plus que moi, aucune apparence d'atmosphère \*.

\* Voyez les Mémoires de l'Académie pour l'année 1761, page 373. Mais M. l'abbé Chappé, qui croyoit avoir aperçu l'atmosphère de Vénus en 1761, n'en a plus parlé dans ses Observations de 1769.

# 418 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Pendant que Vénus avançoit sur le Soleil, je me servis du quart-de-cercle pour déterminer la position, en observant les passages & ceux des bords du Soleil au fil horizontal & au fil vertical de la Lunette; mais ces observations sont trop peu importantes pour en remplir ce Mémoire.

A  $7^h 38' 10''$ , Vénus étoit presqu'entièrement sur le Soleil, il ne restoit plus que  $35$  à  $40''$  de temps pour avoir le contact intérieur, qui étoit notre plus importante observation; mais un filet de nuages couvrit le bord supérieur du Soleil, & ne me laissa voir Vénus qu'à  $7^h 40' 24''$ , alors Vénus étoit avancée sur le Soleil, en sorte qu'il y avoit au moins 4 secondes de degré entre les bords.

Il ne me resta plus d'autre ressource que celle du quart-de-cercle, avec lequel je continuai de déterminer la position de Vénus sur le Soleil, ce que je fis malgré la pluie qui m'inondoit, aussi bien que M. le Paut de Agelet, qui faisoit avec un autre quart-de-cercle de semblables observations.

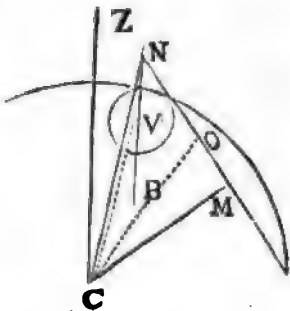
A  $7^h 57' 55''$ , Vénus étoit à l'horizon sensible bordé par les arbres qui sont au-delà de la Seine, vers Argenteuil & Colombes; les nuages qui nous avoient dérobé le premier contact étoient assez près de nous pour ne pas cacher le Soleil à ces villages; aussi a-t-on vu le contact dans l'Observatoire de M. le Marquis de Courtanvaux, à Colombes, même à l'École Militaire, & à l'Observatoire royal, & si les préparatifs que j'avois faits avec tant de peine ont été presqu'inutiles, j'ai été consolé en apprenant que l'observation avoit très-bien réussi à d'autres Observateurs.

Pour conclure de ces observations le temps de la conjonction de Vénus, j'ai supposé d'abord que le contact intérieur soit arrivé à  $7^h 38' 45''$ \*, & j'ai calculé par la méthode la plus rigoureuse l'effet de la parallaxe sur l'entrée de Vénus à Paris; je rapporterai ici ma méthode, comme étant préférable à celles qui ont été publiées jusqu'ici.

Soit  $C$  le centre du Soleil,  $ZC$  le vertical,  $NM$  l'orbite de Vénus,  $N$  le lieu vrai de Vénus,  $V$  son lieu apparent dans le

\* Il est arrivé à  $7^h 38' 43''$ , suivant M. Messier; à  $7^h 38' 45''$ , suivant M.<sup>rs</sup> de Fouchy & de Bory; & à  $7^h 38' 50''$ , suivant M. Maraldi.

moment où elle touchoit le bord inférieur du Soleil; l'angle de position étoit alors de  $7^{\text{d}} 1' 47''$ , calculé pour le centre même de Vénus, & non pas seulement pour le Soleil, comme on le fait communément; l'inclinaison relative de l'orbite de Vénus  $8^{\text{d}} 28' 59''$ , trouvée avec la plus grande exactitude par la méthode différentielle que j'ai donnée pour avoir le mouvement horaire en centièmes de secondes: ces deux angles



ajoutés ensemble, donnent l'inclinaison de l'orbite par rapport à l'Équateur  $15^{\text{d}} 30' 46''$ ; l'angle parallaxique pour le centre de Vénus, dont la déclinaison étoit de  $22^{\text{d}} 38' 42''$ , & pour la latitude de mon Observatoire, qui est celle du milieu de Paris,  $48^{\text{d}} 51' 29''$ , étoit alors de  $36^{\text{d}} 47' 48''$ . Connoissant à peu-près le temps du milieu du passage en  $M$  & la perpendiculaire  $CM$ , on en conclut facilement l'angle  $MCN$   $49^{\text{d}} 35' 20''$ , & par conséquent  $ZCN$ , angle du vertical avec le rayon mené au vrai lieu de Vénus  $N$ , égal à l'angle  $CNB$ , il étoit de  $2^{\text{d}} 43' 14''$ ; la hauteur apparente de Vénus étoit de  $2^{\text{d}} 9' 40''$ , & la différence des parallaxes de  $21''.798$ ; celle du Soleil étant supposée  $8''.67$ ; on a donc la parallaxe de hauteur  $NV$  de  $21''.782$ , & l'angle  $NCV$  de  $3' 53''.12$  qui, ajouté à l'angle  $CNB$ , donne l'angle  $CVB$  de  $2^{\text{d}} 47' 7''.12$ ; dans le triangle  $CNV$ , supposant la différence des demi-diamètres  $CV$  de  $914''.8$ , on trouve la vraie distance  $CN$  qui répond au moment du contact, de  $15' 36''.557$ ; mais pour avoir cette distance en centièmes de secondes, il est bon d'avoir l'angle  $NCV$  avec la précision des dixièmes de secondes. Supposant la perpendiculaire  $CM$  de  $10' 7''$ , comme je l'avois trouvée par mes calculs, on a la portion de l'orbite vraie qui répond à la distance  $CN$ ; on la convertit en temps, à raison de  $4' 0''.11$  par heure, & l'on a  $2^{\text{h}} 58' 13''.3$ ; c'est le temps qui a dû s'écouler depuis le milieu du passage jusqu'à l'instant où Vénus étoit à la distance vraie  $CN$ , que nous avons trouvée correspondre à la distance observée  $CV$ , qui est la différence des demi-diamètres  $15' 44''.3$ .

Conclusions  
du Passage.

&  $29''\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $15'14''{,}8$ ; si l'on prend  $CO = CV$ , on aura le point  $O$  du contact intérieur vrai ou vu du centre de la Terre. Supposant toujours  $CM$  de  $10'7''$ , on trouve que  $MO$  répond à  $2^h 51'1''{,}2$ , & diffère de  $MN$  de  $7'11''$  de temps; c'est l'effet de la parallaxe sur le contact vu de Paris, en supposant la parallaxe de  $8''{,}67$  le jour du passage, ou  $8''{,}8$  dans les moyennes distances du Soleil à la Terre. Le contact observé à Paris  $7^h 38'45''$ , donne pour le milieu du passage  $10^h 36'57''$ , & la conjonction à  $10^h 4'35''$ , c'est-à-dire  $4'42''$  plus tard que je ne l'avois annoncé dans le Mémoire que j'ai publié sur cette matière en 1764 \*, & plus tard de  $8'57''$  que suivant le Mémoire de M. Pingré, publié en 1767 \*\*; quant à la plus courte distance que j'avois calculée en 1764 d'après le passage de 1761, à peine ai-je trouvé une demi-seconde à y changer après l'observation.

Pour qu'on puisse faire usage des élémens que je viens de rapporter sous des latitudes un peu différentes de la mienne, telles qu'on les a aux environs de Paris, j'observerai que le changement de l'angle parallactique est égal à celui de la latitude; multiplié par le sinus de l'azimut & divisé par le cosinus de la hauteur, en sorte qu'en diminuant d'un septième l'augmentation en latitude, on a la diminution de l'angle parallactique qui répond à une même heure sous les deux latitudes différentes.

De même le changement de hauteur est égal à celui de la latitude, multiplié par le cosinus de l'azimut, c'est-à-dire dans ce cas-ci, les  $\frac{52}{100}$  du changement de la latitude.

On peut avec ces nombres faire servir à vingt ou trente lieues de Paris au nord & au midi, les Tables des hauteurs & des angles parallactiques que j'ai publiées dans la Connoissance des Mouvements célestes de 1762 & de 1763, & qui sont très-utiles pour le calcul des observations faites au quart-de-cercle.

\* A Paris, chez Lattré, Graveur, rue Saint-Jacques.

\*\* A Paris, chez Cavelier, Libraire, rue Saint-Jacques.

*ADDITION contenant quelques Observations qui me  
sont parvenues depuis la lecture de ce Mémoire.*

LE contact intérieur a été observé à Saron par M. le Président de Saron à  $7^h 44' 0''$ , à 2 ou 3" près, à cause de l'excessive ondulation & des irrégularités de Vénus & du Soleil : suivant la carte des Triangles de la France, il y a  $5' 35''$  de différence entre les Méridiens de Paris & de Saron, ce qui donne pour le contact réduit au Méridien de Paris,  $7^h 38' 25''$ .

Cette observation a été faite à Rouen, par M. Dulague, à  $7^h 33' 40''$ ; par M. Bouin, à  $7^h 33' 46''$ .

A Caën, par M. Pigot, à  $7^h 26' 25''$ .

Au Havre de Grâce, par M. Diquemar, à  $7^h 30' 50''$ , avec une lunette de 5 pieds.

A Stockolm, contact intérieur observé par M. Wilcke,  $8^h 41' 45''$ , Vénus se détachant totalement du bord du Soleil; suivant M. Ferner,  $8^h 41' 8''$ ; suivant M. Wargentin,  $8^h 41' 47''$ . M. Wilcke avoit un bon télescope de 18 pouces, M. Ferner une lunette achromatique de 10 pieds qui grossissoit quatre-vingt-sept fois, & M. Wargentin une lunette ordinaire de 21 pieds, avec laquelle il avoit observé déjà le passage de 1761.

A Upsal, M. Melander vit le contact intérieur à  $8^h 40' 12''$ , avec une lunette de 20 pieds; M. Bergman à  $8^h 40' 9''$ , avec une lunette de 21 pieds; M. Prosperin à  $8^h 40' 12''$ , avec une lunette de 16 pieds; M. Salenius à  $8^h 40' 15''$ , avec une lunette de 12 pieds. C'est le moment où l'on vit se rompre la bande obscure ou le ligament noir, qui unissoit encore les bords de Vénus & du Soleil, quoique Vénus parut entièrement sur le disque solaire.

A Cajanebourg, latitude  $64^d 13' 30''$ , &  $1^h 41' 44''$  à l'orient de Paris; M. Planman, avec une bonne lunette de 21 pieds, dont il s'est déjà servi pour le passage de 1761, observa le contact intérieur à  $9^h 20' 45'' \frac{1}{2}$ ; il ne vit point le contact intérieur de la sortie, mais le contact extérieur ou la sortie totale de Vénus arriva à  $15^h 32' 27''$ , assez exactement

# 422 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

malgré l'ondulation du bord du Soleil : je me servirai de cette observation pour trouver la parallaxe du Soleil.

OBSERVATIONS  
qui  
ont manqué.

M. Wargentín, qui m'envoya ces observations aussitôt qu'il les eut reçues, m'apprit que M. Mallet, qui étoit allé à Pello, au nord de Torneå, n'avoit pu y voir aucun des deux contacts, & que M. Hellant à Torneå n'avoit pas même aperçu le Soleil pendant la durée du passage. La même chose est arrivée à M. le Gentil qui étoit à Pondichéry dans les Indes orientales; à M. Call, Astronome Anglois qui étoit à Madras; à M. Pictet, de Genève, qui étoit allé à Ounaba en Lapponie, à  $66^{\text{d}} 45'$  de latitude, &  $2^{\text{h}} 7' 37''$  à l'orient de Paris, sur la côte orientale de la mer blanche. Il en a été de même du P. Beraud, à Lyon, &c.

A Brest, le contact intérieur fut observé par M. de Verdun à  $7^{\text{h}} 11' 37''$ ; par M. Blondeau, à  $7^{\text{h}} 12' 4''$ ; & par M. Duval le Roi, à  $7^{\text{h}} 12' 7''$ . Ces observations réduites à Paris, donnent plus que l'on n'y a observé; mais le Soleil étant plus élevé à Brest qu'à Paris, les observations ont dû y être moins affectées par l'ondulation & les irrégularités que causoient les vapeurs.

A Toulouse; M. d'Arquier, Correspondant de l'Académie; estima le contact à  $7^{\text{h}} 35' 8''$ , mais le Soleil étoit fort près de l'horizon & le bord très-irrégulier; M. Garipuy ne l'observa qu'à  $7^{\text{h}} 35' 30''$ .

A Pétersbourg, on n'a point vu l'entrée de Vénus, mais seulement la sortie; le contact intérieur parut au P. Stahl  $3^{\text{h}} 25' 34''$ , à M. Lexell  $3^{\text{h}} 25' 41''$ , au P. Mayer  $3^{\text{h}} 25' 43''$ ; le contact extérieur ou la sortie entière de Vénus arriva, suivant M. Stahl, à  $3^{\text{h}} 43' 14''$ ; suivant M. Lexell, à  $3^{\text{h}} 43' 24''$ ; suivant M. Albert Euler, à  $3^{\text{h}} 43' 31''$ ; suivant le P. Mayer, à  $3^{\text{h}} 43' 41''$ . Le P. Mayer avoit une bonne lunette achromatique de 18 pieds; M. Euler, une lunette achromatique de 7 pieds; M. Lexell, un télescope de Short de 2 pieds  $\frac{1}{2}$ ; le P. Stahl, un télescope de 3 pieds  $\frac{1}{2}$ .

A Ponoï, latitude  $67^{\text{d}} 4' 30''$ , longitude  $2^{\text{h}} 35' 14''$ ; M. Mallet, de Genève, observa le contact intérieur de Vénus à  $10^{\text{h}} 15' 4''$  du soir.

Les observations de M. Rumowsky, faites à Kola sur la mer Blanche, latitude  $68^{\text{d}} 53'$ , &  $2^{\text{h}} 2' 15''$  à l'orient de Paris; celles de M. Kraft à Orenbourg, latitude  $51^{\text{d}} 46'$ , &  $3^{\text{h}} 31' 12''$  à l'orient de Paris; celles de M. Christophe Euler à Orsk, latitude  $51^{\text{d}} 12'$ , &  $3^{\text{h}} 44' 43''$  à l'orient de Paris, se trouveront dans le *Tome XIV* des Mémoires de Pétersbourg.

M. Islenief, à Yakoutsck, latitude  $62^{\text{d}} 1' 50''$ , &  $8^{\text{h}} 29' 50''$  à l'orient de Paris, vit le contact intérieur de la sortie à  $10^{\text{h}} 2' 36''$ , & le contact extérieur ou la sortie totale à  $10^{\text{h}} 18' 56'' \frac{1}{2}$ .

M. Lowitz, à Gurief près d'Astracan, latitude  $47^{\text{d}} 7'$ , &  $3^{\text{h}} 18' 47''$  à l'orient de Paris, observa le contact intérieur de la sortie à  $4^{\text{h}} 52' 55''$ , & la sortie totale à  $5^{\text{h}} 11' 6''$ .

A Wardœ ou Wardhus, île de la mer Glaciale, sous la latitude de  $70^{\text{d}} 22' 35''$ , &  $1^{\text{h}} 54' 54''$  à l'orient de Paris, le P. Hell, Jésuite, Astronome de Leurs Majestés Impériale & Royale, envoyé de la part du Roi de Danemarck, par les soins de M. le Comte de Thott, Ministre d'État, observa le contact intérieur de Vénus ou la formation du filet lumineux à  $9^{\text{h}} 34' 10'',6$ , & le contact intérieur de la sortie ou le point noir formé entre Vénus & le Soleil, à  $15^{\text{h}} 27' 24'',6$  avec une lunette achromatique de Dollond, de 10 pieds; cette observation est la seule qui ait réussi complètement dans le nord: je m'en servirai pour déduire la parallaxe du Soleil.

Observation importante.

En Californie, au village de Saint-Joseph, latitude  $23^{\text{d}} 3' 37''$ , &  $7^{\text{h}} 28' 10''$  à l'occident de Paris, M. l'abbé Chappe observa le premier contact intérieur à  $0^{\text{h}} 17' 26'',9$ , & le second à  $5^{\text{h}} 54' 50'',3$ ; cette observation, qui lui a coûté la vie, est la plus importante de toutes, & la plus propre à déterminer la parallaxe, par comparaison avec celles qui ont été faites dans le nord de notre continent, comme je le ferai voir dans un autre Mémoire.

Autre observation importante.

Au fort du Prince de Galles, sur les côtes de la baie d'Hudson, latitude  $58^{\text{d}} 47' 30''$ , &  $6^{\text{h}} 26' 18''$  ou  $20''$  à l'occident de Paris, M.<sup>rs</sup> Dymond & Wales observèrent le passage, chacun avec un télescope de 2 pieds de foyer, qui grossissoit cent vingt fois.



# 424 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

M. DYMOND. M. WALES.

Premier contact extérieur . . . . 0<sup>h</sup> 57' 0"<sup>1</sup>/<sub>2</sub> . . . . 0<sup>h</sup> 57' 7"<sup>1</sup>/<sub>2</sub>

Premier contact intérieur . . . . 1. 15. 25 . . . . 1. 15. 21.

Second contact intérieur . . . . 7. 0. 48 <sup>1</sup>/<sub>2</sub> . . . . 7. 0. 45 <sup>1</sup>/<sub>2</sub>

Sortie totale . . . . . 7. 19. 20 <sup>1</sup>/<sub>4</sub> . . . . 7. 19. 1 <sup>1</sup>/<sub>4</sub>

Le dernier contact étoit fort difficile à bien observer, parce que les bords étoient mal terminés.

Parallaxe  
du Soleil.

La comparaison de ces deux observations d'Amérique, m'a donné pour la parallaxe moyenne du Soleil 8",54; mais l'observation du P. Hell comparée avec celle de Californie donne 8",80, & avec celle du Fort 9",07: je discuterai cette matière dans les *Mémoires de 1770*.

A Norrviton dans la Pensylvanie, M. Smith observa le contact intérieur à 2<sup>h</sup> 30' 15", avec un télescope de deux pieds qui grossissoit quatre-vingt-quinze fois; la latitude est de 40<sup>d</sup> 9' 56"; & la différence des méridiens environ 5<sup>h</sup> 10' 50" à l'occident de Paris, ou 5<sup>h</sup> 11' 45" suivant M. Pingré.

A Philadelphie, place de l'Hôtel-de-ville, (*State house square*) le contact intérieur fut observé par M. Erving à 2<sup>h</sup> 31' 24"; avec un télescope de 4 pieds <sup>1</sup>/<sub>2</sub> de foyer qui grossissoit quatre cents fois; & par M. Prior à 2<sup>h</sup> 31' 36"; la latitude est 39<sup>d</sup> 56' 55", la différence des Méridiens 5<sup>h</sup> 10' 27".

A Lewestown, au cap de Delaware, 38<sup>d</sup> 47' 27" de latitude; sous le même Méridien que la ville de Philadelphie, M. Biddle observa le contact intérieur à 2<sup>h</sup> 29' 53", avec un télescope de deux pieds de foyer; M. Pingré en conclut la différence des Méridiens 5<sup>h</sup> 9' 52".

A Cambridge, dans la nouvelle Angleterre, latitude 42<sup>d</sup> 25'; différence des Méridiens 4<sup>h</sup> 53' 59", M. Winthrop avec un télescope de Short de deux pieds de foyer, observa le contact à 2<sup>h</sup> 47' 50". Ce Savant est le même à qui l'on doit l'observation du passage de Mercure en 1740.

Entre 5<sup>h</sup> 24' 23" & 5<sup>h</sup> 37' 23", la distance du bord septentrional du Soleil au bord austral de Vénus, parut de 6' 16", & celle

& celle du bord du Soleil au bord boréal de Vénus  $5' 17''{,}6$ , avec un micromètre objectif de Dollond; d'où l'on conclut la plus courte distance apparente des centres  $9' 59''{,}7$ . Diamètre  $58''{,}6$ .

A Mexico, M. d'Alzate & M. Bartolache observèrent le contact intérieur à midi  $55' 34$  ou  $36''$ .

A Cadix, M. Tofino (*on prononce Tofigno*) Commandant des Gardes de la Marine, observa le contact intérieur à  $7^h 2' 30''$ ; mais ce ne fut qu'à  $7^h 4' 0''$  qu'il aperçut sensiblement la lumière du Soleil au-delà du bord de Vénus.

A Porto en Portugal, ou plutôt à Agromonte, près de la ville, le P. Manuel Alvarès de Queiros, Professeur royal de Philosophie, observa le contact intérieur à  $6^h 54' 35''$ .

L'Académie a aussi reçu l'observation du P. Christophe, Capucin, faite à la Martinique, mais j'en ignore les circonstances.

M. Mohr, Ministre de la religion à Batavia, dans l'île de Java aux Indes orientales, a observé le contact intérieur de la sortie à  $8^h 30' 13''$ , & la sortie totale à  $8^h 48' 31''$ ; la latitude est à peu-près de  $6^d 12'$  méridionale. Il observa aussi le second contact intérieur de Mercure sur le Soleil, le 10 Novembre à  $7^h 33' 32''$ , & la sortie totale à  $7^h 35' 11''$ , avec le même télescope: il avoit une très-bonne pendule réglée par le moyen d'un quart-de-cercle (*Voyez les Mémoires de l'Académie de Harlem, tome XI*). M. Hennert, Professeur de Mathématiques en l'Université d'Utrecht, est celui qui m'a communiqué ces deux observations.

Passage de  
Mercure.

Je rendrai compte dans un autre Mémoire des observations faites en Angleterre.



*OBSERVATION  
DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL  
DU 4 JUIN 1769.*

Par M. DE LA LANDE.

<sup>7 Juin</sup>  
1769. J'AI observé cette Éclipse au Collège Mazarin, dans le même endroit où j'avois observé la veille le passage de Vénus; je me suis servi d'un micromètre-objectif de M. Passeniant, appliqué à un télescope de 32 pouces, & je me suis occupé sur-tout à observer les distances des cornes de l'Éclipse, afin d'en tirer, s'il étoit possible, de nouvelles lumières sur l'inflexion de  $4^{\circ}\frac{1}{2}$  que M. du Séjour reconnut, principalement par de semblables distances, que M. Short avoit observées à Londres le 1.<sup>er</sup> Avril 1764; plusieurs de ces distances ont été observées par M. Marie, Professeur de Mathématiques au Collège Mazarin; je les ai marquées de la lettre *M*.

A  $6^h 48' 0''$ , nous avons vu le Soleil légèrement entamé par la Lune.

6. 51. 20, commencement de l'immersion d'une grande tache.

6. 52. 0, immersion totale de la même tache.

6. 58. 40,  $1323\frac{1}{2}$  parties pour la distance des cornes.

7. 2. 10, 1461.

7. 4. 22, 1545.

7. 13. 0, commencement de l'immersion d'une grande tache.

7. 14. 23 ou 24, immersion totale.

7. 16. 52,  $1838\frac{1}{2}$ .

7. 20. 7, 1885.

7. 21. 52, 1903.

7. 25. 52, 1952.

7. 28. 53, 1949.

7. 27. 22, 1951.

- A 7<sup>h</sup> 33' 5", immersion d'une tache.  
 7. 33. 32, immersion de celle qui en étoit voisine.  
 7. 40. 43, <sup>M.</sup> douteux; émerison de la première tache.  
 7. 41. 58, commencement de l'immersion d'une tache longue & pointue.  
 7. 43. 51, immersion totale.  
 7. 45. 57, 1937.  
 7. 46. 22, 1911  $\frac{5}{2}$ .  
 7. 53. 22, 1858  $\frac{1}{2}$ .  
 7. 54. 59, 1837.  
 7. 54. 13, <sup>M.</sup> émerison d'une tache.  
 7. 54. 29, <sup>M.</sup> émerison de la tache voisine.  
 7. 54. 53, <sup>M.</sup> émerison d'une autre petite tache.  
 7. 56. 50, 1797.  
 7. 58. 36, <sup>M.</sup> 1748.  
 8. 3. 20, <sup>M.</sup> 1645.  
 8. 11. 40, 1455.  
 8. 13. 38, 1341.  
 8. 16. 27, 1204.  
 8. 20. 46, 972.  
 8. 21. 54, <sup>M.</sup> fin de l'émerison d'une grande tache.  
 8. 26. 12, 432.  
 8. 27 & quelques secondes, fin de l'Éclipse.

Je remarquai très-bien sur la partie méridionale de la Lune des inégalités sensibles ou espèces de montagnes, que ma lunette rendoit extrêmement visibles.

Pour tirer de cette Éclipse les conclusions principales qu'elle fournit, je supposerai le mouvement horaire de la Lune 37' 57" sur l'écliptique; le mouvement en latitude décroissante 3' 28"; la différence des parallaxes horizontales à Paris 61' 8"; le diamètre horizontal de la Lune 33' 28"; & l'augmentation

7 <sup>h</sup> 0"	16,3
7. 30	19,0
8. 0	21,6
8. 25	23,7

H h h ij

telle qu'elle est dans la Table de l'autre part; le diamètre du Soleil  $31' 34''$ , tel que je l'ai déterminé avec soin (*Mémoires de l'Académie, année 1760, page 48.*)

La première distance des cornes que j'ai observée à  $6^h 58' 40''$ , est de 1323 parties  $\frac{1}{2}$ , dont le diamètre du Soleil occupoit 2338; elle étoit donc de  $17' 52''$ , & par conséquent, la distance des centres, en ne tenant pas compte ici de l'inflexion, étoit de  $27' 19''$ .

Pour comparer cette distance avec celle qui en est la plus éloignée, je choisis la fin de l'éclipse observée par M. Messier à  $8^h 27' 22''$ , la distance des centres étant par conséquent alors de  $32' 43''$ ; je calcule pour ces deux temps d'observation, la parallaxe de la Lune dans le sphéroïde aplati, que je trouve de  $34' 4''$  & de  $28' 27''$  en longitude, de  $42' 38''$  & de  $36' 29''$  en latitude; le mouvement apparent se trouve donc être de  $49' 59''$  en longitude, & de  $1' 1''$  en latitude dans l'intervalle des deux observations. Soit  $S$  le centre du Soleil,  $LSB$  une partie de l'Écliptique,  $C$  le centre de la

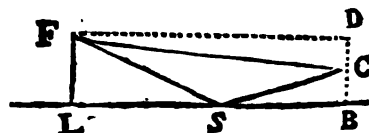
Lune dans la première observation,  $F$  son lieu apparent à la fin de l'é-

clipse, en sorte qu'on ait  $SC = 27' 19''$ ,  $SF = 32' 43''$ ,  $FD =$

$49' 59''$ ,  $CD = 1' 1''$ ; on trouvera l'angle  $CFD = 1^d 14'$ , l'angle  $CFS = 34^d 35'$ ,  $FCS = 42^d 59'$ ,  $SL = 26' 32''$ ,  $FL = 19' 9''$ ; ainsi la distance à la conjonction vraie étoit de  $1' 55''$  à la fin de l'éclipse, & la latitude vraie  $55' 38''$ ; d'où il suit que la conjonction vraie est arrivée à  $8^h 30' 38''$ , avec  $55' 27''$  de latitude boréale &  $2^h 13^d 51' 55''$  de longitude.

Les anciennes Tables de Mayer, dont je m'étois servi pour calculer cette éclipse dans la Connoissance des Temps, donnent une longitude trop petite de  $1' 12''$ , & une latitude trop grande de  $26''$ .

J'ai voulu comparer aussi cette longitude observée avec celle des Tables nouvelles de Mayer, dont on se sert pour calculer à Londres le *Nautical almanac*; j'ai trouvé qu'elles donnent une longitude trop petite de  $12''$  seulement: aussi m'a-t-on assuré en Angleterre que l'erreur n'alloit presque jamais à  $45''$  dans ces



nouvelles Tables de Mayer, qui ont été comparées avec un très-grand nombre d'observations de M. Bradley, calculées par M. Morris. Elles se trouveront dans mon *Astronomie*.

## A D D I T I O N

*Contenant quelques Observations qui me sont parvenues  
depuis la lecture de ce Mémoire.*

LES Éclipses de Soleil étant la meilleure méthode de déterminer les différences des méridiens, j'ai profité des observations que j'avois reçues, pour engager M. MECHAIN à en tirer des conséquences; cet habile calculateur s'est servi pour cela de la nouvelle méthode que j'ai donnée dans mon *Astronomie*; il y a fait entrer la considération de l'aplatissement de la Terre, supposé de  $\frac{1}{230}$ , l'inflexion de  $4''\frac{1}{2}$ , la parallaxe du Soleil de  $9''$ : voici le résultat de ses calculs, en supposant la conjonction vraie à Paris,  $8^h 31' 6''$  de temps vrai, & la fin de l'éclipse à Paris  $8^h 27' 20''$ . M. Cassini l'a observée à  $8^h 27' 19''$ , & M. Messier à  $8^h 27' 22''$ , réduite à l'Observatoire.

Calculs de  
M. Mechain.

VILLES.	LATITUDE.	FIN observée.	DIFFÉRENCE supposée.	DIFFÉR. des MÉRIDIENS, calculée.	N O M S des OBSERVATEURS.
Bologne..	$44^d 29' 36''$	$7^h 28' 14''$	$36' 5'' occ.$	$36' 16''$	M. Zanotti.
Brest....	48. 23. 0	7. 56. 44	$27. 23 occ.$	27. 17	M. de Verdun.
Cadiz...	36. 31. 7	7. 17. 59	$34. 16 occ.$	34. 25	M. Tofino.
Greenwich.	51. 28. 40	8. 23. 32	$9. 16 occ.$	9. 21	M. Maskelyne.
Gripswald	54. 16. 0	9. 30. 49	$45. 8 occ.$	43. 38	M. Rohl.
Milan....	45. 28. 10	8. 47. 50	$27. 20 occ.$	27. 27	Le P. de la Grange.
Vurfsbourg.	49. 46. 6	9. 3. 40	$31. 35 occ.$	$30. 16\frac{1}{2}$	Le P. Huberti.

J'observerai seulement que le temps de la conjonction dont M. Méchain s'est servi, est fondé sur l'observation de M. le Préfident de Saron, qui observa le commencement de l'éclipse à Saron à  $6^h 53' 8''$ , & la fin à  $8^h 32' 15''$ , avec une excellente

# 430 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROTALE

lunette achromatique; en sorte qu'il regarde la durée de l'éclipse comme très-exacte: il en résulte que la différence des méridiens est de  $5^{\circ} 11''$ , au lieu de  $5^{\circ} 35''$  que donne le calcul des triangles de la France: en admettant ce résultat, la conjonction vraie se trouve à  $8^h 31' 6''$  dans  $2^{\circ} 13^d 51' 56''$  de longitude, avec  $55' 43'' \frac{1}{2}$  de latitude boréale. M. Crozet qui a bien voulu faire à Lyon de semblables calculs, a trouvé pour Bologne  $36' 4''$ , & pour Milan  $27' 21''$ , mais c'est en se servant de la conjonction que j'ai calculée ci-dessus, & que je crois préférable.

L'observation de Brest fut faite par M. de Verdun à  $7^h 56' 41'' \frac{1}{2}$ , par M. Duval-le-Roi à  $7^h 56' 32''$ , par M. Blondeau à  $7^h 56' 34''$ , & par M. Fortin à  $7^h 56' 44''$ .

M. Tofino à Cadix observa le commencement à  $6^h 1' 34''$ , & la fin à  $7^h 17' 59''$ .

A Greenwich, M. Maskelyne observa le commencement à  $6^h 38' 54''$ , & la fin à  $8^h 23' 30''$ ; M. Hitchins à  $6^h 38' 59''$ , &  $8^h 23' 35''$ ; M. Dunn à  $6^h 39' 9''$  &  $8^h 23' 33''$ ; ils remarquèrent tous, comme moi, diverses inégalités sur le bord de la Lune, quoique l'air fut calme & le Ciel très-serein.

A Toulouse, M. d'Arquier, Correspondant de l'Académie, observa le commencement de l'éclipse à  $6^h 39' 20''$ , la fin à  $8^h 9' 14''$ ; M. Garipui à  $8^h 9' 14''$ .

A Kergars près l'Orient, M. d'Après observa la fin de l'éclipse à  $8^h 0' 34''$ .

La longitude de Brest ayant été discutée à l'occasion du passage de Vénus qui y a été très-bien observé, j'ai engagé M. Mechain à calculer aussi l'observation de l'éclipse de Soleil du 5 Août 1766; commencement de l'éclipse à Brest,  $5^h 15' 42''$  du soir; fin,  $7^h 1' 46''$ : commencement observé à Paris par un milieu entre M. Maraldi & M. de Saron,  $5^h 44' 12''$ : conjonction vraie déduite de l'observation le 5 Août,  $5^h 25' 46''$  à Brest, avec  $4^{\circ} 13^d 10' 34''$  de longitude, &  $32' 30'' \frac{1}{2}$  de latitude boréale; différence des méridiens  $27' 22''$ . En se servant de l'observation de M. Maraldi, faite à  $5^h 44' 8''$ , on trouve  $27' 18''$  pour la différence des méridiens, ce qui s'accorde à 1".

Observation  
de 1766.

près avec le résultat de l'observation de 1769; cette différence est de  $27' 23''$  par les triangles de la France.

La longitude de Cadix qui se trouve de  $34' 25''$  par le calcul de l'éclipse de 1769, a été trouvée de  $34' 32''$  par M. Pingré, en calculant la même éclipse suivant d'autres considérations, dont il rendra compte dans les Mémoires de l'Académie, & de  $34' 16''$  seulement par M. du Séjour, au moyen de l'éclipse de 1764; elle étoit marquée de  $33' 25''$  dans la *Connoissance des Temps*, avant les calculs dont nous venons de rendre compte.

Longitude de  
Cadix.

La longitude de Rome a été aussi discutée par M. Mechain, au moyen de l'Éclipse du 8 Janvier 1750: le commencement fut observé à  $8^h 34' 35''$  du matin, & la fin à  $11^h 11' 32''$ , sous la latitude de  $41^d 54'$ , &  $4''$  à l'est de Saint-Pierre de Rome; il en résulte que la conjonction vraie arriva à  $10^h 18' 28'' \frac{1}{2}$ , dans  $9^d 18^d 7' 16''$  de longitude, avec  $43' 21''$  de latitude boréale: la fin de l'Éclipse fut observée à Berlin à  $11^h 20' 5'' \frac{1}{2}$ , d'où il résulte que la différence des méridiens est de  $3' 45''$ , & entre Berlin & Saint-Pierre de Rome,  $3' 49''$ ; par conséquent Saint-Pierre est de  $40' 36''$  à l'orient de Paris, en supposant que Berlin soit à  $44' 25''$  de Paris, comme je l'ai trouvé par d'autres observations.

Observation  
de 1750.

A Upsal, la fin de l'Éclipse de 1769 a été observée entre  $10^h 3' 48''$  &  $10^h 3' 53''$ .

A Stockolm, entre  $10^h 4' 52''$  &  $10^h 4' 53''$ ; M. Pingré en conclut la différence des méridiens  $1^h 2' 50'' \frac{1}{2}$ .

A Cajanebourg, commencement de l'Éclipse à  $9^h 0' 53''$ , fin à  $11^h 0' 0'' \frac{1}{2}$ ; M. Euler en a conclu la différence des méridiens  $1^h 41' 40''$ ; je ne trouve que  $1^h 41' 11''$  par l'observation du passage; M. Pingré trouvoit  $1^h 40' 40''$  par le passage de 1761.

A Ponoï en Lapponie, M. Mallet observa la fin de l'Éclipse à midi  $7' 55''$ , sous la latitude de  $67^d 4' 30''$ ,  $2^h 35' 15''$  à l'orient de Paris.

A Pétersbourg, le P. Mayer observa le commencement de l'Éclipse à  $9^h 10' 29''$ , la fin à  $11^h 6' 14''$ ; M. Lexell à  $9^h 10' 29''$ , la fin à  $11^h 6' 9''$ ; M. Stahl observa le commencement à  $9^h 10' 25''$ ; M. Kotelnikow vit la fin à  $11^h 6' 6''$ , &



lunette achromatique; en sorte qu'il regarde  
comme très-exacte: il en résulte que la  
est de  $5' 11''$ , au lieu de  $5' 35''$  que  
de la France: en admettant ce résul-  
trouve à  $8^h 31' 6''$  dans  $2' 13''$   
 $55' 43'' \frac{1}{2}$  de latitude boréale.  
à Lyon de semblables calculs  
pour Milan  $27' 21''$ , mais  
que j'ai calculée ci-dessus

L'observation de B  
 $41'' \frac{1}{2}$ , par M. Du  
à  $7^h 56' 34''$ ,  
M. Tofino  
& la fin à 7  
A Gre  
 $6^h 38'$   
&  $8^h$

mar  
la

S  
S  
C  
I  
E  
N  
C  
E  
S  
431

ajoutant  $2' 7''$ ; M. Pingré en  
distance du méridien de Hawkhil,  $21' 56''$ ; & celle  
à Edimbourg,  $22' 20''$ .

J'ai reçu également les observations de M. le prince duc de  
Croy, faites à Calais, conjointement avec M. de Foureroy; celles  
de M. Simonin & du R. P. Théodore d'Almeida à Bayonne;  
celles de M. de Relingue, ingénieur du Roi, à Montreuil-sur-  
mer; de M. de Nantia, près de Nanci; & de M. Tournant  
à Laon: mais elles ont été déjà communiquées à l'Académie,  
soit pour le passage de Vénus, soit pour l'éclipse de Soleil, de  
même que celles de Vienne, d'Ingolstat & de Copenhague, pour  
l'éclipse de Soleil.

• MÉMOIRE

## M É M O I R E

S U R

DES DIFFÉRENTES DENSITÉS

ESPRIT-DE-VIN,

ÉPREUVES DEGRÉS DE FORCE;

*pour en être sûr de connoître avec précision**des Esprits-de-vin & des**- de - vie.*

I S S O N.

Je suis livré depuis plusieurs 24 Décemb.  
à chercher de trouver plus d'exac- 1768.

les pesanteurs spécifiques  
nous ont données les  
expériences que j'ai faites  
sur les pesanteurs spécifiques de quelques  
dans ces Tables, j'ai pris le parti d'en éprouver  
quelques-unes, pour essayer de connoître d'où pouvoit venir  
l'erreur. Ces épreuves m'ont appris que les erreurs de ces Tables  
étoient encore beaucoup plus considérables que je ne les avois  
cruës d'abord; ce qui m'a déterminé à travailler moi-même à en  
former une, la plus complète qu'il me sera possible: quelque  
long & pénible que soit ce travail, il ne me rebutera point, &  
je n'épargnerai aucun soin pour y donner toute l'exactitude dont  
je suis capable.

C'est en travaillant à cette Table, que j'ai remarqué les faits dont  
je me propose de rendre compte dans ce Mémoire; quelques-uns  
Mém. 1769.

. I i j

SCIENCES.  
C'est par le calcul  
de la France, 25  
sur M. Pigeur,  
dout  
le 34  
sont  
cette dernière  
431  
L'opinion de

# 432 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

M. Euler à  $1^h 16' 5''$ ; la longitude qui résulte de ces observations en suivant le calcul de M. Euler,  $1^h 52' 5''$ ; suivant M. Pingré,  $1^h 51' 56''$ .

A Yakoutsk sur la Lena, M. le capitaine Islenief observa le commencement de l'Éclipse à  $5^h 5' 52''$ , & la fin à  $6^h 52' 37\frac{1}{2}''$ ; latitude  $62^d 1' 50''$ ; différence des méridiens,  $8^h 29' 50''$ .

A Gurief, M. Lowitz observa le commencement de l'Éclipse à  $1^h 29' 52''$ , & la fin à midi  $26' 48''$ ; latitude  $47^d 7' 3''$ ; différence des méridiens  $3^h 18' 47''$ .

A Wardoë, le P. Hell observa le commencement sensible avec la lunette de quatre pieds de son quart-de-cercle, à  $9^h 22' 47''$ ; il estime qu'il y avoit 5 ou 6" que le vrai commencement étoit arrivé; la fin avec une lunette achromatique de dix pieds, à  $11^h 22' 35''$ , à la précision d'une seconde; il en déduit la différence des méridiens de  $1^h 55' 6''$ : M. Euler trouve  $1^h 55' 2''$ , & M. Crozet  $1^h 54' 56''$ .

A Gibraltar, M. le Lieutenant Jardine observa le commencement de l'Éclipse à  $6^h 8' 0''$ , & la fin à  $7^h 20' 33''$ , avec un télescope de deux pieds: latitude  $36^d 4' 44''$ , environ  $28' 46''$  à l'occident de Paris.

A Hawkhil près d'Édimbourg, latitude  $55^d 57' 37''$ : la fin de l'Éclipse fut observée par M. Lind & M. Hoy avec des lunettes achromatiques, à  $8^h 17' 30''$  de temps moyen qu'il faut réduire en temps vrai, en ajoutant  $2' 7''$ ; M. Pingré en conclut la distance du méridien de Hawkhil,  $21' 56''$ ; & celle d'Édimbourg,  $22' 20''$ .

J'ai reçu également les observations de M. le prince duc de Croy, faites à Calais, conjointement avec M. de Fourcroy; celles de M. Simonin & du R. P. Théodore d'Almeida à Bayonne; celles de M. de Relingue, ingénieur du Roi, à Montreuil-sur-mer; de M. de Nantia, près de Nanci; & de M. Tournant à Laon: mais elles ont été déjà communiquées à l'Académie, soit pour le passage de Vénus, soit pour l'éclipse de Soleil, de même que celles de Vienne, d'Ingolstat & de Copenhague, pour l'éclipse de Soleil.



• MÉMOIRE

## M É M O I R E

S U R

LE RAPPORT DES DIFFÉRENTES DENSITÉS

DE L'ESPRIT-DE-VIN,

AVEC SES DIFFÉRENS DEGRÉS DE FORCE;

*D'où l'on déduit un moyen sûr de connoître avec précision  
la qualité & la force des Esprits-de-vin & des  
Eaux - de - vie.*

Par M. B R I S S O N.

**L**ES occupations auxquelles je me suis livré depuis plusieurs 24 Décemb.  
années m'ayant souvent fait désirer de trouver plus d'exac- 1768.  
titude qu'il n'y en a dans les Tables des pesanteurs spécifiques  
des corps, tant solides que liquides, que nous ont données les  
Physiciens; les résultats de quelques expériences que j'ai faites  
ne s'accordant point avec les pesanteurs spécifiques de quelques  
corps, indiquées dans ces Tables, j'ai pris le parti d'en éprouver  
quelques-unes, pour essayer de connoître d'où pouvoit venir  
l'erreur. Ces épreuves m'ont appris que les erreurs de ces Tables  
étoient encore beaucoup plus considérables que je ne les avois  
cruës d'abord; ce qui m'a déterminé à travailler moi-même à en  
former une, la plus complète qu'il me sera possible: quelque  
long & pénible que soit ce travail, il ne me rebutera point, &  
je n'épargnerai aucun soin pour y donner toute l'exactitude dont  
je suis capable.

C'est en travaillant à cette Table, que j'ai remarqué les faits dont  
je me propose de rendre compte dans ce Mémoire; quelques-uns  
Mém. 1769. . Iii

#### 434 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

sont tout-à-fait nouveaux ; les autres ont déjà été discutés, mais non pas avec la précision nécessaire, ni avec les détails qu'ils exigent pour être bien connus.

<sup>a</sup> Voyez *Mém. de l'Académie*, année 1733, p. 165.

On a remarqué depuis long-temps que le mélange de l'eau & de l'esprit-de-vin, a une densité plus grande que ne l'exigent les pesanteurs spécifiques des liqueurs qui le composent ; M. de Reaumur <sup>a</sup> fit voir, en 1733, que deux volumes de liqueurs, l'un d'eau & l'autre d'esprit-de-vin, occupoient, étant bien mêlés ensemble, un espace moindre que la somme des deux volumes qu'avoient les deux liqueurs prises séparément ; c'est-à-dire que ces deux volumes, qui, étant séparés, pouvoient remplir chacun un vase d'une capacité déterminée, ne remplissoient pas, étant mêlés, un troisième vase égal en capacité aux deux premiers : il fit voir, en un mot, que la pesanteur spécifique de ce mélange étoit plus grande qu'elle n'auroit dû l'être, relativement à la densité de ces deux liqueurs & à la proportion suivant laquelle le mélange étoit fait. Il donna aussi quelques détails sur la quantité dont le volume diminue, suivant que l'esprit-de-vin est mêlé avec une quantité d'eau plus ou moins grande ; mais les résultats de ses expériences, qui lui suffisoient pour l'objet qu'il avoit en vue, ne lui donnèrent que des *à peu-près* : mon dessein a été d'obtenir plus d'exactitude, & j'ose dire que j'y ai réussi, parce que les moyens que j'ai employés sont plus susceptibles de précision & moins sujets à erreur, que ne le sont ceux dont s'est servi M. de Reaumur.

<sup>b</sup> *Mém. de l'Acad.* 1718, p. 37.

M. Geoffroy <sup>b</sup>, dès 1718, avoit aussi examiné cette matière, mais par des moyens qui sont encore moins susceptibles d'exactitude : il tenta de déterminer le degré de force des différentes espèces d'eaux-de-vie ; & le meilleur moyen, selon lui, est d'en brûler une quantité mesurée ; ce qui reste de flegme après la déflagration, apprend combien l'eau-de-vie contenoit d'esprit : par exemple, si ce qui demeure de flegme, est la moitié du volume qu'on a mis en expérience, il juge que l'eau-de-vie contenoit moitié esprit & moitié flegme. On voit combien cela est peu exact : car on sait que, pendant que la partie spiritueuse

brûle, une portion du flegme s'évapore, & l'on ignore quelle est cette portion évaporée: ce moyen fait donc toujours croire l'eau-de-vie plus forte qu'elle ne l'est réellement. L'Académie va juger si les moyens dont je me suis servi, sont plus susceptibles d'exactitude.

Les expériences de M. de Reaumur; prouvent d'une manière incontestable que le mélange de l'esprit-de-vin avec l'eau augmente de densité à mesure qu'on l'affoiblit par une nouvelle addition d'eau, non-seulement en raison de l'excès de la densité de l'eau sur celle de l'esprit-de-vin, mais dans une raison plus grande; elles prouvent encore que cet excès d'augmentation de densité est causé par la pénétration des deux liqueurs, puisqu'après le mélange, le volume est moindre qu'il ne l'étoit auparavant; mais suivant quelle progression cette densité augmente-t-elle, à mesure qu'on affoiblit le mélange? cet excès de densité qui naît de la pénétration, est-il causé uniquement par l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin? ou bien est-il causé seulement par l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau? ou bien enfin est-il causé par l'introduction mutuelle des particules d'une liqueur dans les pores de l'autre? ce sont autant de points que nous allons examiner.

Pour procéder avec ordre, je vais 1.<sup>o</sup> rendre compte des expériences que j'ai faites pour arriver au but que je me suis proposé d'atteindre. 2.<sup>o</sup> Je donnerai un détail bien circonstancié des résultats de ces expériences. 3.<sup>o</sup> Je tâcherai de donner de chacun des faits une explication claire & précise. 4.<sup>o</sup> J'en déduirai quelques principes qui pourront avoir leur utilité.

Mon principal dessein a été de reconnoître dans quelle progression augmente la densité de l'esprit-de-vin, à mesure qu'on l'affoiblit de plus en plus en y mêlant de l'eau; c'est dans cette vue que j'ai fait séparément un grand nombre de mélanges d'esprit-de-vin & d'eau dans différentes proportions; l'esprit-de-vin dont je me suis servi, étoit très-désflegmé, & autant qu'il peut l'être par la distillation; la pesanteur spécifique étoit à celle de l'eau de pluie comme  $837\frac{1}{8}$  est à 1000; l'eau que j'ai employée, étoit

de l'eau distillée, dont la pesanteur spécifique étoit exactement la même que celle de l'eau de pluie; & l'eau de pluie à laquelle j'ai comparé ces liqueurs, étoit une eau que j'ai reçue immédiatement du nuage dans un grand vase de fayence bien net, que j'ai laissé reposer pendant quelque temps, afin de donner lieu à l'évaporation des substances volatiles qu'elle auroit pu contenir, & que j'ai ensuite filtrée au papier gris, pour la purger, le plus qu'il étoit possible, des substances étrangères qui auroient pu s'y trouver mêlées; pour plus de sûreté, je n'ai même reçu cette eau de pluie que quelque temps après que la pluie a été commencée, afin qu'il s'y trouvât moins de ces corps étrangers qui sont souvent suspendus dans l'air, & qui sont ordinairement ramenés jusqu'à terre par la première ondée.

J'ai donc fait séparément quinze mélanges d'esprit-de-vin & d'eau dans différentes proportions; savoir, dans un j'ai mêlé une partie d'eau avec quinze parties d'esprit-de-vin; dans un autre, j'ai mêlé deux parties d'eau avec quatorze parties d'esprit-de-vin; dans un troisième, j'ai mêlé trois parties d'eau avec treize parties d'esprit-de-vin, & ainsi de suite, en mettant toujours une partie d'eau de plus & une partie d'esprit-de-vin de moins, jusqu'à ce que je fusse arrivé au mélange qui ne contenoit qu'une partie d'esprit-de-vin & quinze parties d'eau.

J'entends ici par *parties*, des volumes égaux, & non pas des poids égaux; & chacun de ces volumes a été mesuré par le moyen d'un chalumeau de verre renflé que je remplissois toujours également en le plongeant dans la liqueur autant qu'il étoit nécessaire pour la faire arriver à la partie du tube qui étoit marquée par un fil délié; de sorte que dans ces mesures je n'ai pas eu la plus petite erreur à craindre.

J'ai mis tous ces mélanges dans des bouteilles bien bouchées; pour empêcher l'évaporation, sur-tout celle de la partie spiritueuse; je les ai remuées fortement pour faciliter le mélange; après quoi je les ai laissé reposer pendant un temps plus que suffisant pour laisser dissiper le degré de chaleur que les deux liqueurs avoient acquis en se mêlant.

Je me suis ensuite assuré par le moyen d'un aréomètre, de la pesanteur spécifique de chacun de ces mélanges, ainsi que de celles de l'esprit-de-vin pur & de l'eau pure : l'aréomètre dont je fais usage, n'a point les défauts des pèse-liqueurs dont on se sert ordinairement ; c'est, comme à l'ordinaire, un aréomètre de verre, lesté de mercure, mais dont la tige, qui est très-menue, est surmontée d'un petit bassin propre à recevoir des poids, à peu-près dans le goût des pèse-liqueurs dont s'est servi M. Lavoisier pour éprouver la pesanteur spécifique des différentes espèces d'eau \*. Après m'être assuré avec exactitude du poids de mon aréomètre, je l'ai plongé dans chacune de mes liqueurs, ayant soin de le faire enfoncer toujours de la même quantité, en le chargeant d'autant de poids qu'il étoit nécessaire ; son centre de gravité est placé assez bas pour qu'on puisse le charger d'une quantité assez considérable sans qu'il fasse la bascule : on voit par-là que cet aréomètre mesure toujours des volumes égaux, quelle que soit la densité de la liqueur dans laquelle on le plonge ; & qu'il est susceptible de donner avec la plus grande précision, la pesanteur spécifique du volume de liqueur qu'il mesure ; car on sait que le poids de ce volume de liqueur est la somme du poids de l'aréomètre & des poids dont il est chargé : j'ai encore eu soin à chaque fois que j'ai retiré mon aréomètre d'une liqueur, de le bien essuyer avant de le plonger dans une autre, & de tenir sa surface bien nette, afin qu'il ne s'y attachât aucunes bulles d'air, qui auroient augmenté son volume ; moyennant que la tige de mon aréomètre est très-menue, l'enfoncement produit par  $\frac{1}{8}$  de grain, est très-sensible, & l'on ne peut pas se tromper de cette quantité.

Pour obtenir toute l'exactitude que je desirois, il y avoit encore une chose nécessaire ; c'étoit de faire prendre à toutes mes liqueurs la même température dans le moment où je les ai soumises à l'expérience : aussi n'y ai-je pas manqué ; le degré de chaleur que je leur ai donné, a été celui du lieu où j'opérois, & qui étoit marqué par 14 degrés au-dessus de la congélation du thermomètre de M. de Reaumur : c'est aussi ce même degré que

\* Cet instrument est connu sous le nom d'*Aréomètre de Farenheit*.



j'emploie dans toutes les épreuves que je fais pour former la Table des pesanteurs spécifiques des corps, à laquelle je travaille: j'ai choisi ce degré par préférence à tout autre, parce que c'en est un qu'il est aisé de se procurer en tout temps; dans les jours chauds, il est rare qu'on ne puisse pas l'avoir le matin ou le soir, & dans les jours froids on peut aisément échauffer son appartement à ce point-là.

Après avoir pris toutes ces précautions que j'ai crues nécessaires, j'ai déterminé avec la plus grande exactitude, la pesanteur spécifique de chacune de mes liqueurs; savoir, celle de l'eau pure, celle de l'esprit-de-vin pur, & celle de tous les mélanges que j'avois formés avec ces deux liqueurs: le poids du volume d'eau mesuré par mon aréomètre, s'est trouvé de  $820\frac{1}{8}$  grains, ou de 1 once 3 gros  $28\frac{3}{8}$  grains; le poids du même volume d'esprit-de-vin rectifié s'est trouvé de  $686\frac{1}{4}$  grains, ou de 1 once 1 gros  $38\frac{1}{4}$  grains; le poids du même volume de chacun des mélanges s'est toujours trouvé de plus en plus grand, à mesure que le mélange contenoit une plus grande quantité d'eau: cela devoit être ainsi, je m'y attendois bien; mais ce à quoi je ne m'attendois pas, c'est la manière dont se fait le progrès de cette augmentation de poids. Afin qu'on puisse en juger, je donne ici une Table qui contient le poids de chacun de ces volumes de liqueur; & entre chacun des termes, j'ai marqué la différence qu'il y a d'un poids à l'autre: toutes ces différences donnent la progression suivant laquelle se fait l'augmentation de densité.

Nous avons dit plus haut que le mélange de l'esprit-de-vin avec l'eau augmente de densité, à mesure qu'on l'affoiblit par une nouvelle addition d'eau, non-seulement en raison de l'excès de la densité de l'eau sur celle de l'esprit-de-vin, mais dans une raison plus grande: nous avons dit de plus que cet excès d'augmentation de densité venoit de ce que les deux liqueurs se pénétoient en se mêlant, puisqu'après le mélange, le volume est moindre qu'il ne l'étoit auparavant; maintenant, pour faire connoître quelle est la portion de cette augmentation de densité qui est causée par la pénétration, je joins ici une seconde Table qui contient 1.<sup>o</sup> le

poids réel que pèse chaque volume de liqueur mesuré par l'aréomètre; 2.<sup>o</sup> le poids qu'il devoit seulement peser relativement à la pesanteur spécifique de chacune des liqueurs, & dans le cas où il n'y auroit point de pénétration; 3.<sup>o</sup> la différence qu'il y a d'un de ces poids à l'autre, laquelle différence est la portion de l'augmentation de densité qui est causée par la pénétration.

I. *TABLE des Poids des volumes de liqueurs mesurés par l'Aréomètre, la température de ces liqueurs étant marquée par 14 degrés au-dessus de la congélation du Thermomètre de M. de Reaumur.*

EAU DISTILLÉE.	ESPRIT-DE-VIN.	P O I D S en grains.	D I F F É R.
0 parties. ....	16 parties. ....	pèsent 686 $\frac{6}{8}$	
1. ....	15. ....	699 $\frac{4}{8}$	12 $\frac{6}{8}$
2. ....	14. ....	711 $\frac{1}{8}$	12 $\frac{1}{8}$
3. ....	13. ....	723 $\frac{1}{8}$	11 $\frac{4}{8}$
4. ....	12. ....	734	10 $\frac{7}{8}$
5. ....	11. ....	744 $\frac{4}{8}$	10 $\frac{4}{8}$
6. ....	10. ....	754 $\frac{1}{8}$	10 $\frac{1}{8}$
7. ....	9. ....	764 $\frac{3}{8}$	9 $\frac{6}{8}$
8. ....	8. ....	773 $\frac{1}{8}$	9
9. ....	7. ....	780 $\frac{7}{8}$	7 $\frac{4}{8}$
10. ....	6. ....	787 $\frac{1}{8}$	6 $\frac{4}{8}$
11. ....	5. ....	793 $\frac{1}{8}$	6 $\frac{2}{8}$
12. ....	4. ....	798 $\frac{4}{8}$	4 $\frac{5}{8}$
13. ....	3. ....	803 $\frac{2}{8}$	4 $\frac{3}{8}$
14. ....	2. ....	808 $\frac{2}{8}$	5
15. ....	1. ....	813 $\frac{6}{8}$	5 $\frac{4}{8}$
16. ....	0. ....	820 $\frac{3}{8}$	6 $\frac{1}{8}$

II. TABLE de l'Augmentation de la densité du mélange de l'eau & de l'esprit-de-vin, causée par la pénétration des deux liqueurs.

EAU DISTILLÉE.	ESPRIT- DE-VIN.	P È S E N T en grains.	DEVROIENT ne pèser que	AUGMENTAT. de densité, causée par la pénétration.
0 parties. ....	16 parties. ....	686 $\frac{96}{128}$		
1. ....	15. ....	699 $\frac{64}{128}$	695 $\frac{23}{128}$	4 $\frac{51}{128}$
2. ....	14. ....	711 $\frac{80}{128}$	703 $\frac{58}{128}$	8 $\frac{22}{128}$
3. ....	13. ....	723 $\frac{16}{128}$	711 $\frac{803}{128}$	11 $\frac{41}{128}$
4. ....	12. ....	734	720 $\frac{20}{128}$	13 $\frac{108}{128}$
5. ....	11. ....	744 $\frac{64}{128}$	728 $\frac{65}{128}$	15 $\frac{127}{128}$
6. ....	10. ....	754 $\frac{80}{128}$	736 $\frac{110}{128}$	17 $\frac{98}{128}$
7. ....	9. ....	764 $\frac{48}{128}$	745 $\frac{27}{128}$	19 $\frac{21}{128}$
8. ....	8. ....	773 $\frac{48}{128}$	753 $\frac{72}{128}$	19 $\frac{104}{128}$
9. ....	7. ....	780 $\frac{112}{128}$	761 $\frac{117}{128}$	18 $\frac{223}{128}$
10. ....	6. ....	787 $\frac{48}{128}$	770 $\frac{34}{128}$	17 $\frac{14}{128}$
11. ....	5. ....	793 $\frac{80}{128}$	778 $\frac{79}{128}$	15 $\frac{1}{128}$
12. ....	4. ....	798 $\frac{64}{128}$	786 $\frac{124}{128}$	11 $\frac{68}{128}$
13. ....	3. ....	803 $\frac{32}{128}$	795 $\frac{41}{128}$	7 $\frac{119}{128}$
14. ....	2. ....	808 $\frac{32}{128}$	803 $\frac{86}{128}$	4 $\frac{74}{128}$
15. ....	1. ....	813 $\frac{96}{128}$	812 $\frac{3}{128}$	1 $\frac{93}{128}$
16. ....	0. ....	820 $\frac{48}{128}$		

Voyons maintenant ce qui résulte de ces expériences. Par la seule inspection de la première Table, on voit que l'esprit-de-vin augmente de densité, à mesure qu'on y mêle de l'eau de plus en plus, par des quantités qui vont toujours en diminuant, jusqu'à ce que le mélange soit composé de trois parties d'eau & d'une partie d'esprit-de-vin; ensuite, en continuant d'ajouter de l'eau, la densité augmente par des quantités, qui vont elles-mêmes en augmentant; mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est que ces quantités, dont la densité augmente, à mesure

mesure qu'on affoiblit l'esprit-de-vin, en y ajoutant de l'eau, & qui vont, comme je l'ai dit, toujours en diminuant, sont cependant toujours plus grandes que ne l'est l'excès de la densité de l'eau sur celle de l'esprit-de-vin, jusqu'à ce que le mélange soit composé de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin: après ce terme elles sont moindres que cet excès; car chaque volumé de mélange, mesuré par l'aréomètre, est composé de seize parties, soit d'eau, soit d'esprit-de-vin: or le volume d'eau, mesuré par l'aréomètre, pèse, comme nous l'avons dit,  $820 \frac{3}{8}$  grains, dont la seizième partie est  $51 \frac{35}{128}$  grains; de même le volume d'esprit-de-vin, mesuré par l'aréomètre, pèse  $686 \frac{3}{4}$  grains, dont la seizième partie est  $42 \frac{118}{128}$  grains; l'excès de  $51 \frac{35}{128}$  sur  $42 \frac{118}{128}$  est  $8 \frac{45}{128}$ . A chaque fois que l'on fait un mélange, qui tient une partie d'esprit-de-vin de moins & une partie d'eau de plus, la densité ne devrait donc augmenter que de  $8 \frac{45}{128}$  grains: cependant la moindre quantité dont cette densité augmente, jusqu'à ce que le mélange soit composé de parties égales d'eau & d'esprit de vin, est de 9 grains; elle va même quelquefois jusqu'à  $12 \frac{3}{4}$  grains; donc, jusqu'à ce terme, la quantité dont la densité augmente, est toujours plus grande que ne l'est l'excès de la densité de l'eau sur l'esprit-de-vin. Après ce terme, ces quantités sont toujours moindres que cet excès; car la plus grande ne va qu'à  $7 \frac{1}{2}$  grains. Tout cela prouve évidemment ce que nous avons dit plus haut, savoir, que l'eau & l'esprit-de-vin se pénètrent en se mêlant; mais cela prouve en même temps que cette pénétration n'a lieu que jusqu'à ce que le mélange soit composé de parties égales d'eau & d'esprit de vin, & non au-delà. Aussi la seconde Table fait-elle voir que l'augmentation de densité, qui est causée par cette pénétration, est alors la plus grande possible; car elle est de  $19 \frac{194}{128}$  grains; dans tous les autres mélanges elle est moindre. Pour m'assurer davantage de ce fait, qui m'a paru intéressant, j'ai formé un nouveau mélange, ou, pour mieux dire, au mélange déjà fait, & qui étoit composé de huit parties d'eau & de huit parties d'esprit-de-vin, j'ai ajouté une nouvelle partie d'eau; cela a donné un mélange composé de neuf parties d'eau & de huit parties d'esprit-de-vin. J'ai pesé ce

*Mém.* 1769.

. K k k

mélange, pour savoir si l'augmentation de densité, qui naît de la pénétration, seroit plus grande, ou plus petite, ou égale à celle qui se trouve dans le mélange de parties égales. Je l'ai trouvée plus petite : le volume de ce mélange, mesuré par l'aréomètre, devoit ne peser que  $757 \frac{47}{68}$  grains, dans le cas où il n'y auroit point du tout de pénétration ; il s'est trouvé peser  $777 \frac{1}{8}$  grains ; l'augmentation de densité, causée par la pénétration, n'a donc été dans ce cas-là que de  $19 \frac{56}{128}$  grains, &c. par conséquent moindre que celle du mélange de parties égales. Donc nous avons raison de dire que la pénétration n'a point lieu au-delà du terme d'égalité des deux liqueurs.

Cependant, suivant M. de Reaumur, cette pénétration a lieu au-delà de ce terme ; puisque, selon lui, la diminution du volume, la plus grande possible, se trouve dans un mélange composé de deux parties d'eau &c. d'une partie d'esprit-de-vin. Cela est si opposé à ce que mes expériences m'ont appris, que j'ai voulu voir par moi-même ce qui en étoit. J'ai donc répété les expériences de M. de Reaumur. Pour cela j'ai fait plusieurs mélanges d'esprit-de-vin &c. d'eau, dans différentes proportions, &c. j'ai toujours remarqué que la plus grande diminution du volume s'est trouvée dans le mélange de parties égales. Mais on demandera, pourquoi donc M. de Reaumur a-t-il trouvé cette plus grande diminution du volume dans le mélange composé de deux parties d'eau &c. d'une partie d'esprit-de-vin ? je crois qu'en voici la raison. M. de Reaumur n'a point fait ses mélanges séparément ; à un mélange déjà fait, il a ajouté de l'eau de plus en plus, c'est-là ce qui l'a induit en erreur ; car ayant mêlé cent mesures d'eau avec cent mesures d'esprit-de-vin, il a trouvé que le volume étoit diminué de quatre mesures ; à ce mélange il a ajouté successivement cent autres mesures d'eau, &c. le volume s'est encore trouvé diminué d'environ une mesure. Mais il faut remarquer que les cent premières mesures d'eau, en se mêlant avec les cent mesures d'esprit-de-vin, ont fait acquérir au mélange un certain degré de chaleur, qui a empêché que la diminution du volume ne fût aussi grande qu'elle devoit l'être ; & M. de Reaumur, avant d'ajouter ces cent dernières mesures d'eau, n'a probablement pas laissé assez refroidir le mélange ; de sorte

que les cent dernières mesures d'eau ajoutées ont achevé de le refroidir; ce qui a fait un peu diminuer le volume. Il est donc probable que cette dernière diminution du volume a été causée par le refroidissement, & non pas par la pénétration des liqueurs. Au reste, il paroît que M. de Reaumur n'a parlé de cela que par occasion; aussi ne l'a-t-il déterminé qu'en gros; mais si l'on veut savoir au juste quelle est la diminution du volume en pareil cas, il faut 1.<sup>o</sup> connoître le degré de température des deux liqueurs; 2.<sup>o</sup> faire en sorte qu'elles aient toutes deux le même; 3.<sup>o</sup> leur donner le temps de perdre le degré de chaleur qu'elles ont acquis en se mêlant; 4.<sup>o</sup> ne mesurer la diminution du volume que quand elles sont revenues au degré de température qu'elles avoient avant l'expérience. Quoi qu'il en soit, il est sûr que la plus grande diminution du volume se trouve dans le mélange composé de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin; c'est ce que l'expérience m'a toujours fait voir.

Voyons maintenant quel est le rapport de l'augmentation de densité, qui vient de la pénétration, avec le poids des liqueurs qui composent le mélange. Dans le mélange de huit parties d'eau & de huit parties d'esprit-de-vin, qui est celui dans lequel se trouve la plus grande augmentation de densité, le poids des huit parties d'eau est 410 grains  $\frac{24}{128}$ ; l'augmentation de densité qui naît de la pénétration, est de 19 grains  $\frac{104}{128}$ : cette plus grande augmentation de densité est donc égale à  $\frac{1}{20}$  & environ  $\frac{2}{3}$ , ou plus simplement à  $\frac{3}{62}$  du poids de l'eau. D'une autre part, dans ce mélange, le poids des huit parties d'esprit-de-vin est 343 grains  $\frac{48}{128}$ ; la plus grande augmentation de densité causée par la pénétration, est donc égale à  $\frac{1}{17}$  & environ  $\frac{1}{3}$ , ou plus simplement à  $\frac{3}{52}$  du poids de l'esprit-de-vin. M. de Reaumur ne l'a trouvée égale qu'à environ  $\frac{1}{20}$  ou  $\frac{3}{60}$ : c'est effectivement celle qui se trouve dans un mélange composé de deux parties d'eau & d'une partie d'esprit-de-vin; mais, comme nous venons de le dire, c'est à tort que M. de Reaumur l'a regardée comme la plus grande possible.

Jusqu'ici nous voyons bien clairement que, dans le mélange

K k k ij

de l'eau & de l'esprit-de-vin, il y a une pénétration réelle & une augmentation de densité qui naît de cette pénétration ; mais cette augmentation de densité est-elle dûe uniquement à l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin ? ou bien est-elle causée seulement par l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau ? ou bien enfin est-elle dûe à l'introduction mutuelle des particules d'une liqueur dans les pores de l'autre ? c'est ce que nous allons examiner. Il me paroît, par mes expériences, qu'elle est dûe en partie à l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, & en partie à l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau ; mais que la première cause y contribue plus que la seconde : cela s'accorde assez bien avec les idées que nous avons des porosités de l'eau & de l'esprit-de-vin.

Je dis 1.<sup>o</sup> que cette augmentation de densité, est dûe en partie à l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, & en partie à celle des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau ; en voici la preuve. La plus grande augmentation de densité causée par la pénétration, a été, comme nous l'avons dit, d'environ 20 grains sur huit parties d'esprit-de-vin mêlées à huit parties d'eau : si cette augmentation de densité n'étoit dûe qu'à l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, une partie d'esprit-de-vin mêlée à quinze parties d'eau, devoit recevoir une augmentation de densité de 2 grains  $\frac{1}{2}$ , puisque huit parties en reçoivent une augmentation de 20 grains ; car il y auroit alors plus d'eau qu'il n'en faudroit pour remplir ses pores : cependant ce mélange ne reçoit une augmentation de densité que d'environ 1 grain  $\frac{3}{4}$ , comme on le peut voir dans la seconde Table ; ce qui vient sans doute de ce qu'il y a trop peu d'esprit-de-vin pour fournir assez de particules de ce fluide propres à s'insinuer dans les pores de l'eau ; l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, n'est donc pas la seule cause du phénomène ; d'un autre côté, si cette augmentation de densité n'étoit dûe qu'à l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau, une partie d'eau mêlée à quinze parties d'esprit-de-vin, ne devoit

recevoir une augmentation de densité que de 2 grains  $\frac{1}{2}$ , puisque huit parties n'en reçoivent une augmentation que de 20 grains; cependant ce mélange en reçoit une augmentation de près de 4 grains  $\frac{1}{2}$ , comme on peut encore le voir dans la seconde Table; ce qui vient sans doute de ce que l'eau s'insinue elle-même dans les pores de l'esprit-de-vin qui se trouve en grande quantité dans ce mélange: l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau, n'est donc pas non plus la seule cause du phénomène; donc ce phénomène est produit par la pénétration mutuelle des deux liqueurs.

On voit déjà la vérité de ce que nous avons dit en second lieu, savoir, que l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin contribue pour une plus grande part à l'augmentation de densité qui naît de la pénétration, que ne le fait l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau, puisqu'en mêlant une partie d'eau à quinze parties d'esprit-de-vin, la densité a été augmentée de 4 grains  $\frac{1}{128}$  de plus qu'elle ne devoit l'être indépendamment de la pénétration, tandis qu'en mêlant une partie d'esprit-de-vin à quinze parties d'eau, la densité n'a été augmentée que de 1 grain  $\frac{9}{128}$  de plus qu'elle ne devoit l'être; il se trouve donc dans l'eau plus de particules capables de pénétrer l'esprit-de-vin, qu'il ne se trouve dans l'esprit-de-vin de particules capables de pénétrer l'eau: donc l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, contribue davantage à l'augmentation de densité qui naît de la pénétration, que ne le fait l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau; & il paroît par les résultats de nos expériences, que la première cause contribue au phénomène pour environ  $\frac{2}{3}$ , tandis que la seconde cause n'y contribue que pour environ  $\frac{1}{3}$ .

Ces faits prouvent évidemment que les particules de l'eau ne se ressemblent pas toutes, comme le prétendent quelques Physiciens; que l'eau n'est pas composée de parties tout-à-fait homogènes; que quelques-unes de ces parties diffèrent des autres, au moins en grandeur; car si toutes les parties de l'eau étoient parfaitement semblables entr'elles, elles seroient toutes également capables de se loger dans les pores de l'esprit-de-vin propres à



les recevoir, & l'augmentation de densité qui naît de la pénétration; seroit aussi grande qu'elle peut l'être, sitôt qu'on mêleroit à l'esprit-de-vin une portion d'eau suffisante pour remplir les pores: or, il n'en arrive pas ainsi; car cette augmentation de densité n'est la plus grande possible que dans un mélange composé de huit parties d'eau & de huit parties d'esprit-de-vin, c'est-à-dire, dans un mélange composé de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin; & elle s'est trouvée de près de 20 grains sur une masse de ce mélange, qui pesoit 773 grains  $\frac{1}{3}$ . Cependant une de ces portions d'eau seroit plus que suffisante pour produire toute cette augmentation de densité, si les particules étoient toutes également propres à pénétrer l'esprit-de-vin, puisque cette seule portion pèse plus de 51 grains: or, une seule de ces portions d'eau, mêlée à 15 portions d'esprit-de-vin, n'en a augmenté la densité que d'environ 4 grains  $\frac{1}{2}$  de plus qu'elle ne devoit l'être, indépendamment de la pénétration, encore y a-t-il une portion de ces 4 grains  $\frac{1}{2}$  d'augmentation qui est dûe à la pénétration des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau; donc il ne s'est trouvé dans cette portion d'eau qu'un petit nombre de particules capables de se loger dans les pores de l'esprit-de-vin, dont la plupart sont demeurés vides ou n'ont pu se remplir davantage que par l'addition de nouvelles portions d'eau: donc toutes les particules de l'eau ne se ressemblent pas parfaitement; on en peut dire, à plus forte raison, autant de l'esprit-de-vin.

Cette opinion est diamétralement opposée au sentiment de ceux qui, regardant l'eau comme un élément, jugent en conséquence, que toutes les parties sont homogènes: de même qu'eux, je regarderai, s'ils le veulent, l'eau comme un élément; mais je ne conviendrai pas de cette homogénéité que je ne crois pas essentielle à ce que nous appelons *élément*. La matière du feu n'est-elle pas regardée comme un élément? mais si cette matière est la même que celle de la lumière, comme on en convient presque universellement aujourd'hui, Newton n'a-t-il pas prouvé avec la dernière évidence, que ce fluide qui répand la clarté, n'est point homogène? l'homogénéité n'est donc pas essentielle à ce que nous appelons *élément*. L'air lui-même est mis par presque tous les

Physiciens, au nombre des élémens; cependant M. de Mairan, voulant expliquer comment deux tons différens pouvoient subsister ensemble dans le même air, supposa, avec une vraisemblance avouée de tous les Physiciens, que les molécules de l'air différoient entr'elles en grandeur, en degré de tension, de ressort, &c. ne pouvons-nous pas supposer la même chose à l'égard de l'eau, tant qu'il n'y aura pas de faits qui prouvent le contraire? mais outre ce droit qui nous est commun avec tout le monde, les faits que je viens de rapporter, prouvent évidemment le défaut de cette homogénéité dans l'eau, & en conséquence, rendent certain ce qui n'étoit auparavant que vraisemblable.

Toutes les épreuves que j'ai faites, & que je viens de rapporter, sur tous ces différens mélanges d'esprit-de-vin & d'eau, m'ont fourni un moyen sûr de connoître exactement les qualités & les degrés de force des différentes espèces d'esprit-de-vin & d'eau-de-vie; cela peut avoir son utilité. Il y a un grand nombre de circonstances dans lesquelles il est important au Physicien de connoître le degré de force de l'esprit-de-vin qu'il emploie dans ses expériences: cela peut être utile au commerce, pour connoître les différentes qualités des esprits-de-vin & des eaux-de-vie; enfin cela peut servir dans les cas de contestations entre le Fermier & le Négociant, à les juger avec équité.

Nous avons vu dans ce Mémoire, que la densité des différentes espèces d'esprit-de-vin, ainsi que celle des différentes espèces d'eau-de-vie, n'est pas proportionnelle à la quantité de flegme qu'elles contiennent. Le pèse-liqueur, tel que celui dont on s'est servi jusqu'à présent, ne peut donc pas déterminer leur degré de force; car, outre le défaut qu'il a (& qui est essentiel), savoir, celui de ne pas opérer sur des volumes égaux, ses degrés d'enfoncement, qui sont proportionnels à la densité de la liqueur, ne le sont pas au degré de force des eaux-de-vie, puisque ce degré de force n'est pas lui-même proportionnel à cette densité. Je m'explique: si à une eau-de-vie dans laquelle le pèse-liqueur s'enfonce, par exemple, jusqu'au 40.<sup>e</sup> degré, l'on compare deux autres eaux-de-vie, l'une plus forte & l'autre plus foible que l'eau-de-vie de comparaison; je suppose que dans la plus forte

## 448 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

le pèse-liqueur s'enfonce jusqu'au 45.<sup>e</sup> degré, & dans la plus foible jusqu'au 35.<sup>e</sup> degré seulement : je dis que la force de la première n'est pas autant au-dessus de celle de l'eau-de-vie de comparaison, que la force de la seconde est au-dessous, quoique le pèse-liqueur marque autant de degrés en-dessus pour l'une, qu'il en marque en-dessous pour l'autre ; de sorte que le pèse-liqueur fera juger la plus forte, plus forte qu'elle ne l'est réellement, & la plus foible, plus foible qu'elle ne l'est aussi.

Pour éviter ces erreurs, je fais usage des connoissances que m'ont fournies mes expériences ; elles m'ont appris suivant quelle progression la densité des eaux-de-vie augmente à mesure qu'elles contiennent plus de flegme. J'appellerai désormais *eau-de-vie*, tout esprit-de-vin affoibli par de l'eau, quelle que soit la quantité d'eau qu'il contienne. Dans ce sens, je puis regarder comme des eaux-de-vie de différens degrés de force, les différens mélanges que j'ai faits d'esprit-de-vin & d'eau, & qui m'ont servi à mes épreuves. Car l'huile de vin que contient l'eau-de-vie, y est en trop petite quantité \*, pour altérer la densité d'une manière sensible.

En formant moi-même ces mélanges, j'ai connu exactement la quantité d'esprit & de flegme que contenoit chacune de ces eaux-de-vie. En les éprouvant avec mon pèse-liqueur, qui, comme je l'ai dit, mesure toujours des volumes égaux, j'ai connu leur densité ou pesanteur spécifique : c'est-là ce qui forme la première Table que j'ai donnée ci-dessus. J'ai donc connu exactement par-là le rapport qu'il y a entre leur pesanteur spécifique & leur degré de force ; les mêmes expériences m'ont encore fait connoître quel est le rapport qui se trouve entre les densités des unes & celles des autres, & elles peuvent m'apprendre aussi quel rapport il y a entre les pesanteurs spécifiques de ces différentes eaux-de-vie & celle de toute autre liqueur à laquelle je voudrois les comparer. C'est d'après ces connoissances que j'ai formé la Table suivante, qui contient les pesanteurs spécifiques de ces différentes eaux-de-vie, comparées à celle de l'eau de Seine,

\* L'eau-de-vie contient environ  $\frac{1}{12000}$  d'huile de vin.

Entre

Entre chacun des termes, j'ai mis la différence qu'il y a de l'un à l'autre. On verra bientôt à quoi peuvent servir ces différences.

J'ai choisi l'eau de la Seine pour la liqueur de comparaison ; parce que c'est celle qui est le plus à la portée de tous ceux auxquels je desirer rendre ce moyen utile.

III. TABLE des pesanteurs spécifiques des différentes Eaux-de-vie, fortes & foibles, comparées à celle de l'Eau de Seine, la Température de ces liqueurs étant marquée par 14 degrés au-dessus de la congélation du Thermomètre de M. de Réaumur.

ESPRIT.	EAU OU FLEGME.	PESAN- TEURS spécifiques.	DIFFÉR.
Esprit-de-vin bien rectifié..	.....	837	
Eau-de-vie tenant 15 parties.	1 partie. . . . . ou $\frac{1}{10}$ d'eau.	852 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$
14....	2..... $\frac{1}{8}$ .....	867 $\frac{1}{3}$	14 $\frac{5}{6}$
13....	3..... $\frac{3}{16}$ .....	881 $\frac{1}{3}$	14
12....	4..... $\frac{1}{4}$ .....	894 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{6}$
11....	5..... $\frac{5}{16}$ .....	907 $\frac{1}{3}$	12 $\frac{1}{6}$
10....	6..... $\frac{3}{8}$ .....	919 $\frac{2}{3}$	12 $\frac{1}{3}$
9....	7..... $\frac{7}{16}$ .....	931 $\frac{2}{3}$	12
8....	8..... $\frac{1}{2}$ .....	942 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{5}{6}$
7....	9..... $\frac{9}{16}$ .....	951 $\frac{2}{3}$	9 $\frac{1}{6}$
6....	10..... $\frac{5}{8}$ .....	959 $\frac{2}{3}$	8
5....	11..... $\frac{11}{16}$ .....	967 $\frac{1}{4}$	7 $\frac{7}{12}$
4....	12..... $\frac{3}{4}$ .....	973 $\frac{1}{6}$	5 $\frac{11}{12}$
3....	13..... $\frac{13}{16}$ .....	979	5 $\frac{5}{6}$
2....	14..... $\frac{7}{8}$ .....	985	6
1....	15..... $\frac{15}{16}$ .....	991 $\frac{3}{4}$	6 $\frac{3}{4}$
Eau de Seine filtrée au sable.....	.....	1000	8 $\frac{1}{4}$

Pour connoître le degré de force des eaux-de-vie par le moyen de la Table précédente, il faut 1.° avoir un pèse-liqueur, dont la tige soit surmontée d'un petit bassin propre à recevoir des poids ;

Mém. 1769.

L II

le volume que doit avoir ce pèse-liqueur est indifférent, quel qu'il soit, il donnera toujours les mêmes rapports entre les pesanteurs spécifiques des liqueurs qu'on éprouvera par son moyen; il vaut cependant mieux qu'il soit plutôt grand que petit, les erreurs, s'il s'en trouvoit, seroient moindres.

2.<sup>o</sup> Connoître exactement le poids de ce pèse-liqueur, & même le marquer dessus, afin de ne pas l'oublier.

3.<sup>o</sup> Avoir de petits poids très-exacts, jusqu'à des huitièmes de grain.

4.<sup>o</sup> Avoir de l'eau de Seine filtrée au sable, dans une fontaine de grès ou dans quelqu'autre vase non-soluble à l'eau, afin qu'aucune substance étrangère ne change la pesanteur spécifique.

5.<sup>o</sup> Prendre une pinte de l'esprit-de-vin ou de l'eau-de-vie qu'on veut éprouver, & la laisser reposer pendant quelque temps à côté de l'eau à laquelle on la comparera, afin que les deux liqueurs prennent la même température; & connoître cette température par le moyen d'un thermomètre.

6.<sup>o</sup> Plonger le pèse-liqueur dans l'eau, & y ajouter les poids nécessaires pour le faire enfoncer jusqu'à la marque qui doit être sur la tige; additionner ces poids avec le poids du pèse-liqueur, la somme sera le poids du volume d'eau mesuré par l'instrument, qu'il faut écrire pour ne pas l'oublier.

7.<sup>o</sup> Après avoir bien essuyé le pèse-liqueur, faire la même opération sur l'eau-de-vie; ce qui donnera le poids du même volume d'eau-de-vie mesuré par l'instrument, qu'il faut écrire aussi.

Ensuite on fera cette proportion, & l'on dira, le poids du volume d'eau mesuré par le pèse-liqueur, est au poids du volume d'eau-de-vie aussi mesuré par le pèse-liqueur, comme 1000 est à un quatrième terme, qui donnera le rapport de l'un à l'autre; ce rapport une fois connu, on connoitra le degré de force de l'eau-de-vie par le moyen de la Table précédente.

Par exemple, je suppose que le volume d'eau mesuré par le pèse-liqueur, pèse 820 grains  $\frac{1}{2}$ , & que le même volume d'eau-de-vie aussi mesuré par le pèse-liqueur, pèse 773 grains  $\frac{3}{8}$ , on dira, 820  $\frac{1}{2}$  est à 773  $\frac{3}{8}$  comme 1000 est à un quatrième

terme qu'on trouvera être  $942\frac{1}{2}$ ; on cherchera ce terme dans la Table, & l'on trouvera qu'il répond à une eau-de-vie qui contient huit parties d'esprit & huit parties de flegme, ou, ce qui est la même chose, moitié esprit & moitié flegme.

Il arrivera le plus souvent que le quatrième terme de la proportion ne se trouvera pas dans la Table; dans ce cas-là, il faudra chercher quels sont les deux termes voisins entre lesquels il faudroit le placer; ce sont les deux termes contigus, dont l'un est plus petit & l'autre plus grand que le quatrième terme trouvé; les différences qui se trouveront entre ces trois termes, détermineront le degré de force de l'eau-de-vie éprouvée. Je suppose, par exemple, que le volume d'eau mesuré par le pèse-liqueur, pèse, comme nous l'avons dit ci-dessus, 820 grains  $\frac{1}{2}$ , & que le même volume d'eau-de-vie aussi mesuré par le pèse-liqueur, pèse 777 grains  $\frac{1}{4}$ ; on dira  $820\frac{1}{2}$  est à  $777\frac{1}{4}$  comme 1000 est à un quatrième terme qu'on trouvera être  $947\frac{1}{4}$ ; ce terme ne se trouve point dans la Table, mais on voit qu'il devoit être placé entre ces deux termes  $942\frac{1}{2}$  &  $951\frac{1}{3}$ , dont le premier répond à une eau-de-vie qui contient huit parties d'esprit & huit parties de flegme, & le second répond à une eau-de-vie qui contient sept parties d'esprit & 9 parties de flegme; d'où il suit que l'eau-de-vie à laquelle répond le terme trouvé  $947\frac{1}{4}$ , contient moins de huit seizièmes d'esprit, mais plus de sept seizièmes; & comme le terme trouvé  $947\frac{1}{4}$ , diffère un peu plus du terme supérieur  $942\frac{1}{2}$  que du terme inférieur  $951\frac{1}{3}$ , savoir, de  $4\frac{3}{4}$  du premier, tandis qu'il ne diffère que de  $4\frac{5}{12}$  du second, & que d'un autre côté, l'on voit par la Table, que les augmentations de densité qui sont marquées par les différences placées entre chaque terme, vont en diminuant, à mesure que les eaux-de-vie deviennent plus foibles, on peut juger sans erreur sensible, que la force de l'eau-de-vie éprouvée tient le milieu entre celles des deux eaux-de-vie auxquelles répondent les deux termes  $942\frac{1}{2}$  &  $951\frac{1}{3}$ , & qu'elle contient par conséquent, quinze trente-deuxièmes d'esprit & dix-sept trente-deuxièmes de flegme, & ainsi de tous les autres cas; & si l'on sait combien la pièce d'eau-de-vie que l'on vient d'éprouver, tient de pintes, il sera aisé de déterminer

le nombre des pintes d'esprit qu'elle contient : ce nombre est les quinze trente-deuxièmes de la totalité ; par exemple, si la pièce étoit de 480 pintes, elle contiendrait dans ce cas-là 225 pintes d'esprit.

J'ai dit ci-dessus qu'il falloit laisser reposer pendant quelque temps, l'eau-de-vie qu'on veut éprouver, à côté de l'eau à laquelle on doit la comparer, afin que les deux liqueurs prennent la même température ; c'est une condition absolument essentielle, sans laquelle on ne peut pas avoir le rapport de leur densité : il seroit même mieux que ces liqueurs eussent la même température que celle avec laquelle j'ai fait mes épreuves, qui étoit marquée par 14 degrés au-dessus du terme de la congélation du thermomètre de M. de Reaumur ; la raison de cela est que l'eau & l'eau-de-vie se condensent ou se dilatent toutes deux par le froid ou le chaud, mais non pas proportionnellement : il faut cependant avouer que quelques degrés de plus ou de moins ne causeront pas une erreur bien grande ; car j'ai répété les mêmes épreuves à 3 degrés de moins, c'est-à-dire, à 11 degrés ; l'erreur que cela a produit, a été d'environ  $\frac{1}{128}$  ce qui n'est assurément pas une grande erreur en pareil cas : malgré cela il vaut mieux faire toutes ces épreuves à un degré de température qui ne soit pas fort éloigné de 14 ; j'ai fait voir ci-dessus qu'il est aisé de se procurer ce degré dans tous les temps.



## M A N I È R E

*De sommer les Suites dont les termes sont des puissances semblables de Sinus ou Cosinus d'arcs qui forment une progression arithmétique.*

Par M. l'Abbé BOSSUT.

**M.** EULER a déjà donné dans son Ouvrage intitulé *Introductio ad Analysim infinitorum*, la manière de trouver la somme d'une suite de sinus ou cosinus d'arcs qui croissent en progression arithmétique. Il rapporte ces sortes de suites aux suites récurrentes; cette méthode est très-savante & très-ingénieuse. En voici une autre qui a l'avantage d'être extrêmement simple, & qui s'applique avec une égale facilité à toutes les puissances des sinus ou cosinus des arcs proposés. 11 Février 1769.

(1.) Commençons par nous rappeler que si  $z$  &  $u$  représentent deux arcs décrits avec le même rayon 1, on a ces théorèmes,

$$\text{I. } \sin. (z + u) = \sin. z \cos. u + \cos. z \sin. u.$$

$$\text{II. } \sin. (z - u) = \sin. z \cos. u - \cos. z \sin. u.$$

$$\text{III. } \cos. (z + u) = \cos. z \cos. u - \sin. z \sin. u.$$

$$\text{IV. } \cos. (z - u) = \cos. z \cos. u + \sin. z \sin. u.$$

$$\text{V. } 2 \sin. z \sin. u = \cos. (z - u) - \cos. (z + u).$$

$$\text{VI. } 2 \sin. z \cos. u = \sin. (z - u) + \sin. (z + u).$$

$$\text{VII. } 2 \cos. z \cos. u = \cos. (z - u) + \cos. (z + u).$$

qu'il est inutile de démontrer ici, parce qu'ils sont très-familiers aux Géomètres. Je me contente d'observer, pour la suite, que

$$+ \sin. - z = - \sin. z$$



## PROBLÈME I.

(2.) *Sommer la suite finie*  $S = \sin. q + \sin. 2q + \sin. 3q + \sin. 4q + \sin. 5q + \dots + \sin. nq$ .

## SOLUTION.

Supposons constamment  $u = q$ , & faisons successivement  $z = q$ ,  $z = 2q$ ,  $z = 3q$ ,  $z = 4q$ , .....  $z = nq$ . On aura (*théor. V*),

$$\begin{array}{l|l} 2 \sin. q = \frac{1 - \cos. 2q}{\sin. q} & 2 \sin. q = \frac{\cos. 4q - \cos. 6q}{\sin. 5q} \\ 2 \sin. q = \frac{\cos. q - \cos. 3q}{\sin. 2q} & 2 \sin. q = \frac{\cos. 5q - \cos. 7q}{\sin. 6q} \\ 2 \sin. q = \frac{\cos. 2q - \cos. 4q}{\sin. 3q} & \dots\dots\dots \\ 2 \sin. q = \frac{\cos. 3q - \cos. 5q}{\sin. 4q} & 2 \sin. q = \frac{\cos. (n-1)q - \cos. (n+1)q}{\sin. nq} \end{array}$$

D'où l'on tire évidemment cette suite de rapports égaux ;  
 $1 - \cos. 2q : \sin. q :: 1 - \cos. 2q : \sin. q ::$   
 $\cos. q - \cos. 3q : \sin. 2q :: \cos. 2q - \cos. 4q :$   
 $\sin. 3q :: \cos. 3q - \cos. 5q : \sin. 4q :: \cos. 4q -$   
 $\cos. 6q : \sin. 5q :: \cos. 5q - \cos. 7q : \sin. 6q ::$   
 $\dots\dots\dots :: \cos. (n-1)q - \cos. (n+1)q :$   
 $\sin. nq$ . Donc, par la théorie des proportions,  $1 - \cos. 2q$   
 $\sin. q :: 1 - \cos. 2q + \cos. q - \cos. 3q +$   
 $\cos. 2q - \cos. 4q + \cos. 3q - \cos. 5q + \cos. 4q$   
 $- \cos. 6q + \cos. 5q - \cos. 7q + \dots\dots\dots$   
 $+ \cos. (n-1)q - \cos. (n+1)q : \sin. q +$   
 $\sin. 2q + \sin. 3q + \sin. 4q + \sin. 5q + \sin. 6q$   
 $+ \dots + \sin. nq$ , proportion qui donne, en effaçant les

termes qui se détruisent,  $S = \frac{\sin. q [1 + \cos. q - \cos. nq - \cos. (n+1)q]}{1 - \cos. 2q}$ .

C. Q. F. T.

## PROBLEME II.

(3.) Sommier la suite  $S = \cos. q + \cos. 2q + \cos. 3q + \cos. 4q + \dots + \cos. nq$ !

## SOLUTION.

Supposons constamment  $z = q$ , & faisons successivement  $u = q$ ,  $u = 2q$ ,  $u = 3q$ ,  $u = 4q$ , .....  $u = nq$ . On aura (théor. VI),

$$\begin{array}{l} 2 \sin. q = \frac{\sin. 2q}{\cos. q}, \\ 2 \sin. q = \frac{\sin. 3q - \sin. q}{\cos. 2q}, \\ 2 \sin. q = \frac{\sin. 4q - \sin. 2q}{\cos. 3q}, \\ 2 \sin. q = \frac{\sin. 5q - \sin. 3q}{\cos. 4q}, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \sin. q = \frac{\sin. 6q - \sin. 4q}{\cos. 5q}, \\ 2 \sin. q = \frac{\sin. 7q - \sin. 5q}{\cos. 6q}, \\ \dots\dots\dots \\ 2 \sin. q = \frac{\sin. (n+1)q - \sin. (n-1)q}{\cos. nq}, \end{array} \right.$$

D'où l'on tire,  $\sin. 2q : \cos. q :: \sin. 2q : \cos. q ::$   
 $\sin. 3q - \sin. q : \cos. 2q :: \sin. 4q - \sin. 2q :$   
 $\cos. 3q :: \sin. 5q - \sin. 3q : \cos. 4q :: \sin. 6q -$   
 $\sin. 4q : \cos. 5q :: \sin. 7q - \sin. 5q : \cos. 6q :: \dots$   
 $\dots\dots\dots :: \sin. (n+1)q - \sin. (n-1)q :$   
 $\cos. nq$ . Donc, par la théorie des proportions,  $\sin. 2q : \cos. q ::$   
 $\sin. 2q + \sin. 3q - \sin. q + \sin. 4q - \sin. 2q +$   
 $\sin. 5q - \sin. 3q + \sin. 6q - \sin. 4q + \sin. 7q -$   
 $\sin. 5q :: \dots\dots + \sin. (n+1)q - \sin. (n-1)q :$   
 $\cos. q + \cos. 2q + \cos. 3q + \cos. 4q + \cos. 5q$   
 $+ \cos. 6q + \dots\dots + \cos. nq$ . Ainsi, en effaçant les

termes qui se détruisent,  $S = \frac{\cos. q [\sin. nq + \sin. (n+1)q - \sin. q]}{\sin. 2q}$ .

C. Q. F. T.

### PROBLÈME III.

(4<sup>e</sup>) Sommer la suite  $S = \sin. q^2 + \sin. 2q^2 + \sin. 3q^2 + \sin. 4q^2 + \sin. 5q^2 + \dots + \sin. nq^2$ .

### SOLUTION.

$$\text{On a (théor. V.) } \sin. q^2 = \frac{1 - \cos. 2q}{2},$$

$$\sin. 2q^2 = \frac{1 - \cos. 4q}{2},$$

$$\sin. 3q^2 = \frac{1 - \cos. 6q}{2},$$

$$\sin. 4q^2 = \frac{1 - \cos. 8q}{2},$$

$$\sin. 5q^2 = \frac{1 - \cos. 10q}{2},$$

.....

$$\sin. nq^2 = \frac{1 - \cos. 2nq}{2}.$$

$$\text{Donc } S = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1}{2}.$$

$$= \frac{1}{2} (\cos. 2q + \cos. 4q + \cos. 6q + \cos. 8q + \cos. 10q + \dots + \cos. 2nq).$$

$$\text{Or, en faisant } 2q = x, \text{ on a } \cos. 2q + \cos. 4q + \cos. 6q + \cos. 8q + \cos. 10q + \dots + \cos. 2nq \\ = \cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \cos. 5x + \dots + \cos. nx =$$

$$(\text{problème précédent}) \frac{\cos. x [\sin. nx + \sin. (n+1)x - \sin. x]}{\sin. 2x}$$

$$= \frac{\cos. 2q [\sin. 2nq + \sin. (n+1)2q - \sin. 2q]}{\sin. 4q}.$$

Ainsi;

Ainsi ;

$$S = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2q \left( \frac{\sin. 2nq + \sin. (n+1)2q - \sin. 2q}{\sin. 4q} \right).$$

C. Q. F. T.

#### PROBLEME IV.

(5.) Sommer la suite  $S = \cos. q^2 + \cos. 2q^2 + \cos. 3q^2 + \cos. 4q^2 + \dots + \cos. nq^2$ .

#### SOLUTION.

$$\text{On a (théor. VII), } \cos. q^2 = \frac{1 + \cos. 2q^2}{2},$$

$$\cos. 2q^2 = \frac{1 + \cos. 4q^2}{2},$$

$$\cos. 3q^2 = \frac{1 + \cos. 6q^2}{2},$$

$$\cos. 4q^2 = \frac{1 + \cos. 8q^2}{2},$$

$$\cos. nq^2 = \frac{1 + \cos. 2nq^2}{2}.$$

Ainsi, en achevant le calcul comme dans l'article précédent, on

$$\text{trouvera } S = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2q \left( \frac{\sin. 2nq + \sin. (n+1)2q - \sin. 2q}{\sin. 4q} \right).$$

C. Q. F. T.

#### PROBLEME V.

(6.) Sommer la suite  $S = \sin. q^3 + \sin. 2q^3 + \sin. 3q^3 + \sin. 4q^3 + \dots + \sin. nq^3$ .

#### SOLUTION.

On trouve, par la combinaison des théorèmes V & VI,

$$\begin{aligned} \sin. q^3 &= \sin. q \sin. q^2 = \frac{\sin. q}{2} - \frac{\sin. q \cos. 2q^2}{2} = \frac{\sin. q}{2} \\ &- \left( \frac{\sin. 3q - \sin. q}{4} \right) = \frac{3 \sin. q}{4} - \frac{\sin. 3q}{4}, \end{aligned}$$

Mém. 1769.

M m m

$$\sin. 2q^3 = \frac{3 \sin. 2q}{4} - \frac{\sin. 6q}{4},$$

$$\sin. 3q^3 = \frac{3 \sin. 3q}{4} - \frac{\sin. 9q}{4},$$

$$\sin. 4q^3 = \frac{3 \sin. 4q}{4} - \frac{\sin. 12q}{4},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sin. nq^3 = \frac{3 \sin. nq}{4} - \frac{\sin. 3nq}{4}.$$

Or 1.<sup>o</sup>  $\sin. q + \sin. 2q + \sin. 3q + \sin. 4q + \dots + \sin. nq = (\text{Problème I}).$   

$$\frac{\sin. q [1 + \cos. q - \cos. nq - \cos. (n+1)q]}{1 - \cos. 2q}.$$

2.<sup>o</sup> En faisant  $3q = x$ , on aura  $\sin. 3q + \sin. 6q + \sin. 9q + \sin. 12q + \dots + \sin. 3nq$   
 $= \sin. x + \sin. 2x + \sin. 3x + \sin. 4x + \dots$   
 $+ \sin. nx = \frac{\sin. x [1 + \cos. x - \cos. nx - \cos. (n+1)x]}{1 - \cos. 2x}$   
 $= \frac{\sin. 3q [1 + \cos. 3q - \cos. 3nq - \cos. 3(n+1)q]}{1 - \cos. 6q}.$

Ainsi  $S = \frac{3}{4} \sin. q \left( \frac{1 + \cos. q - \cos. nq - \cos. (n+1)q}{1 - \cos. 2q} \right)$   
 $= \frac{1}{4} \sin. 3q \left( \frac{1 + \cos. 3q - \cos. 3nq - \cos. 3(n+1)q}{1 - \cos. 6q} \right).$

C. Q. F. T.

## PROBLÈME VI.

(7.) *Sommer la suite*  $S = \cos. q^3 + \cos. 2q^3 + \cos. 3q^3 + \cos. 4q^3 + \dots + \cos. nq^3.$

## SOLUTION.

On a (théor. VII)  $\cos. q^3 = \frac{3 \cos. q}{4} + \frac{\cos. 3q}{4},$

$$\cos. 2q^3 = \frac{3 \cos. 2q}{4} + \frac{\cos. 6q}{4};$$

$$\cos. 3q^3 = \frac{3 \cos. 3q}{4} + \frac{\cos. 9q}{4};$$

$$\cos. 4q^3 = \frac{3 \cos. 4q}{4} + \frac{\cos. 12q}{4};$$

.....

$$\cos. nq^3 = \frac{3 \cos. nq}{4} + \frac{\cos. 3nq}{4};$$

Donc, en opérant comme dans les articles précédens, on trouvera par le *Problème II*,

$$S = \frac{3}{4} \cos. q \left( \frac{\sin. nq + \sin. (n+1)q - \sin. q}{\sin. 2q} \right) \\ + \frac{1}{4} \cos. 3q \left( \frac{\sin. 3nq + \sin. 3(n+1)q - \sin. 3q}{\sin. 6q} \right). \text{ C. Q. F. T.}$$

### PROBLÈME VII.

(8.) *Sommer la suite*  $S = \sin. q^4 + \sin. 2q^4 + \sin. 3q^4 + \sin. 4q^4 + \dots + \sin. nq^4$ !

### SOLUTION.

On a (*théorèmes V & VII*),

$$\sin. q^4 = \frac{3}{8} - \frac{\cos. 2q}{2} + \frac{\cos. 4q}{8};$$

$$\sin. 2q^4 = \frac{3}{8} - \frac{\cos. 4q}{2} + \frac{\cos. 8q}{8};$$

$$\sin. 3q^4 = \frac{3}{8} - \frac{\cos. 6q}{2} + \frac{\cos. 12q}{8};$$

$$\sin. 4q^4 = \frac{3}{8} - \frac{\cos. 8q}{2} + \frac{\cos. 16q}{8};$$

.....

$$\sin. nq^4 = \frac{3}{8} - \frac{\cos. 2nq}{2} + \frac{\cos. 4nq}{8};$$

Mmm ij

On aura donc

$$S = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{3}{8} \\ - \frac{1}{2} (\cos. 2q + \cos. 4q + \cos. 6q + \dots + \cos. 2nq) \\ + \frac{1}{8} (\cos. 4q + \cos. 8q + \cos. 12q + \dots + \cos. 4nq)$$

équation qui devient, en sommant chaque suite particulière,

$$S = \frac{3n}{8} - \frac{1}{2} \frac{\cos. 2q [\sin. 2nq + \sin. 2(n+1)q - \sin. 2q]}{\sin. 4q} \\ + \frac{1}{8} \cos. 4q \frac{[\sin. 4nq + \sin. 4(n+1)q - \sin. 4q]}{\sin. 8q}$$

C. Q. E. T.

### PROBLEME VIII.

(9.) Sommer la suite  $S = \cos. q^2 + \cos. 2q^2 + \cos. 3q^2 + \cos. 4q^2 + \dots + \cos. nq^2$ .

### SOLUTION.

On a (théorème VII).

$$\cos. q^2 = \frac{3}{8} + \frac{\cos. 2q}{2} + \frac{\cos. 4q}{8}$$

$$\cos. 2q^2 = \frac{3}{8} + \frac{\cos. 4q}{2} + \frac{\cos. 8q}{8}$$

$$\cos. 3q^2 = \frac{3}{8} + \frac{\cos. 6q}{2} + \frac{\cos. 12q}{8}$$

$$\cos. 4q^2 = \frac{3}{8} + \frac{\cos. 8q}{2} + \frac{\cos. 16q}{8}$$

.....

$$\cos. nq^2 = \frac{3}{8} + \frac{\cos. 2nq}{2} + \frac{\cos. 4nq}{8}$$

Ainsi on aura

$$S = \frac{3n}{8} + \frac{1}{2} \cos. 2q \frac{[\sin. 2nq + \sin. 2(n+1)q - \sin. 2q]}{\sin. 4q}$$

$$+ \frac{1}{8} \cos. 4q \frac{[\sin. 4nq + \sin. 4(n+1)q - \sin. 4q]}{\sin. 8q}.$$

C. Q. F. T.

(10.) *Scholæ.* Il est clair que les puissances supérieures des sinus & des cosinus se somment de la même manière. Le lecteur poussera plus loin le calcul, & découvrira, avec de l'attention, la loi générale qui règne dans ces suites.

### PROBLEME IX.

(11.) *Sommer la suite*  $S = \sin. q \cos. q + \sin. 2q \cos. 2q + \sin. 3q \cos. 3q + \sin. 4q \cos. 4q + \dots + \sin. nq \cos. nq$ !

#### SOLUTION.

On a (théorème VI),

$$\sin. q \cos. q = \frac{\sin. 2q}{2},$$

$$\sin. 2q \cos. 2q = \frac{\sin. 4q}{2},$$

$$\sin. 3q \cos. 3q = \frac{\sin. 6q}{2}, \text{ \&c.}$$

On aura donc  $S = \frac{1}{2} (\sin. 2q + \sin. 4q + \sin. 6q + \dots + \sin. nq)$ , équation qui devient (Probl. I),

$$S = \frac{1}{2} \frac{\sin. 2q [1 + \cos. 2q + \cos. 4q + \dots + \cos. 2(n-1)q]}{2 - \cos. 4q}$$

C. Q. F. T.

### PROBLEME X.

(12.) *Sommer la suite*  $S = (\sin. q \cos. q)^2 + (\sin. 2q \cos. 2q)^2 + (\sin. 3q \cos. 3q)^2 + (\sin. 4q \cos. 4q)^2 + \dots + (\sin. nq \cos. nq)^2$ !



## SOLUTION.

On a (théorèmes V & VI),

$$\sin. q^2 \cos. q^2 = \frac{1}{8} - \frac{\cos. 4q}{8};$$

$$(\sin. 2q \cos. 2q)^2 = \frac{1}{8} - \frac{\cos. 8q}{8};$$

$$(\sin. 3q \cos. 3q)^2 = \frac{1}{8} - \frac{\cos. 12q}{8};$$

$$(\sin. 4q \cos. 4q)^2 = \frac{1}{8} - \frac{\cos. 16q}{8};$$

$$(\sin. nq \cos. nq)^2 = \frac{1}{8} - \frac{\cos. 4nq}{8}.$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} \\ &\quad - \frac{1}{8} (\cos. 4q + \cos. 8q + \cos. 12q + \cos. 16q \\ &\quad + \dots + \cos. 4nq); \text{ d'où l'on tire,} \end{aligned}$$

$$S = \frac{n}{8} - \frac{1}{8} \cos. 4q \left( \frac{\sin. 4nq + \sin. 4(n+1)q - \sin. 4q}{\sin. 8q} \right).$$

C. Q. F. T.

(13.) *Scholie.* On sommerà de la même manière les puissances supérieures des produits  $\sin. q \cos. q$ ,  $\sin. 2q \cos. 2q$ ,  $\sin. 3q \cos. 3q$ , &c. J'en dis autant des suites de cette espèce;

$$S = \sin. q^2 \cos. q + \sin. 2q^2 \cos. 2q + \sin. 3q^2 \cos. 3q \\ + \dots + \sin. nq^2 \cos. nq;$$

$$S = \sin. q \cos. q^2 + \sin. 2q \cos. 2q^2 + \sin. 3q \cos. 3q^2 \\ + \dots + \sin. nq \cos. nq^2;$$

$$S = \sin. q^3 \cos. q + \sin. 2q^3 \cos. 2q + \sin. 3q^3 \cos. 3q \\ + \dots + \sin. nq^3 \cos. nq;$$

$$S = \sin. q \cos. q^3 + \sin. 2q \cos. 2q^3 + \sin. 3q \cos. 3q^3 \\ + \dots + \sin. nq \cos. nq^3;$$

&c.

## PROBLEME XL

(14.) Sommer la suite  $S = \sin. (m \pm q) + \sin. (m \pm 2q) + \sin. (m \pm 3q) + \sin. (m \pm 4q) + \sin. (m \pm 5q) + \dots + \sin. (m \pm nq)!$

## SOLUTION.

On a (théorèmes I & II),

$$\sin. (m \pm q) = \sin. m \cos. q \pm \cos. m \sin. q;$$

$$\sin. (m \pm 2q) = \sin. m \cos. 2q \pm \cos. m \sin. 2q;$$

$$\sin. (m \pm 3q) = \sin. m \cos. 3q \pm \cos. m \sin. 3q;$$

&c. Ainsi

$$S = \sin. m (\cos. q + \cos. 2q + \cos. 3q + \cos. 4q + \dots + \cos. nq) \pm \cos. m (\sin. q + \sin. 2q + \sin. 3q + \sin. 4q + \dots + \sin. nq);$$

c'est-à-dire (problèmes I & II),

$$S = \frac{\sin. m \cos. q [\sin. nq + \sin. (n+1)q - \sin. q]}{\sin. 2q} \pm \frac{\cos. m \sin. q [1 + \cos. q - \cos. nq - \cos. (n+1)q]}{1 - \cos. 2q}.$$

C. Q. F. T.

## PROBLEME XLII.

(15.) Sommer la suite  $S = \cos. (m \pm q) + \cos. (m \pm 2q) + \cos. (m \pm 3q) + \cos. (m \pm 4q) + \dots + \cos. (m \pm nq)!$

## SOLUTION.

On a (théorèmes III & IV),

$$\cos. (m \pm q) = \cos. m \cos. q \mp \sin. m \sin. q;$$

$$\cos. (m \pm 2q) = \cos. m \cos. 2q \mp \sin. m \sin. 2q;$$

$$\cos. (m \pm 3q) = \cos. m \cos. 3q \mp \sin. m \sin. 3q, \&c.$$

Ainsi -

$$S = \cos. m (\cos. q + \cos. 2q + \cos. 3q + \dots + \cos. nq) \mp \sin. m (\sin. q + \sin. 2q + \sin. 3q + \dots + \sin. nq);$$

c'est-à-dire,

$$S = \frac{\cos. m \cos. q [\sin. nq + \sin. (n+1)q - \sin. q]}{\sin. 2q} \mp \frac{\sin. m \sin. q [1 + \cos. q - \cos. nq - \cos. (n+1)q]}{1 - \cos. 2q};$$

C. Q. F. T.

### PROBLEME XIII.

(16.) *Sommer la suite*  $S = \sin. (m \pm q)^2 + \sin. (m \pm 2q)^2 + \sin. (m \pm 3q)^2 + \dots + \sin. (m \pm nq)^2$ !

### SOLUTION.

On a (théorèmes V, III & IV),  $\sin. (m \pm q)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos. (2m \pm 2q)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2m \cos. 2q \pm \sin. 2m \sin. 2q}{2};$

$$\sin. (m \pm 2q)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2m \cos. 4q \pm \sin. 2m \sin. 4q}{2};$$

$$\sin. (m \pm 3q)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2m \cos. 6q \pm \sin. 2m \sin. 6q}{2};$$

$$\dots \dots \dots \sin. (m \pm nq)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos. 2m \cos. 2nq \pm \sin. 2m \sin. 2nq}{2};$$

On aura donc,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots \dots \dots + \frac{1}{2} - \cos.$$

$$+ \frac{\sin 2m}{2} (\sin 2q + \sin 4q + \sin 6q + \dots + \sin 2nq),$$

ou bien (*Probl. I & II*),

$$S = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos. 2m \cos. 2q [\sin. 2nq + \sin. 2(n+1)q - \sin. 2q]}{2 \sin. 4q}$$

$$= \frac{\sin. 2m \sin. 2q [1 + \cos. 2q - \cos. 2nq - \cos. 2(n+1)q]}{2(1 - \cos. 4q)}.$$

**C. Q. F. T.**

### PROBLEME XIV.

(17.) Sommer la suite  $S = \text{cof. } (m \pm q)^2 + \text{cof. } (m \pm 2q)^2 + \text{cof. } (m \pm 3q)^2 + \dots + \text{cof. } (m \pm nq)^2$ !

## S O L U T I O N.

On a (théorèmes VII, ~~III~~ & IV),

$$\begin{aligned} \cos. (m \pm q)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\cos. 2m \cos. 2q}{2} \mp \frac{\sin. 2m \sin. 2q}{2}; \\ \cos. (m \pm 2q)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\cos. 2m \cos. 4q}{2} \mp \frac{\sin. 2m \sin. 4q}{2}; \\ \cos. (m \pm 3q)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\cos. 2m \cos. 6q}{2} \mp \frac{\sin. 2m \sin. 6q}{2}; \\ &\dots\dots\dots \\ \cos. (m \pm nq)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\cos. 2m \cos. 2nq}{2} \mp \frac{\sin. 2m \sin. 2nq}{2}; \end{aligned}$$

## Ainfi

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \\ + \frac{\cos. 2m}{2} (\cos. 2q + \cos. 4q + \cos. 6q + \dots + \cos. 2nq), \\ - \frac{\sin. 2m}{2} (\sin. 2q + \sin. 4q + \sin. 6q + \dots + \sin. 2nq),$$

*Mém. 1769.*

Nnn

& par conséquent

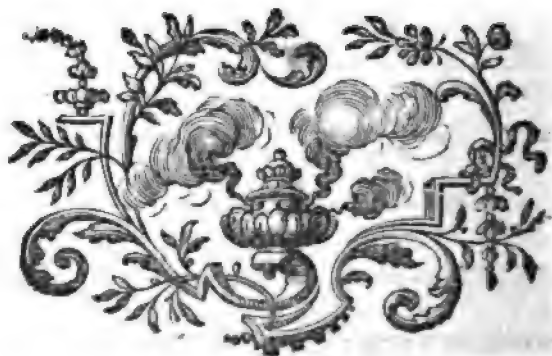
$$S = \frac{n}{2} + \frac{\cos. 2m \cos. 2q [\sin. 2nq + \sin. 2(n+1)q - \sin. 2q]}{2 \sin. 4q}$$

$$= \frac{\sin. 2m \sin. 2q [1 + \cos. 2q - \cos. 2nq - \cos. 2(n+1)q]}{2(1 - \cos. 4q)}$$

C. Q. F. T.

Mêmes procédés pour les puissances supérieures.

Il est aisé de multiplier ces sortes de Problèmes, & d'en résoudre plusieurs autres qui leur sont analogues; mais je me borne aux essais qui précèdent.



*M É M O I R E*  
*S U R D E S I N S E C T E S*  
*S U R L E S Q U E L S*  
*O N T R O U V E D E S P L A N T E S.*

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROV.

**L**ES Caraïbes de l'île de la Dominique, connoissent sous le nom de *mouche végétante*, un Insecte sur lequel on trouve attachée une plante qui y végète; on a remarqué cette même singularité à la Chine, on l'y a appelée *plante-ver*: de pareils faits d'Histoire naturelle constatés, étoient dignes, sans doute, de l'attention des Physiciens qui s'en sont occupés.

M. de Reaumur (*Mémoires de l'Académie, année 1726, page 302.*) nous a fait connoître la plante-ver des Chinois; M.<sup>rs</sup> Watson & Hill, dans les *Transactions philosophiques* (*Volume LIII, page 271*), ont parlé des mouches végétantes des Caraïbes; enfin M. Needham, dans des notes qu'il vient d'ajouter à la traduction de l'Ouvrage de M. l'abbé Spalanzani sur les découvertes microscopiques (*a*) voit dans ces *plantes-animales* (*b*), une preuve du passage & du changement du genre animal au végétal, & réciproquement du végétal à l'animal. Mon dessein n'est point d'examiner si cette mutation est prouvée de façon à ne laisser aucun doute, & si la décomposition d'un corps peut produire, en se développant, des êtres vivans; je me borne ici à ajouter des observations à celles qui ont déjà été données concernant les plantes qui végètent sur des insectes: peut-être qu'en

11 Février  
1769.

(a) Nouvelles Recherches sur les découvertes microscopiques & la génération des corps organisés, ouvrage traduit de l'Italien de M. l'abbé Spalanzani, Professeur de Philosophie à Modène, avec des Notes. Par M.

Needham, à Londres; & à Paris, chez Lacombe, 1769.

(b) Par *plantes animales*, j'entends seulement des plantes qui végètent sur des animaux.

multipliant les remarques qui se rapporteront à ces faits singuliers, nous serons conduits à leur trouver une juste explication; au moins est-il certain qu'elles pourront engager les voyageurs-instruits à étudier ces plantes-animales, sur les lieux où elles sont communes, & dans des circonstances qui doivent rendre complètement raison de la façon dont elles sont produites.

Je me propose, dans ce Mémoire, de faire connoître différentes espèces d'insectes sur lesquels on trouve des plantes; je décrirai un ver où l'on voit la plante qui est plus ordinairement sur la nymphe des cigales; & après avoir fait connoître ces plantes dans les états & grandeurs où j'ai pu me les procurer, j'indiquerai une plante d'une espèce différente de celle que je viens d'annoncer, mais toujours comme celle-ci, dans le genre des *fungus* que j'ai été à portée d'examiner sur une cigale de Cayenne: enfin je terminerai ce Mémoire par peser les sentimens les plus probables pour expliquer cette réunion de l'animal & de la plante.

Plusieurs de ces plantes-animales que j'ai vues dans des collections d'Histoire naturelle, offrent une plante qui végète sur la chrysalide d'une espèce de cigale, sur la tettigomètre (*c*), ainsi que l'a décrit M. Hill; on ne peut pas douter que ces insectes ne soient des chrysalides de cigales, puisque l'on peut sur plusieurs reconnoître deux caractères qui les distinguent principalement; la trompe ou suçoir (*pl. 1, fig. 1*) & dans la *figure 3, a, b*, les deux grosses pattes ou pinces que j'ai représentées ici vues séparées de l'animal auquel elles ont appartenu.

La plante porte sur la tête de l'insecte, sur son corcelet ou sur le corps de l'animal; la partie de l'insecte où cette plante est posée n'est donc pas toujours la même, puisque sur ceux que je décris, les tiges varient de position, & qu'il se trouve sur ces insectes (*pl. 11, fig. 4, 5 & 6*), une, deux, ou trois tiges placées sur différentes parties de leur corps: les uns portent une ou deux tiges sur leur tête (*pl. 1, fig. 4 & 5*), d'autres (*fig. 7*) les ont sur leur corcelet ou sur le corps de l'insecte; d'autres enfin

(c) Aristote a nommé la cigale *tettigonie* & leur nymphe *tettigomètre*. Plin. le dit *cap. XXVI, lib. 11.*

en ont jusqu'à trois séparées (*pl. II, fig. 6*) dont les positions varient.

Il me paroît que la plante végète presque toujours sur la partie supérieure du corps de l'animal & non en dessous ; je dis cependant *presque toujours*, parce que j'ai cru apercevoir une naissance de ces plantes sous le corps d'une crysalide de cigale qui en portoit une autre sur sa tête (*pl. I, fig. 4*).

Il y a aussi des différences remarquables dans les plantes qui se trouvent sur ces insectes ; elles varient beaucoup en longueur ; la plus haute que j'aie vu avoit deux pouces , & étoit surmontée d'une tête ou masse. Il y en a cependant qui n'ont qu'un simple filet à peu près également gros sur toute la longueur de la tige. Dans les plantes qui n'ont qu'une tige , elle est terminée par une tête plus ou moins renflée , ou elle porte à son extrémité une masse (*pl. I, fig. 7 & 8*) , ou la tête se ramifie , & les branches sont terminées par de petits tubercules (*pl. I, fig. 4 & 10*).

La tettigomètre (*fig. 6*) porte sur sa tête une plante qui se termine par deux tubercules assez gros ; celle de la *figure 10* est encore plus singulière , en ce qu'elle est branchue & très-garnie de tubercules , dont un *a* est creux.

L'examen de ces plantes ne laisse aucun doute sur la classe à laquelle elles appartiennent : elles doivent être mises dans celle des *clavaria* , décrits par M. Von-Linné , parce qu'il y a compris le genre que Micheli a appelé *lichen agaricus* , auquel notre plante a plus de rapport encore qu'aux *clavaria* décrits par Vaillant.

La racine de la plante couvre seulement le corps de l'insecte sur lequel elle végète. Lorsque l'insecte & la plante sont conservés dans l'esprit-de-vin , & qu'ils n'ont point été desséchés , comme dans la *pl. II, fig. 3 & 5* ; on peut lever la plante & la séparer de l'animal , sans endommager celui-ci aucunement. On aperçoit pour lors sous le pédicule de la plante des cannelures (*a, fig. 8 & 9*) qu'ont dû produire les anneaux du corps de l'insecte ; ainsi les racines de la plante ne pénètrent point le corps de l'animal.

La plante qui n'a point encore poussé de tête , & qui n'est point à son dernier terme d'accroissement (*pl. II, fig. 2, 3, 4 & 5*) est pleine , elle est comme dans les champignons , com-



posée de fibres longitudinales; quand elles sont sèches, au contraire, elles sont creuses, & il arrive souvent (*pl. I, fig. 10*) que les sommités sont percées d'une ouverture qui paroît avoir servi d'issue à un insecte; mais on sait combien il est commun de voir les *fungus* mangés par des vers qui se métamorphosent en sortant de ces plantes.

La plante que je vais décrire au lieu d'être comme celles dont j'ai parlé, adhérentes à des tettigomètres ou nymphes de cigales, se trouve attachée à une vraie cigale; celle-ci est originaire de Cayenne (*pl. II, fig. 12 & 13*); la plante est une espèce de *fungus*, mais différente de celles que nous avons décrites; il est formé de longs filets blancs & soyeux qui recouvrent tout le corps de l'insecte & le débordent d'environ sept à huit lignes dessus & dessous le ventre de l'animal. J'ai dessiné cet insecte avec la plante vue en dessous (*fig. 12*), & le même en dessus (*fig. 13*). J'ai encore observé cette même plante attachée à un autre insecte genre des procigales.

Nous avons vu des *fungus* attachés à des nymphes de cigale ou à la cigale elle-même; examinons la *clavaria* sur des vers. J'ai plusieurs insectes dans cet état, conservés dans l'esprit-de-vin, qui prouvent que la *clavaria* s'attache aussi aux insectes qui sont sous cette forme. Je ne crois pas que l'on ait fait part de cette observation sur d'autres que la plante-ver des Chinois.

Ce ver ressemble à ceux qui donnent des scarabées; il est de la grosseur des vers qui produisent, après leur métamorphose, la petite espèce d'hannetons: son corps est composé (*pl. II, fig. 1, 2, 3, 4 & 5*) de plusieurs anneaux très-serrés; la tête grosse & écailleuse est de peu de longueur; on y voit deux mâchoires ou scies assez avancées, & deux petites antennes composées de trois articulations. Le ver a quelques poils répandus sur les anneaux de son corps; il a six pattes, dont deux près de la tête sont un peu plus petites & plus en dedans du corps de l'animal.

On ne peut pas penser que les vers dont nous parlons, soient ceux qui donnent, par une seconde métamorphose, les nymphes des cigales, parce que suivant l'histoire que M. de Reaumur (*Histoire des Insectes, Tome V*), a donnée de ces vers, ils n'au-

roient aucune ressemblance avec ceux que nous décrivons, puisque les cigales, au sortir de l'œuf, passent à l'état des vers hexapodes, dont deux pinces très-grosses les rapprochent beaucoup des formes qu'ils prendront étant nymphes ; ces pinces les font différer essentiellement du ver que nous décrivons maintenant. Voici donc un second insecte sur lequel on trouve la *clavaria*, & c'est un fait intéressant pour l'histoire de cette singulière végétation.

Par l'état de conservation où j'ai ces insectes, il paroît que la plante a crû quelque temps sur l'animal en vie, car la *clavaria*, sur certains de ces insectes, a deux pouces de longueur (*pl. II, fig. 6*). Les vers sont entiers, fort sains & non desséchés. A la vérité, l'on sait aussi qu'il faut peu de temps pour la production parfaite d'un champignon.

On me permettra de rapporter ce que M. Watson a dit sur les mouches végétantes des Caraïbes, & l'explication du fait qu'en donne M. Hill ; j'y réunirai aussi les observations qu'avoit faites auparavant M. de Reaumur sur la plante-ver de la Chine.

M. Watson dit dans les *Transactions philosophiques* : « La mouche végétante se trouve dans l'île Dominique, & ressemble « (si vous exceptez les ailes dont elle est privée) au bourdon, en « grandeur & en couleur : dans le mois de Mai elle s'enterre & « elle commence à végéter vers la fin du mois de Juin ; l'arbrisseau « qui en provient arrive à la perfection & ressemble à une branche « de corail ; elle croît jusqu'à la hauteur de trois pouces, & porte « plusieurs petites gouffes d'où naissent certains vers qui se méta- « morphosent ensuite en mouches comme certains vers en An- « gleterre ».

M. Hill, en répondant à M. Watson, explique ainsi le fait que nous venons d'exposer :

« Il y a à la Martinique un *fungus* du genre des *clavaria*, qui diffère en espèce de tout ce que nous avons connu jusqu'à présent, il produit sur les côtés des gouffes ; je l'appelle en conséquence, « la *clavaria sobolifera* : il croît sur les corps putrides des animaux « comme notre *fungus ex pede equino*, qui vient sur la corne des « chevaux morts : la cigale est fort commune à la Martinique, & « pendant son état de nymphe, connue alors par nos Auteurs »

« anciens sous le nom de *tettigomètre*, elle s'enterre sous des feuilles  
 « mortes pour attendre sa métamorphose; alors si la saison n'est pas  
 « favorable, il périt un grand nombre de ces insectes; en atten-  
 « dant, les semences de la *clavaria* s'attachent au cadavre & se dé-  
 « veloppent. Voilà exactement le fait, & ce qu'on peut penser de  
 « vrai sur ces productions, quoique les habitans ignorans croient  
 « réellement qu'une mouche végète, & que même l'on trouve ici  
 « un dessin de cette plante de la main d'un Espagnol, sous la  
 « forme d'un arbrisseau à trois feuilles, en même temps qu'il repré-  
 « sente l'animal qui emporte en volant ce même arbrisseau sur  
 son dos. »

Il ne peut plus y avoir aucun doute sur les faits principaux que quantité de morceaux renfermés dans les cabinets servent à confirmer; c'est une plante dans la classe des *fungus* & de l'espèce des *clavaria*, dont la racine ou le pédicule est implanté sur le corps d'un insecte. Voilà les faits principaux. Que des supercheres faites dans le pays, changent cette singularité, en mettant des graines dans la tige de la *clavaria* ou autrement; il n'en sera nullement besoin pour exciter l'attention du Physicien; il subsistera sans cela assez de difficultés pour expliquer comment ont lieu les faits constatés & reconnus pour vrais, après avoir écarté du récit des Voyageurs les circonstances mal vues, & qui engageroient à chercher des explications d'autant plus inutiles qu'elles porteroient sur des détails faux & mal observés.

La plante-ver dont a parlé M. de Reaumur (*pl. 11, fig. 10 & 11*) se trouve sur un ver & non sur une chrysalide; mais la plante dans les morceaux qu'a examinés M. de Reaumur, étoit située sur le dernier anneau du ver, près de l'an. Il semble que la racine de la plante pince & saisit l'extrémité du corps de l'insecte: cette position de la plante, eu égard à l'insecte, très-différente de celle qu'offrent ceux des Caraïbes, a fait penser à M. de Reaumur, que l'insecte étoit ainsi attaché à la racine de la plante, parce qu'il l'avoit choisie pour s'y coller, y subir la seconde métamorphose & y devenir chrysalide; cette position étant commune à beaucoup d'autres espèces d'insectes quand ils se changent en nymphes.

En effet, on ne doit pas être surpris (dans le sentiment de  
 M. de

M. de Réaumur) de trouver l'insecte toujours attaché à la même plante, puisqu'il la choisiroit, comme le font beaucoup d'autres espèces d'insectes, qui, nés sur une plante, y subissent toute leur métamorphose.

La plante-ver des Chinois préféreroit l'extrémité de la racine pour y rester adhérente, comme il est d'autres insectes qui demeurent toujours attachés aux fibres d'une feuille, & constamment à la même partie de la plante.

Enfin une plante dont les proportions sont assez conformes à celles de l'insecte, l'animal qui dans le pays étoit peut-être vivant, & remuoit encore lorsque la plante s'y trouvoit attachée, ont engagé les Chinois à soutenir le changement de l'insecte en plante, tandis qu'ils n'auroient pas annoncé la même merveille dans d'autres circonstances où l'insecte se seroit attaché à quelques autres parties d'une plante pour s'y métamorphoser; & il ne leur est pas venu dans l'idée, dans ce dernier cas, qui ne s'y prêtoit pas comme le premier, d'avancer que les branches de ces végétaux où il y a des insectes attachés, se changent en animaux, ou portent des insectes, comme elles produisent des fruits & des semences.

Quoiqu'il y eût plusieurs faits analogues qui conduisissent M. de Réaumur à établir la façon de penser sur la plante-ver des Chinois; cependant nous convenons qu'ici c'est la plante qui semble s'attacher à l'insecte, & non l'insecte à la plante, & que les insectes végétans des Caraïbes dérangent beaucoup l'explication de M. de Réaumur. Nous avouons même avec M. Needham, que le sentiment de M. de Réaumur ne peut plus expliquer comment ont été formés aucuns des morceaux que nous venons de décrire. Nous ajouterons que le peu de circonstances bien examinées dans le pays, ne mettent pas encore à portée de prononcer avec sûreté sur ces faits mystérieux, & par conséquent je me garderai d'hasarder des conjectures; je prie seulement de comparer le sentiment de M. Hill avec les faits principaux qui sont certains, & l'on jugera si ce n'est pas le plus simple & le plus probable de ceux qu'on a donnés.

On fait qu'il y a des *fungus* qui ne vivent que sur une espèce de plante, ou qui ne tirent leur nourriture que d'une seule substance;

Mém. 1769.

. O o o

# 476 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

par deux gros tubercules, & est singulière en ce qu'à la moitié de sa longueur elle porte d'autres petits tubercules.

*Fig. 10*, une plante branchue, dont les branches se terminent par de petits tubercules, dont un *a* est creux & percé.

## P L A N C H E I I.

*Fig. 1*, ver sur lequel végète une plante; elle est naissante; le ver a été conservé dans l'eau-de-vie.

*Fig. 2*, autre ver avec une plante plus grande; il est vu en dessous de grandeur naturelle.

*Fig. 3*, le même ver, mais du double de grandeur; on aperçoit aisément ses six pattes, ses mâchoires en scies & ses deux antennes *aa*, enfin la racine de la plante qui s'étend sur tout le corps de l'insecte.

*Fig. 4*, un ver avec une plante plus grande & vue en dessus.

*Fig. 5*, le même ver, au moins du double plus gros, afin qu'on puisse mieux voir ses six pattes & ses antennes.

*Fig. 6*, un ver avec trois plantes sur différens anneaux du corps de l'insecte.

*Fig. 7*, deux plantes séparées de l'insecte auquel elles étoient adhérentes.

*Fig. 8*, le pédicule d'une plante pour montrer les cannelures produites par les anneaux du corps de l'insecte sur lequel elle étoit implantée.

*Fig. 9*, une plante avec son pédicule & les cannelures de son pied.

*Fig. 10*, la plante-ver des Chinois, telle que M. de Reaumur l'a décrite, *Mémoires de l'Académie*, année 1726.

*Fig. 11*, la même vue en dessous.

*Fig. 12*, la partie inférieure du corps d'une cigale de Cayenne, qui porte un *fungus* d'un autre genre que les précédens; la plante est composée d'espèces de palmes ou longs filets blancs, légers & soyeux; on ne voit ici que le corps de l'insecte, seulement pour donner une idée de la plante qui y est attachée & faire sentir les différences avec les *fungus* des figures précédentes.

*Fig. 13*, la même partie de la cigale de Cayenne en dessus où l'on voit la plante qui enveloppe principalement la partie inférieure du corps de l'insecte.



Pla. I.

*Fig. 1.*



*Fig. 2.*



*Fig. 3.*



*Fig. 4.*



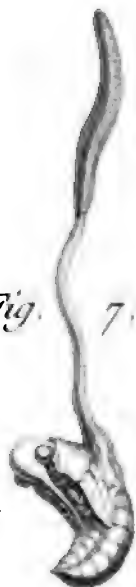
*Fig. 5.*



*Fig. 6.*



*Fig. 7.*



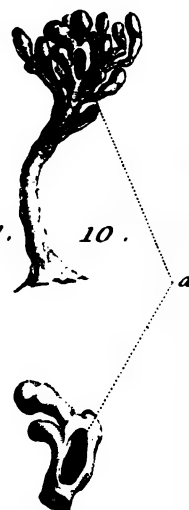
*Fig. 8.*



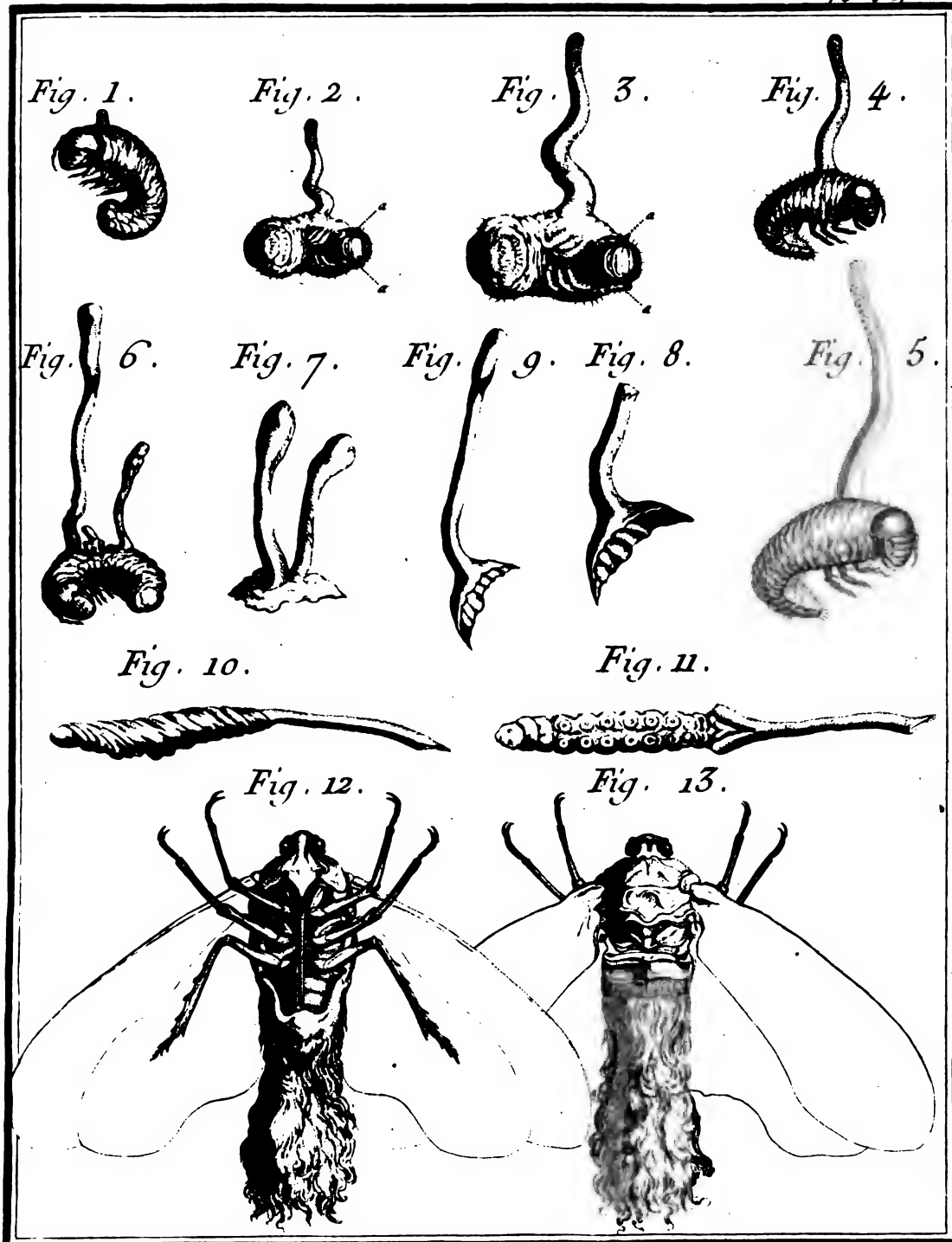
*Fig. 9.*



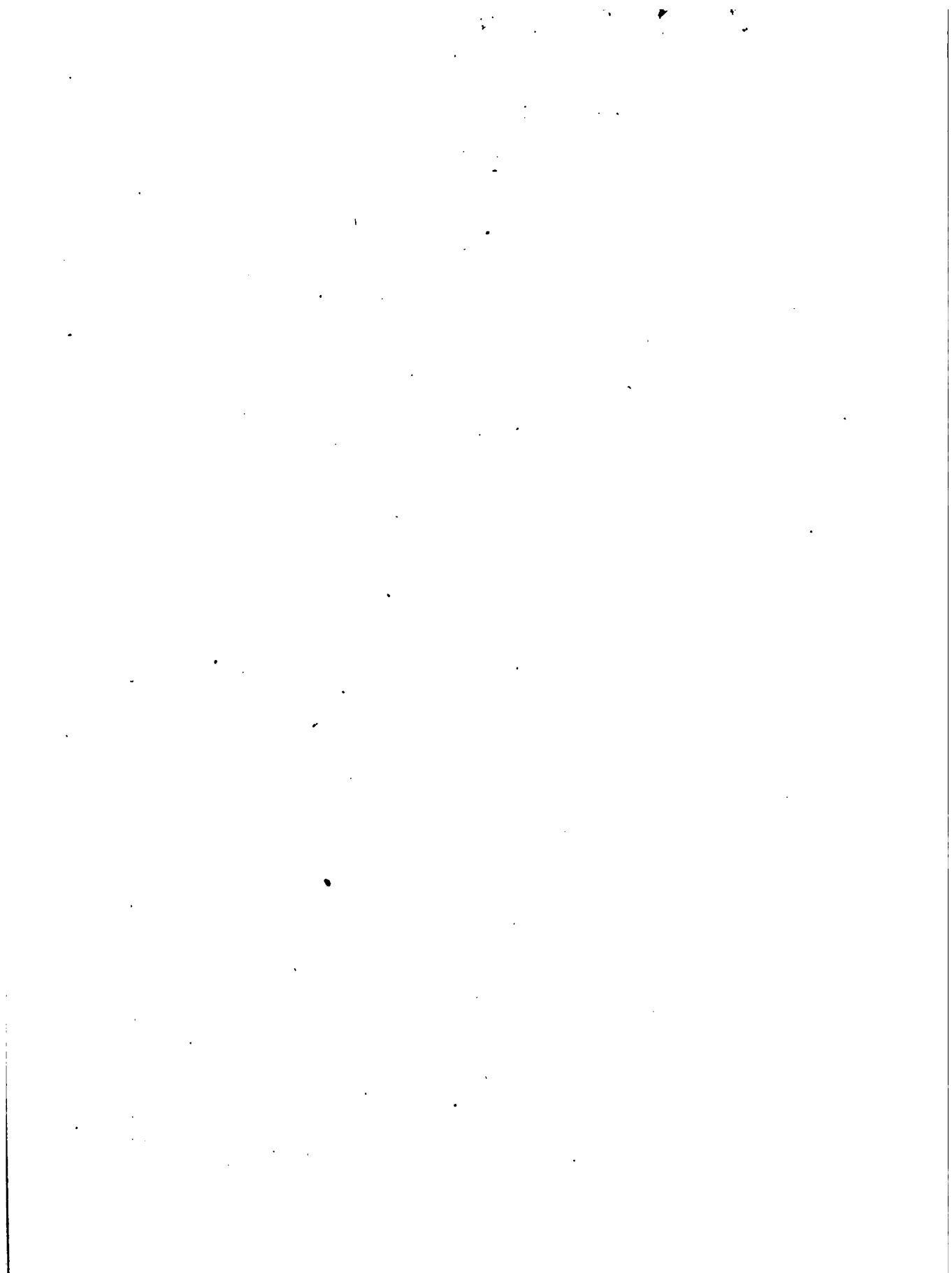
*Fig. 10.*



1







DÉTERMINATION GÉNÉRALE  
DE  
L'EFFET DES ROUES  
MUES PAR LE CHOC DE L'EAU.

Par M. l'Abbé BOSSUT.

I.

LES machines qui ont pour force mouvante l'action d'un fluide, sont ordinairement conduites par des roues garnies d'ailes ou de pots, qui tournent en vertu du choc de l'eau contre les ailes, ou du poids de l'eau reçue continuellement dans les pots, quelquefois en vertu de ces deux causes réunies. Les roues de la première espèce ont l'avantage de pouvoir prendre l'eau par-dessous, & n'exigent pas, comme les autres, que le courant ait beaucoup de chute; elles sont d'un fréquent usage dans la pratique.

M. Parent a trouvé, dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1704, qu'en substituant à toutes les ailes qui reçoivent le choc d'un fluide, une surface plane de même étendue, frappée perpendiculairement par le fluide, le centre d'impression de cette surface doit prendre le tiers de la vitesse du courant, pour que l'effet de la machine soit un *maximum*. Cette théorie a été adoptée par tous les Mécaniciens, ou du moins on ne s'est pas mis en peine d'en examiner les principes. Elle est cependant défectueuse; la substitution proposée est précaire & inexacte. Pour résoudre le Problème avec toute la précision qu'il admet, il faut considérer séparément l'impulsion du fluide contre chaque aile, & prendre ensuite la somme de toutes ces impulsions. Je me propose ici de donner cette solution générale.

## I. I.

On fait que suivant la théorie ordinaire de la percussion des fluides, le choc d'un fluide contre une surface plane est comme le produit de cette surface par le quarré de la vitesse du fluide, & par le quarré du sinus de l'angle d'incidence de ce fluide sur le plan : cette règle est assez exacte quant aux deux premiers élémens; elle l'est moins pour le troisième, & cesse même d'être admissible lorsque l'obliquité du choc est très-grande. Mais cette grande obliquité n'a presque jamais lieu pour les roues mues par le choc de l'eau, que j'ai ici en vue; c'est pourquoi je m'en tiendrai à la règle en question, qui est fort simple, & qu'on ne doit abandonner que quand on pourra lui en substituer une autre, exempte de toute difficulté, & d'un usage commode dans la pratique.

## I I I.

Fig. 1. Soit  $AKDB$  (fig. 1) la circonférence extérieure d'une roue plongée dans un courant horizontal  $XYTZ$ , dont tous les points se meuvent suivant des directions parallèles entr'elles, & avec une même vitesse uniforme. Que cette roue porte un nombre quelconque d'ailes  $Ee$ ,  $Ff$ ,  $Gg$ ,  $Hh$ , &c. dirigées au centre  $C$ . Ayant abaissé la droite  $CI$ , verticale ou perpendiculaire à la surface  $XY$  du fluide, soient menées parallèlement à la même surface, les droites  $E_1$ ,  $F_2$ ,  $G_3$ ,  $H_4$ , &c. Il est clair qu'en allant de  $A$  vers  $K$ , les dernières ailes sont couvertes & garanties en partie du choc de l'eau, par les précédentes. J'aurai simplement égard à l'impulsion du fluide contre les parties  $EV$ ,  $FV'$ ,  $GV''$ ,  $HV'''$ , &c. des ailes; & je supposerai que les parties  $V'f'$ ,  $V''g'$ ,  $V'''h'$ , &c. n'éprouvent aucun choc, ou du moins je négligerai un tel choc, en cas qu'il existe réellement. Cette manière d'envisager l'action du fluide me paroît exacte ou du moins très-admissible dans un Problème physico-mathématique, tel que celui-ci qui n'est pas susceptible d'une solution rigoureuse. Car

1.° Dans les roues placées sur des rivières, il est évident que le fluide, après avoir frappé les parties  $EV$ ,  $FV'$ ,  $GV''$ , &c.

se réfléchit, glisse par les côtés, & se mêle avec le fluide environnant. Il ne lui reste donc, dans le sens du courant, qu'une vitesse fort petite, laquelle ne peut par conséquent produire qu'un effet insensible sur la roue. Je conviens que si les intervalles des ailes étoient très-considérables, le fluide pourroit acquérir de nouveau dans l'intervalle de deux ailes une vitesse capable de donner une impulsion sensible à l'aile antécédente; mais ce cas-là n'est qu'une pure hypothèse, & n'a pas lieu dans la pratique.

2.<sup>o</sup> Quant aux roues plongées dans des courriers, le fluide après avoir choqué les parties  $EV$ ,  $FV'$ ,  $GV''$ , &c. n'a pas tout-à-fait la même liberté de se dégager des ailes que dans le premier cas; mais il trouve néanmoins à s'échapper; il glisse en partie sur les ailes, l'autre partie sort par les vides qui se trouvent entre l'aile & le courrier, & par le vide que deux ailes contiguës laissent au fond, lorsque la droite qui divise en deux parties égales l'angle formé par ces deux ailes, est placée dans la verticale. L'impulsion contre les parties  $EV$ ,  $FV'$ ,  $GV''$ , &c. est donc toujours incomparablement plus sensible que le choc (supposé qu'il existe en effet) contre les parties  $V'f'$ ,  $V''g'$ , &c. D'ailleurs ce dernier choc prétendu est d'une irrégularité qui ne donne aucune prise au calcul; & dans le cas où l'on voudroit absolument s'embarasser du mouvement du fluide dans les espaces  $VEV'f'$ ,  $f'FV''g'$ , &c. il faudroit renoncer à toute solution théorique du Problème. Si on l'a résolu, en employant d'autres hypothèses, je crois que ces hypothèses sont moins naturelles & sujettes à plus de difficultés que la précédente.

## I V.

Cela posé, soit  $Mm$  un élément quelconque de l'aile  $Ee$ . Du point  $A$  où la surface du fluide rencontre la circonférence  $AKDB$ , soit mené au centre  $C$  le rayon  $CA$ . Que les droites infiniment petites  $Mx$ ,  $My$  représentent respectivement les espaces parcourus dans un instant par le fluide & par le point  $M$  de l'aile. Je décompose la vitesse  $Mx$  en deux autres  $My$ ,  $Mz$ ; il est évident que le fluide n'agit sur l'élément  $Mm$  qu'en

480 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

vertu de la seconde vitesse  $Mz$ . Soit prolongée jusqu'en  $n$  la droite  $xz$  qui sera évidemment perpendiculaire à  $EV$ . Supposons ensuite,

Le rayon $CA$ de la roue.....	$= a.$
La largeur, c'est-à-dire la dimension horizontale des ailes.....	$= b.$
Le sinus total.....	$= 1.$
L'angle $ACI$ .....	$= m.$
L'angle $ECI$ , que fait la première aile choquée avec la verticale.....	$= p.$
L'angle $ECF$ ou $FCG$ , &c. compris entre deux ailes voisines.....	$= q.$
La vitesse du fluide.....	$= V.$
La vitesse uniforme de la circonférence $AKDB$ .....	$= u.$
$EM$ .....	$= x.$
$Mm$ .....	$= dx.$
L'impulsion perpendiculaire du fluide contre un plan $\beta$ en repos.....	$= F.$

On aura évidemment  $My$  ou  $zx = u \times \frac{CM}{CA} = \frac{u(a-x)}{a}$ ,  $nx = V \cos. p$ ,  $nz = nx - zx = V \cos. p - \frac{u(a-x)}{a}$ ,  $\sin. \angle Mn = \frac{nz}{Mz} = \frac{aV \cos. p - u(a-x)}{a \times Mz}$ , Donc l'impulsion perpendiculaire du fluide contre  $Mm$ , qui est représentée (*art. II*) par  $\frac{F}{\beta \times V^2} \times b dx \times (Mz)^2 \times (\sin. \angle Mn)^2$  deviendra, comme on voit,  $\frac{F b dx [aV \cos. p - u(a-x)]^2}{\beta a^2 V^2}$ ; & si l'on nomme  $dM$  le moment de cette impulsion élémentaire, on aura

$$dM = \frac{F b dx [aV \cos. p - u(a-x)]^2 \times (a-x)}{\beta a^2 V^2},$$

ou bien en faisant, pour abrégér,  $\frac{Fb}{\beta V^2} = n$ , & changeant un peu

un peu la forme de l'équation,

$$(A) dM = ndx \left( V - \frac{n(a-x)}{a \cos p} \right)^2 \times \cos p^2 \times (a-x).$$

V.

On voit que cette équation s'intègre sans aucune difficulté; mais avant que de faire cette opération, j'observe que si la quantité  $V - \frac{n(a-x)}{a \cos p}$  au lieu d'être positive étoit négative, ce seroit l'aile qui pousseroit le fluide au lieu d'en être poussée. Cependant comme le carré de l'une & l'autre expression est toujours le même, on ne pourroit pas discerner lequel des deux cas a lieu, si l'on intégroit à l'ordinaire. Voici donc ce qu'il faut faire en général.

On examinera ce que devient la quantité  $V - \frac{n(a-x)}{a \cos p}$

lorsque  $x = EV = CE - CV = a - \frac{Ck}{\cos p}$

$= a - \frac{a \cos m}{\cos p}$ , & lorsque  $x = 0$ . Cela posé, 1.° si la

quantité en question est positive dans les deux cas, le fluide pousse l'aile dans toute l'étendue  $VE$ , & le calcul se fait comme nous le verrons tout-à-l'heure. 2.° Si cette quantité est négative dans les deux cas, l'aile pousse le fluide dans toute l'étendue  $VE$ , & le calcul se fait encore de la même manière.

3.° Si la même quantité est positive dans le premier cas, & négative dans le second, une partie  $VR$  de l'aile est poussée par le fluide, tandis qu'au contraire l'autre partie  $RE$  de l'aile pousse le fluide. Alors on déterminera le moment  $M$ , de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque  $V - \frac{n(a-x)}{a \cos p} = 0$ , ou

lorsque  $x = \frac{a \cos m - a V \cos p}{n}$ , & qu'elle reçoive la valeur com-

plette, lorsque  $x = EV = a - \frac{a \cos m}{\cos p}$ . Soit nommée  $G$

cette intégrale qui exprime le moment de l'impulsion de l'eau contre  $VR$ . On déterminera encore  $M$  de manière que l'intégrale

s'évanouisse lorsque  $x = 0$ , & reçoive sa valeur complete lorsque

$$x = ER = \frac{au - aV \cos p}{u}. \text{ Soit nommée } H \text{ cette inté-}$$

grale qui exprime le moment\* de l'impulsion de la partie  $RE$  de l'aile contre le fluide. Il est clair que  $G - H$  ou  $H - G$  représentera le moment de la force résultante qui pousse l'aile ou le fluide.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que si la quantité  $V - \frac{u(a-x)}{a \cos p}$  est positive en  $E$ , elle le sera, à plus forte raison en  $V$ , & dans toute l'étendue  $EV$ .

## V I.

Il est évident que le procédé du calcul est le même dans les trois suppositions, & qu'il s'agit toujours de prendre une somme ou une différence de momens d'impulsion. Je n'examinerai ici que la première, parce que dans la pratique il convient que le fluide pousse l'aile dans toute l'étendue de la partie qu'elle trempe dans l'eau. Or cela arrivera si l'on a seulement  $V \cos p = u$ , ou  $\cos p = \frac{u}{V}$ . Soit, par exemple,  $u = \frac{V}{3}$ ; on aura

$$\cos p = \frac{1}{3}, \text{ \& par conséquent l'angle } p = 70 \frac{1}{2} \text{ degrés.}$$

Il faut donc alors que la quantité dont l'aile trempe dans l'eau suivant la verticale, soit moindre que les deux tiers du rayon. L'enfoncement des roues qui trempent dans des coursiers est toujours très-petit par rapport au rayon. Dans les roues même placées sur des rivières, l'enfoncement n'atteint pas, à beaucoup près, la limite qu'on vient d'indiquer. Ainsi mon calcul aura toute la généralité dont nous avons besoin. Il est clair que la quantité

$$V - \frac{u(a-x)}{a \cos p} \text{ étant supposée positive, les quantités } V - \frac{u(a-x)}{a \cos (p-q)}, V - \frac{u(a-x)}{a \cos (p-2q)}, V - \frac{u(a-x)}{a \cos (p-3q)}, \text{ \&c.}$$

seront positives à plus forte raison.

## VII.

En intégrant l'équation (A) de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque  $x = 0$ , & qu'elle reçoive sa valeur complète lorsque  $x = EV = a - \frac{a \cos. m}{\cos. p}$ , on trouvera

$$M = \frac{n a^3 V^2 (\cos. p^2 - \cos. m^2)}{2} - 2 n a^2 V u x$$

$$\left( \cos. p - \frac{\cos. m^2}{\cos. p^2} \right) + n a^2 u^2 \left( 1 - \frac{\cos. m^4}{\cos. p^4} \right).$$

Nous ferons, pour abréger,  $n a^2 V^2 = N$ ,  $u = K.V$ ;  $K$  étant un coefficient donné; en sorte que  $M = N \left[ \frac{\cos. p^2 - \cos. m^2}{2} - \frac{2 K}{3} \left( \cos. p - \frac{\cos. m^2}{\cos. p^2} \right) + \frac{K^2}{4} \left( 1 - \frac{\cos. m^4}{\cos. p^4} \right) \right]$ .

## VIII.

Par le point  $E$  soit menée  $E 1$  parallèle à la surface  $XY$  de l'eau. Il n'y a, comme nous l'avons observé (art. III), que la partie  $FV'$  de l'aile  $Ff$ , qui soit frappée par le fluide. En nommant  $M'$  le moment de l'impulsion de l'eau contre cette partie, on trouvera toujours par la même méthode,

$$M' = N \left[ \frac{\cos. (p - q)^2 - \cos. p^2}{2} - \frac{2 K}{3} \left[ \cos. (p - q) - \frac{\cos. p^2}{\cos. (p - q)^2} \right] + \frac{K^2}{4} \left( 1 - \frac{\cos. p^4}{\cos. (p - q)^4} \right) \right].$$

De même, en menant  $F 2$ ,  $G 3$ , &c. parallèles à la surface du fluide, & nommant  $M''$ ,  $M'''$ , &c.  $M^{\Pi}$  respectivement les momens des impulsions contre les parties  $FV'$ ,  $GV''$ , &c. & contre une partie indéterminée; on aura les équations

$$M'' = N \left[ \frac{\cos. (p - 2q)^2 - \cos. (p - q)^2}{2} - \frac{2 K}{3} \left( \cos. (p - 2q) - \frac{\cos. (p - q)^2}{\cos. (p - 2q)^2} \right) + \frac{K^2}{4} \left( 1 - \frac{\cos. (p - q)^4}{\cos. (p - 2q)^4} \right) \right],$$



$$M''' = N \left[ \frac{\text{cof. } (p - 3q)^2 - \text{cof. } (p - 2q)^2}{2} - \frac{K^2}{3} \left( \text{cof. } (p - 3q) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\text{cof. } (p - 2q)^3}{\text{cof. } (p - 3q)^2} \right) + \frac{K^2}{4} \left( 1 - \frac{\text{cof. } (p - 2q)^4}{\text{cof. } (p - 3q)^3} \right) \right],$$

.....

$$M^{\Pi} = N \left[ \frac{\text{cof. } (p - \theta q)^2 - \text{cof. } [p - (\theta - 1)q]^2}{2} - \frac{2K}{3} \left( \text{cof. } (p - \theta q) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\text{cof. } [p - (\theta - 1)q]^3}{\text{cof. } (p - \theta q)^2} \right) + \frac{K^2}{4} \left( 1 - \frac{\text{cof. } [p - (\theta - 1)q]^4}{\text{cof. } (p - \theta q)^3} \right) \right];$$

le nombre entier  $\theta + 1$  exprimant le nombre des ailes choquées.

## I X.

Donc si l'on prend  $S = \frac{M + M' + M'' + \dots + M^{\Pi}}{N}$

pour abréger l'expression, & qu'on efface les termes qui se détruisent, on aura

$$S = \frac{\text{cof. } (p - \theta q)^2 - \text{cof. } m^2}{2}$$

$$= \frac{K}{3} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{cof. } p - \frac{\text{cof. } m^3}{\text{cof. } p^3} \\ + \text{cof. } (p - q) - \frac{\text{cof. } p^3}{\text{cof. } p^3} \\ + \text{cof. } (p - 2q) - \frac{\text{cof. } (p - q)^2}{\text{cof. } (p - q)^2} \\ + \text{cof. } (p - 3q) - \frac{\text{cof. } (p - q)^3}{\text{cof. } (p - 2q)^2} \\ \dots \dots \dots \\ + \text{cof. } (p - \theta q) - \frac{\text{cof. } [p - (\theta - 1)q]^4}{\text{cof. } (p - \theta q)^3} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{K^2}{4} \times \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\cos. m^2}{\cos. p^2} \\ + 1 - \frac{\cos. p^2}{\cos. p^2} \\ + 1 - \frac{\cos. (p - q)^2}{\cos. (p - q)^2} \\ + 1 - \frac{\cos. (p - q)^2}{\cos. (p - 2q)^2} \\ + 1 - \frac{\cos. (p - 2q)^2}{\cos. (p - 2q)^2} \\ \dots \dots \dots \\ + 1 - \frac{\cos. [p - (\theta - 1)q]^2}{\cos. (p - \theta q)^2} \end{array} \right\}$$

Formule qui donne, pour un instant, le moment total de l'impulsion de l'eau, quel que soit le nombre des ailes. Il est clair que  $S$  varie à mesure que (tout restant d'ailleurs le même) l'angle  $p$  varie, ou que la roue, en tournant, prend différentes positions.

## X.

Qu'outre les dénominations précédentes, on appelle encore  $Q$  le poids variable auquel le choc de l'eau peut faire équilibre à chaque instant,  $c$  son bras de levier,  $dt$  l'élément du temps,  $dy$  le petit arc décrit pendant l'instant  $dt$  par un point de la circonférence  $AKDB$ ; on aura  $Q \times c = N.S$ , &  $Q \times c \times dt = NSdt$ .

Mais  $dt = \frac{dy}{u} = - \frac{a dp}{u}$  (j'écris  $- dp$ , parce que  $t$  augmentant,  $p$  diminue); on aura donc  $Q \times c \times dt = - \frac{a N.S dp}{u}$ , &  $c \int Q dt = \frac{a N}{u} \int - S dp$ .

## X I.

Ayant substitué pour  $S$  la valeur trouvée (*art. IX*), on aura dans le second membre de l'équation, différentes sortes de termes. Je mets à part dans les calculs suivans les coefficients constans. D'abord le terme  $dp [\cos. (p - \theta q)^2 - \cos. m^2]$  s'intègre facilement: car il devient  $\frac{dp}{2} + \frac{dp \cos. (2p - 2\theta q)}{2}$

—  $dp \operatorname{cof.} m^2$ , dont l'intégrale est

$$\frac{p}{2} + \frac{\sin. (2p - 2q)}{4} - p \operatorname{cof.} m^2.$$

L'intégrale de  $dp \operatorname{cof.} p$  est  $\sin. p$ ; celle de  $dp \operatorname{cof.} (p - q)$  est  $\sin. (p - q)$ ; celle de  $dp \operatorname{cof.} (p - 2q)$  est  $\sin. (p - 2q)$ , ainsi de suite pour les termes de cette espèce.

La seule difficulté est d'intégrer les termes

$$\frac{dp \operatorname{cof.} m^3}{\operatorname{cof.} p^3}, \frac{dp \operatorname{cof.} p^3}{\operatorname{cof.} (p - q)^3}, \frac{dp \operatorname{cof.} (p - q)^3}{\operatorname{cof.} (p - 2q)^3}, \&c.$$

ainsi que les termes

$$\frac{dp \operatorname{cof.} m^4}{\operatorname{cof.} p^4}, \frac{dp \operatorname{cof.} p^4}{\operatorname{cof.} (p - q)^4}, \frac{dp \operatorname{cof.} (p - q)^4}{\operatorname{cof.} (p - 2q)^4}, \&c.$$

Voici la manière de faire ces intégrations.

### X I I.

1.° Il est aisé d'intégrer  $\frac{dp}{\operatorname{cof.} p^2}$ ; car en faisant  $\operatorname{cof.} p = \frac{r}{z}$ , on a  $\frac{dp}{\operatorname{cof.} p^2} = \frac{z dz}{r(z^2 - 1)}$ , dont l'intégrale est  $\sqrt{z^2 - 1}$   $= \frac{\sin. p}{\operatorname{cof.} p}$ .

2.° Pour intégrer  $\frac{dp \operatorname{cof.} p^3}{\operatorname{cof.} (p - q)^3}$ , on observera que  $\operatorname{cof.} p = \operatorname{cof.} [(p - q) + q] = \operatorname{cof.} (p - q) \operatorname{cof.} q - \sin. (p - q) \sin. q$ , & par conséquent  $\frac{dp \operatorname{cof.} p^3}{\operatorname{cof.} (p - q)^3} = dp \times \frac{\operatorname{cof.} (p - q) \operatorname{cof.} q^3 - 3 dp \sin. (p - q) \sin. q \operatorname{cof.} q^2}{\operatorname{cof.} (p - q)^3} + \frac{3 dp \sin. (p - q)^2 \sin. q^2 \operatorname{cof.} q}{\operatorname{cof.} (p - q)^3} - \frac{dp \sin. (p - q)^3 \sin. q^3}{\operatorname{cof.} (p - q)^3}$   
 $= \operatorname{cof.} q^3 dp \operatorname{cof.} (p - q) - 3 \sin. q \operatorname{cof.} q^2 dp \sin. (p - q) + 3 \sin. q^2 \operatorname{cof.} q \frac{dp}{\operatorname{cof.} (p - q)} - 3 \sin. q^2 \operatorname{cof.} q dp$   
 $\times \frac{\operatorname{cof.} (p - q) - \sin. q^3 \frac{dp \sin. (p - q)}{\operatorname{cof.} (p - q)^2} + \sin. q^3 dp \sin. (p - q)}{\operatorname{cof.} (p - q)^2}.$

Or,  $\int dp \cos. (p - q) = \sin. (p - q)$ ;  $\int dp \sin. (p - q) = -\cos. (p - q)$ . Le terme  $\frac{dp}{\cos. (p - q)}$  s'intègre en faisant  $\cos. (p - q) = \frac{1}{s}$ ; ce qui donne

$$\begin{aligned} dp &= \frac{-d(\frac{1}{s})}{\sqrt{1 - (\frac{1}{s})^2}} = \frac{ds}{s\sqrt{ss-1}}, \quad \frac{dp}{\cos. (p - q)} \\ &= \frac{ds}{\sqrt{ss-1}}, \text{ dont l'intégrale est } L. [s + \sqrt{ss-1}] \\ &= L. \frac{1 + \sin. (p - q)}{\cos. (p - q)}. \text{ Le terme } \frac{dp \sin. (p - q)}{\cos. (p - q)^2} \text{ est la} \\ &\text{même chose que } -\frac{d \cdot \cos. (p - q)}{\cos. (p - q)^2}; \text{ \& il a par conséquent} \\ &\text{pour intégrale } \frac{1}{\cos. (p - q)}. \text{ Ainsi l'intégrale entière de} \\ &\frac{dp \cos. p^3}{\cos. (p - q)^2} \text{ est } \cos. q^3 \sin. (p - q) + 3 \sin. q \cos. q^2 \\ &\cos. (p - q) + 3 \sin. q^2 \cos. q \cdot L. \frac{1 + \sin. (p - q)}{\cos. (p - q)} \\ &- 3 \sin. q^2 \cos. q \sin. (p - q) - \frac{\sin. q^3}{\cos. (p - q)} - \sin. q^3 \\ &\cos. (p - q). \end{aligned}$$

De même, en observant que  $\cos. (p - q) = \cos. [(p - 2q) + q] = \cos. (p - 2q) \cos. q - \sin. (p - 2q) \sin. q$ , on trouvera que l'intégrale de  $\frac{pq \cos. (p - q)^3}{\cos. (p - 2q)^2}$  est  $\cos. q^3 \sin. (p - 2q) + 3 \sin. q \cos. q^2 \cos. (p - 2q) + 3 \sin. q^2 \cos. q L. \frac{1 + \sin. (p - 2q)}{\cos. (p - 2q)} - 3 \sin. q^2 \cos. q \sin. (p - 2q) - \frac{\sin. q^3}{\cos. (p - 2q)} - \sin. q^3 \cos. (p - 2q)$ .

On intégrera par la même méthode les quantités analogues

$$\frac{dp \cos. (p - 2q)^3}{\cos. (p - 3q)^2}, \quad \frac{dp \cos. (p - 3q)^3}{\cos. (p - 4q)^2}, \text{ \&c.}$$

3.° Pour intégrer  $\frac{dp}{\cos. q^4}$ , on fera  $\cos. p = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$  ;  
 & on aura  $\frac{dp}{\cos. p^4} = dz + z^2 dz$ , dont l'intégrale est  
 $z + \frac{z^3}{3} = \frac{\sin. p}{\cos. p} + \frac{\sin. p^3}{3 \cos. p^3}$ .

4.° Pour intégrer  $\frac{dp \cos. p^4}{\cos. (p-q)^4}$ , on observera, comme tout-à-  
 l'heure, que  $\cos. p = \cos. [(p-q) + q] = \cos. (p-q) \cos. q - \sin. (p-q) \sin. q$ ; & que par conséquent  
 $\frac{dp \cos. p^4}{\cos. (p-q)^4} = dp \cos. q^4 - 4 \cos. q^3 \sin. q \frac{dp \sin. (p-q)}{\cos. (p-q)} +$   
 $+ 6 \cos. q^2 \sin. q^2 \times \frac{dp \sin. (p-q)^2}{\cos. (p-q)^2} - 4 \cos. q \sin. q^3 \frac{dp \sin. (p-q)^3}{\cos. (p-q)^3} + \sin. q^4 \times \frac{dp \sin. (p-q)^4}{\cos. (p-q)^4} = dp (\cos. q^4$   
 $- 6 \cos. q^2 \sin. q^2 + \sin. q^4) - (4 \cos. q^3 \sin. q - 4 \cos. q \sin. q^3) \times \frac{dp \sin. (p-q)}{\cos. (p-q)} + (6 \cos. q^2 \sin. q^2 - 2 \sin. q^4)$   
 $\times \frac{dp}{\cos. (p-q)^2} - 4 \cos. q \sin. q^3 \times \frac{dp \sin. (p-q)}{\cos. (p-q)^3} + \sin. q^4$   
 $\times \frac{dp}{\cos. (p-q)^4}$ . Les différens termes de cette quantité s'intègrent par des méthodes & des transformations analogues aux précédentes; & on trouve que l'intégrale entière de  $\frac{dp \cos. p^4}{\cos. (p-q)^4}$  est  $p (\cos. q^4 - 6 \cos. q^2 \sin. q^2 + \sin. q^4) + (4 \cos. q^3 \sin. q - 4 \cos. q \sin. q^3) L. \cos. (p-q) + (6 \cos. q^2 \sin. q^2 - 2 \sin. q^4) \frac{\sin. (p-q)}{\cos. (p-q)} - \frac{2 \cos. q \sin. q^3}{\cos. (p-q)^2} + \frac{\sin. q^4 \sin. (p-q)^3}{\cos. (p-q)^3}$ .

Les quantités  $\frac{dp \cos. (p-q)^4}{\cos. (p-2q)^4}$ ,  $\frac{dp \cos. (p-2q)^4}{\cos. (p-3q)^4}$ , &c. s'intégreront de la même manière.

## XIII.

Tous ces calculs étant achevés, & prenant l'intégrale  $\int - S dp$  de manière qu'elle s'évanouisse lorsque  $p = m$ , & reçoive la valeur complète lorsque  $p = m - q$ , on trouvera différentes suites de termes, telles que d'une suite à l'autre les termes se détruisent en partie. Après avoir donc effacé tous ces termes, l'équation  $c \int Q dt = \frac{a N}{n} \int - S dp$  devient

$$\begin{aligned}
 (B) \quad c \int Q dt &= \frac{a N}{n} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos. m^2}{2} \right) q + \frac{1}{8} \right. \\
 &\quad \left[ \sin. (2m - 2\theta q) - \sin. [2m - 2(\theta + 1)q] \right] \\
 &\quad + \frac{2K \cos. m^2}{3} \left( \frac{\sin. m}{\cos. m} - \frac{\sin. (m - q)}{\cos. (m - q)} \right) - \frac{2K}{3} \\
 &\quad \left[ \sin. m - \sin. [m - (\theta + 1)q] \right] + \frac{2K}{3} (\cos. q^2 \\
 &\quad - 3 \sin. q^2 \cos. q) [\sin. (m - q) - \sin. [m - \\
 &\quad (\theta + 1)q]] + \frac{2K}{3} (3 \sin. q \cos. q^2 - \sin. q^3) \\
 &\quad [\cos. (m - q) - \cos. [m - (\theta + 1)q]] - \\
 &\quad \frac{2K \sin. q^2}{3} \left( \frac{1}{\cos. (m - q)} - \frac{1}{\cos. [m - (\theta + 1)q]} \right) + \\
 &\quad 2K \sin. q^2 \cos. q \cdot L. \frac{[1 + \sin. (m - q)] [\cos. [m - (\theta + 1)q]]}{\cos. (m - q) [1 + \sin. [m - (\theta + 1)q]]} \\
 &\quad + \frac{K^2 q}{4} (\theta + 1 - \sin. q^2 - \cos. q^2 + 6 \cos. q^2 \sin. q^2) \\
 &\quad - \frac{K^2 \cos. m^2}{4} \left( \frac{\sin. m}{\cos. m} + \frac{\sin. m^2}{3 \cos. m^3} - \frac{\sin. (m - q)}{\cos. (m - q)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin. (m - q)^3}{3 \cos. (m - q)^3} \right) - K^2 (\cos. q^2 \sin. q - \cos. q \sin. q^2) \times \\
 &\quad L. \frac{\cos. (m - q)}{\cos. [m - (\theta + 1)q]} - \frac{K^2}{4} (6 \cos. q^2 \sin. q^2 - \sin. q^4)
 \end{aligned}$$

Mém. 1769.

. Qqq

$$\left( \frac{\sin. (m - q)}{\cos. (m - q)} - \frac{\sin. [m - (\theta + 1) q]}{\cos. [m - (\theta + 1) q]} \right) + \frac{K^2 \cos. q \sin. q^2}{2} \times$$

$$\left( \frac{1}{\cos. (m - q)^2} - \frac{1}{\cos. [m - (\theta + 1) q]^2} \right) - \frac{K^2 \sin. q^4}{12}$$

$$\left( \frac{\sin. (m - q)^3}{\cos. (m - q)^3} - \frac{\sin. [m - (\theta + 1) q]^3}{\cos. [m - (\theta + 1) q]^3} \right) \Big].$$

## XIV.

Dans cette formule,  $\int Q dt$  représente le poids auquel de l'eau peut faire équilibre pendant le temps  $t$  que la roue emploie à parcourir l'angle  $q$ ; supposons  $\frac{\int Q dt}{t} = Q$ ,  $Q$  étant simplement un poids; & considérons que  $t = \frac{aq}{u}$ . De plus, imaginons qu'au moment où la première aile  $Ee$  entre dans l'eau, l'aile  $Kk$  soit placée dans la verticale; ce qui donne  $m = (\theta + 1) q$ . En divisant le premier membre de l'équation (B) par  $t$ , le second par  $\frac{aq}{u}$ , & faisant  $m = (\theta + 1) q$ ; on trouvera l'équation,

$$(C) \quad Q \times c = \frac{N}{q} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos. m^2}{2} \right) q + \frac{\sin. 2q}{8} \right.$$

$$+ \frac{2K \cos. m^3}{3} \left( \frac{\sin. m}{\cos. m} - \frac{\sin. (m - q)}{\cos. (m - q)} \right) - \frac{2K \sin. m}{3} +$$

$$\frac{2K}{3} (\cos. q^3 - 3 \sin. q^2 \cos. q) \sin. (m - q) + \frac{2K}{3} (\sin. q \cos. q^2$$

$$- \sin. q^3) [\cos. (m - q) - 1] - \frac{2K \sin. q^2 [1 - \cos. (m - q)]}{3 \cos. (m - q)}$$

$$+ 2K \sin. q^2 \cos. q \cdot L \cdot \frac{1 + \sin. (m - q)}{\cos. (m - q)} + \frac{K^2 q}{4} (\theta + 1$$

$$- \sin. q^4 - \cos. q^2 + 6 \cos. q^2 \sin. q^2) - \frac{K^2 \cos. m^4}{4}$$

$$\left( \frac{\sin. m}{\cos. m} + \frac{\sin. m^3}{3 \cos. m^3} - \frac{\sin. (m - q)}{\cos. (m - q)} - \frac{\sin. (m - q)^3}{3 \cos. (m - q)^3} \right)$$

$$- K^2 (\cos. q^3 \sin. q - \cos. q \sin. q^3) \cdot L \cdot \cos. (m - q)$$

$$- \frac{K^2}{4} (6 \cos. q^2 \sin. q^2 - \sin. q^4) \frac{\sin. (m - q)}{\cos. (m - q)} +$$

$\frac{K^2 \cos. q \sin. q^3 \sin. (m - q)^2}{2 \cos. (m - q)^2} - \frac{K^2 \sin. q^4 \sin. (m - q)^3}{12 \cos. (m - q)^3} \Big] ,$  formule dans laquelle  $Q'$  représente le poids auquel le choc de l'eau peut être censé faire équilibre à chaque instant.

## X V.

On voit qu'étant données les dimensions de la roue & des ailes, la vitesse du fluide, celle de la roue; on voit, dis-je, que le moment de l'impulsion de l'eau, varie à mesure que le nombre des ailes varie. L'équation qui donne le *maximum* de ce moment en général, est extrêmement composée & presque intraitable; c'est pourquoi je me bornerai ici à l'examen d'un cas particulier qui répandra de la lumière sur ce sujet. Supposons que la vitesse de la roue soit nulle, ou du moins puisse être regardée comme incomparablement plus petite que celle du courant; en ce cas, négligeant tous les termes qui contiennent  $u$ , l'équation (C), devient

$Q' \times c = N \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos. m^2}{2} \right) + \frac{N \sin. 2q}{8q}$ ; d'où l'on tire, en égalant  $Q' \times c$  à un *maximum*,  $2q \, dq \cos. 2q - dq \sin. 2q = 0$ , & par conséquent  $q = 0$ . Donc alors le nombre des ailes doit être infini.

Ce résultat n'a rien qui répugne dans la rigueur géométrique; & on doit considérer que conséquemment à la supposition qui sert de base au calcul, les ailes, à quelque point qu'on les multiplie, doivent toujours être regardées comme une suite de plans qui se présentent au choc du fluide sous différentes obliquités, & que par conséquent elles ne forment jamais par leurs extrémités une circonférence continue. Mais dans l'état physique des choses, les molécules du fluide ayant une certaine grosseur, & se gênant les unes les autres dans leurs mouvemens; les extrémités des ailes doivent toujours laisser entre elles un certain intervalle qui permette au fluide d'exercer son action autant qu'il est possible. Le nombre des ailes qu'il convient de donner à une roue en repos, & à plus forte raison à une roue en mouvement,

Qqq ij



pour se procurer la plus grande force qu'il est possible de la part du fluide, est donc toujours fini & limité.

## XVI.

Il est à propos de faire encore sur ce même sujet une observation importante. Les ailes  $Kk$ ,  $Oo$ ,  $Pp$ ,  $Qq$ , &c. qui sont placées au-delà de la verticale  $CI$  tendent à pousser le fluide qui a perdu par le choc une partie considérable de la vitesse qu'il avoit au-devant de la roue. Par conséquent, s'il ne lui reste plus assez de vitesse pour se soustraire au choc des ailes dont on vient de parler, il en résultera une perte de mouvement dans la machine. Le moment d'impulsion des mêmes ailes contre le fluide est exprimé par une quantité analogue à celle des articles XIII & XIV. Ainsi dans ce cas les mêmes moyens qui augmentent le moment d'impulsion du fluide antérieur à la roue, augmentent la résistance du fluide postérieur. Alors il ne faut pas trop multiplier le nombre des ailes. C'est ce qu'on pratique avec raison dans les roues placées sur des rivières; on pousse même ordinairement la précaution trop loin à cet égard. Quant aux roues qui se meuvent dans des coursiers, elles demandent un assez grand nombre d'ailes, sur-tout lorsqu'on a l'attention; comme cela se pratique d'ordinaire, de donner un peu en-delà de la verticale  $CI$  une chute à l'eau pour lui faciliter le moyen de s'échapper & de ne point gêner le mouvement de la roue.

## XVII.

Supposons maintenant que le nombre des ailes soit donné, & cherchons la vitesse que la roue doit prendre pour que l'effet de la machine soit un *maximum*. Ayant multiplié le premier membre de l'équation  $(C)$  par  $v$  vitesse du fardeau enlevé  $Q'$ , & le second par  $\frac{v^2}{a}$  quantité égale à  $v$ , &c. de plus ayant chassé  $K$  par le moyen de la valeur  $\frac{v^2}{v}$ ; on aura une équation de cette forme

$$Q'v = Av + Bv^2 + Cv^3,$$

$A, B, C$  étant des coefficients constans & donnés, mais qui sont différens, selon que le nombre des ailes est plus ou moins grand. Donc pour que l'effet de la machine devienne un *maximum*, il faut que l'on ait

$$Adu + 2Budu + 3Cu^2du = 0,$$

& par conséquent

$$u = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 3 \cdot A \cdot C}}{3C}.$$

### XVIII.

Toute cette théorie a également lieu, soit que la roue soit verticale ou qu'elle ait toute autre position, pourvu que dans tous les cas le fluide puisse être censé agir dans le plan de la roue. Il nous reste maintenant à examiner le cas où la direction du fluide fait un angle avec le plan de la roue. On sent que cet angle doit influencer dans le résultat du calcul de la machine. Je traiterai ce nouveau Problème avec moins de généralité que le précédent, pour parvenir à des résultats plus simples & plus satisfaisans dans la pratique. Mais il sera facile au lecteur d'y appliquer la méthode précédente, & de résoudre ainsi la question avec toute l'étendue dont elle est susceptible.

### XIX.

Soit donc  $BHKL$  (fig. 2) une roue (que je suppose horizontale pour fixer les idées, & parce que ce cas est le plus ordinaire), laquelle est portée par l'arbre vertical  $CD$ ; les ailes  $MNOP$  sont inclinées au plan de cette roue, elle est mue par un courant  $VQ$  qui tombe d'une certaine hauteur, & qui frappe chaque aile à mesure que la ligne de milieu  $AB$  se trouve dans l'horizontale  $CB$  perpendiculaire au plan vertical qui passeroit par la direction  $VQ$  du canal. Les deux angles  $VQe, VQf$  sont les angles de suite formés par le plan de l'aile  $MNOP$  avec la direction du courant. Je considère le fluide comme un simple filet d'eau qui exerce toute son action sur le point  $Q$ .

Fig. 2.

ou du moins sur un espace assez peu étendu pour que tous les points de cet espace puissent être censés tourner avec la même vitesse autour de l'axe  $CD$ .

## XX.

Fig. 3. Sur la direction  $VQ$  (fig. 3) du fluide, je prends la partie  $QH$  pour représenter la vitesse, & je décompose cette vitesse en deux autres  $QF$ ,  $QG$ , dont la première est horizontale & la même que celle du point  $Q$  de l'aile. Le fluide n'agira sur le plan  $ef$ , qu'en vertu de la vitesse  $QG$ . Représentons par  $QR$ , perpendiculaire à  $ef$ , l'impulsion que le fluide exerce ainsi perpendiculairement à  $ef$ ; & décomposons cette force en deux autres, l'une horizontale  $QS$ , l'autre verticale  $QT$  ou perpendiculaire au plan de la roue; la dernière est anéantie, & la première  $QS$  est la seule qui tende à faire tourner la roue. Soient prolongées les droites  $TQ$ ,  $GQ$ ,  $FQ$ , vers  $L$ ,  $X$ ,  $K$ . Supposons

Le Rayon $CQ$ de la roue.....	$= R$ .
L'angle $VQe$ .....	$= m$ .
L'angle $VQL$ .....	$= n$ .
L'angle $LQe =$ .....	$m - n = p$ .
Le sinus total.....	$= 1$ .
La vitesse $QH$ du fluide.....	$= V$ .
Celle $QF$ de la roue.....	$= u$ .
L'aire du plan $ef$ .....	$= A$ .
L'impulsion perpendiculaire que le fluide exerceroit, avec la vitesse $V$ , contre un plan $\beta$ en repos.....	$= F$ .
Le fardeau auquel le choc de l'eau peut faire équilibre à chaque instant.....	$= Q$ .
Sa vitesse.....	$= v$ .
Son bras de levier.....	$= r$ .

Il est clair qu'on aura, en vertu de l'article 11, l'équation

$$\text{force } QR = \frac{F \times A \times (QG)^2 \times (\sin. XQe)^2}{\beta \times v^2}.$$

Les côtés  $QR$ ,  $QS$  de l'angle  $RQS$  étant perpendiculaires; chacun à chacun, aux côtés  $eQ$ ,  $QL$  de l'angle  $eQL$ , ces deux angles sont égaux, & on a par conséquent, force  $QS$

$$= \text{force } QR \times \cos. LQe = \frac{F \times A \times (QG)^2 \times (\sin. XQe)^2 \times \cos. LQe}{\beta \times V^2}.$$

Donc, en vertu de l'équilibre de la force  $QS$  avec le fardeau  $Q$ , on aura

$$\frac{F \times A \times (QG)^2 \times (\sin. XQe)^2 \times \cos. LQe}{\beta \times V^2} \times R = Q \times r.$$

Multipliant le second membre par  $v$ , le premier par  $\frac{v}{R}$  quantité égale à  $v$ , on aura

$$(A) \quad \frac{F \times A \times (QG)^2 \times (\sin. XQe)^2 \times \cos. LQe \times v}{\beta \times V^2} = Q'v,$$

expression générale de l'effet de la machine. Or en élevant par le point  $H$  la verticale  $HZ$ , on a  $HZ = V \cos. n$ ,  $QZ = V \sin. n$ ,  $FZ = V \sin. n - u$ ,  $\sin. FHZ = \frac{FZ}{FH} = \frac{V \sin. n - u}{FH}$ ,  $\cos. FHZ = \frac{HZ}{FH} = \frac{V \cos. n}{FH}$ .

Donc, à cause des angles égaux  $FHZ$ ,  $XQL$ , & de l'angle  $XQe$  égal à la somme des deux angles  $LQe$ ,  $XQL$ ; on aura  $\sin. XQe = \frac{V \cos. n \sin. p + \cos. p (V \sin. n - u)}{FH}$ . Donc

$(QG)^2 \times (\sin. XQe)^2$  ou  $(FH)^2 \times (\sin. XQe)^2 = [V \cos. n \sin. p + \cos. p (V \sin. n - u)]^2$ . L'équation (A) deviendra donc

$$(B) \quad \frac{F \times A \times [V \cos. n \sin. p + \cos. p (V \sin. n - u)]^2 \times \cos. p \times v}{\beta \times V^2} = Q'v;$$

### XXXI.

Pour que l'effet de la machine soit un *maximum*, il faut que  $Q'v$  en soit un; ainsi différentiant l'équation précédente en faisant varier la vitesse  $u$  de la roue, & l'angle  $LQe$  que fait l'aile avec la verticale, on aura

$$(C) \quad 2 (V \cos. n dp \cos. p - V \sin. n dp \sin. p + u dp \sin. p - du \cos. p) u \cos. p + \{V \cos. n \sin. p + V \sin. n$$

496 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

$$\cos. p - u \cos. p) \times (du \cos. p - u dp \sin. p) = 0.$$

Or les deux différentielles  $du$ ,  $dp$  étant indépendantes l'une de l'autre, on aura séparément les deux équations (D) & (E);

$$(D) \quad (-2u \cos. p^2 + V \cos. n \sin. p \cos. p + V \sin. n \cos. p^2 - u \cos. p^2) du = 0,$$

$$(E) \quad 2(Vu \cos. n \cos. p^2 - 2Vu \sin. n \sin. p \cos. p + 2u^2 \sin. p \cos. p - Vu \cos. n \sin. p^2 - Vu \sin. n \sin. p \cos. p + u^2 \sin. p \cos. p) dp = 0.$$

La première donne  $u = \frac{V(\cos. n \sin. p + \sin. n \cos. p)}{3 \cos. p}$ , ou bien  $u = \frac{V \sin. (n + p)}{3 \cos. p}$ , ou bien enfin  $u = \frac{V \sin. m}{3 \cos. p}$ .

Mettons cette valeur de  $u$  dans l'équation (E), & nous trouverons, toutes réductions faites,

$$2 \cos. m \cdot \cos. p = 0;$$

d'où l'on tire, ou  $\cos. p = 0$ , ou  $\cos. m = 0$ . Dans le premier cas, l'angle  $LQe$  seroit droit, ou l'aile  $ef$  seroit posée horizontalement, & l'impulsion du fluide seroit un *minimum*. Dans le second, l'angle  $VQe$  est droit, ou le fluide doit frapper perpendiculairement l'aile  $ef$ , & le choc répond à un *maximum*.

Il suit de-là que l'effet de la machine sera un *maximum*, lorsque 1.<sup>o</sup> le fluide frappera perpendiculairement l'aile  $ef$ , & que 2.<sup>o</sup> la vitesse de la roue sera égale à celle du fluide, divisée par le triple du cosinus de l'angle que fait l'aile  $ef$  avec la verticale.

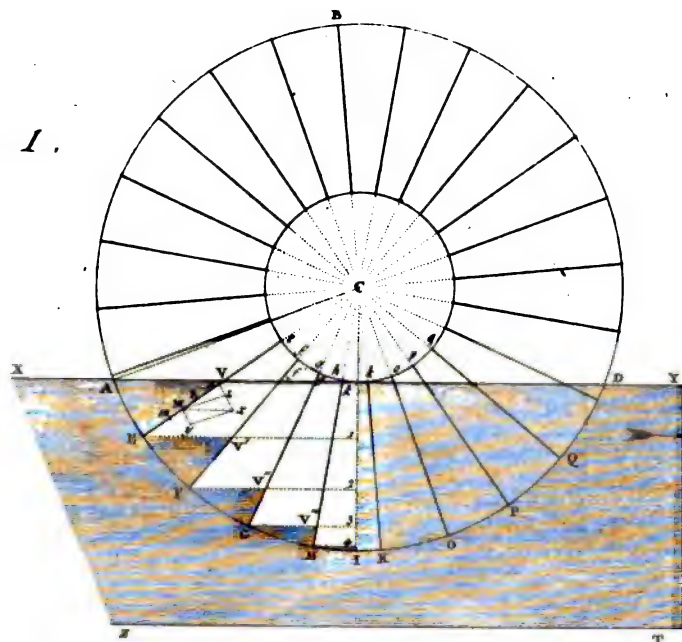
XXII.

En substituant dans l'équation (B), à la place de  $\cos. n$  la valeur  $\sin. p$  dans le cas du plus grand effet, & à la place de  $u$  la valeur  $\frac{V}{3 \cos. p}$  dans le même cas, on trouvera l'équation

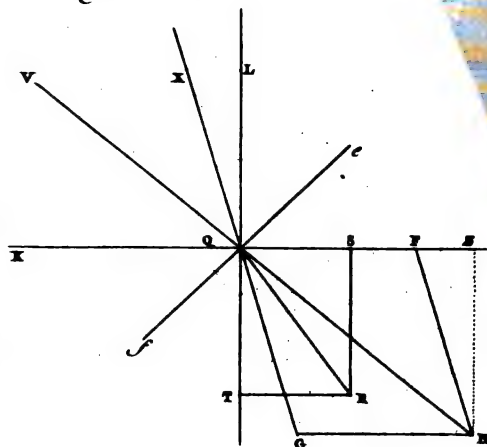
$$(F) \quad Qu = \frac{4 F \times A \times V}{27 \beta},$$

qui

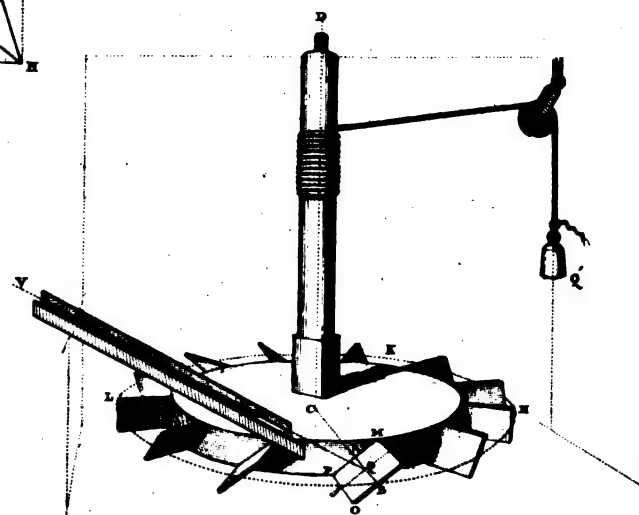
*Fig. 1.*



*Fig. 3*



*Fig. 2.*



1000

qui est l'expression du plus grand effet que la machine peut produire.

Si l'on fait la surface donnée  $\beta = A$ , & qu'on nomme  $H$  la hauteur due à la vitesse  $V$  du fluide, on aura sensiblement, comme on sait,  $F = 2 A.H$ . Ainsi  $Q'v = \frac{8 A.H}{27} \times V$ . D'où il suit que quand la machine produit son plus grand effet, elle peut imprimer à un poids d'eau, représenté par  $\frac{8 A.H}{27}$ , la vitesse  $V$  du fluide, ou, ce qui revient au même, elle peut donner à un poids exprimé par  $A.H$ , les  $\frac{8}{27}$  de la vitesse du courant.

Le même effet peut s'exprimer encore d'une autre manière qui en donnera une idée plus nette. Soit nommée  $M$  la quantité d'eau qui frappe l'aile en un temps *donné*, lequel sert d'unité dans l'estimation de la vitesse  $V$ . Il est clair qu'on aura  $A \times V = M$ .

Ainsi, au lieu de l'équation  $Q'v = \frac{8 A.H}{27} \times V$ , on aura  $Q'v = M \times \frac{8}{27} H$ . D'où l'on voit que le plus grand effet de la machine se réduit à élever la quantité d'eau qui la fait mouvoir, aux  $\frac{8}{27}$  de la hauteur due à la vitesse du courant.

### XXIII.

Dans la pratique, les ailes des roues horizontales dont nous venons de parler, ne sont pas exactement planes, comme nous l'avons supposé; mais on leur donne une petite courbure concave vers le fluide, en forme de cuillier, pour que l'eau agisse non-seulement par son choc, mais encore par une partie de son poids. Les résultats des calculs précédens doivent donc être un peu modifiés relativement à cette circonstance. Du reste il sera toujours facile de résoudre directement le Problème, lorsqu'on connoîtra la courbure des ailes.



C O M P A R A I S O N  
DES  
OBSERVATIONS DU PASSAGE DE VÉNUS,  
FAITES EN AMÉRIQUE,  
*Avec celles qui ont été faites dans le nord de l'Europe.*

Par M. LE MONNIER.

Assemblée  
publique  
du 15 Nov.  
1769.

**L**E dernier passage de Vénus sur le Soleil, observé le 3 Juin au soir, a été regardé à juste titre par les Philosophes de ce siècle, comme aussi utile au moins que celui de 1761, pour vérifier la distance du Soleil à la Terre. On peut joindre aux raisons vulgaires qu'on en a alléguées celles qui regardent les causes physiques : en effet, les deux hypothèses qu'on a proposées sur la distance du Soleil à la Terre, lesquelles ont pour fondement les observations du passage de Vénus sur le Soleil ; faites en 1761, m'ont toujours paru fondées sur quelques principes peu certains ; car on n'a nullement songé à corriger les instans des contacts des deux disques de Vénus & du Soleil, lorsque ces astres ont paru en quelques contrées aux environs de l'horizon. Cependant l'Optique nous apprend que les rayons des bords supérieur & inférieur du Soleil s'y décomposent, ce que diverses expériences sur les foyers des grands verres objectifs ont pleinement confirmé. On peut dire aussi que chaque hypothèse sur la parallaxe horizontale du Soleil a été bâtie sur des positions géographiques arbitraires, parce que les Observateurs, dans leurs voyages, ont négligé pour la plupart d'observer des occultations d'Etoiles sous la Lune, ou bien le lieu de la Lune au méridien, ce que l'on pourroit réitérer plusieurs jours de suite, à l'aide de l'instrument des passages.

Il faut convenir néanmoins que l'année 1761 nous a présenté un phénomène des plus rares & très-capable de rapprocher les

limites assignées à la distance du Soleil; que d'ailleurs les travaux immenses faits par les Astronomes depuis ce temps-là, suffiroient pour décider la question, si l'on s'attachoit sur-tout à perfectionner la géographie des Villes & des stations où ont séjourné les Observateurs envoyés dans les différentes parties du monde.

Nous nous trouvons aujourd'hui plus à portée de connoître cette distance par une voie naturellement plus prompte; savoir par le calcul du passage réitéré de Vénus sur le Soleil, qui a été vu le 3 Juin de cette année, & qui ne sera plus visible en Juin d'ici à une longue suite de générations: ce nouveau calcul nous donne le moyen de lever bien des incertitudes dans une recherche aussi subtile & aussi délicate qu'est la distance du Soleil à la Terre.

Avant que d'entrer en matière, je dois faire cette remarque importante, qu'on a su distinguer cette année, ce qui n'avoit pas été remarqué en 1761, le Soleil étant ici pour lors trop élevé sur l'horizon; savoir deux sortes de contacts internes un peu avant le coucher du Soleil. Les réfractions variables s'y sont mêlées & ont dû nuire, il est vrai, à l'intervalle de temps qu'on vouloit mesurer entre ces deux contacts internes, parce que dans les temps orageux la circonférence du Soleil est plus défigurée que par un temps fort serein aux environs de l'horizon, & qu'ainsi les Observateurs se sont trouvés par-là dans le cas de partager leur attention. Il y a d'ailleurs une ancienne règle prescrite par Halley pour les contacts, que plusieurs ont adoptée, & qui n'a même été par quelques-uns que trop soigneusement observée; savoir de ne juger la planète absolument entrée sur le disque du Soleil que lorsque le filet de lumière du Soleil leur a paru à l'extrémité commune du rayon des deux disques ou du cercle osculateur. Cela est sensiblement vrai lorsque le Soleil paroît à de très-grandes hauteurs, comme il a été vu à la Martinique & à Saint-Domingue. Mais un jet de rayon de lumière est bien incertain dans la circonférence irrégulière du Soleil, telle qu'on l'a aperçue aux environs de l'horizon le 3 Juin 1769 dans les parties occidentales de l'Europe: aussi les dernières observations en ont-elles fait juger autrement, & sur-tout en France, à Londres & à Stockholm, où les contacts de Vénus au Soleil ont paru se

faire au moment de son entrée, proche le bord supérieur du disque, lequel est terminé par divers rayons que l'atmosphère a rendu par leur obliquité inégalement réfrangibles.

La première entrée de Vénus sur le Soleil étant pénible pour un seul Observateur, parce que l'heure en est vague & incertaine, & que son œil s'affoiblit & se fatigue, elle n'a été regardée souvent que comme une phase préparatoire aux observations suivantes. La Planète qui a environ une minute de diamètre, emploie 18 à 19 minutes d'heure à entrer tout-à-fait sur le disque du Soleil: si donc les observations déposent qu'entre les instans du double contact intérieur dont je vais parler, il y a près de 2 minutes de temps écoulé, ce seroit 5 à 6 secondes pour l'effet de la décomposition des rayons à la hauteur où a paru le Soleil; mais si ceux qui ont aperçu la circonférence du Soleil moins irrégulière n'ont guère trouvé que la moitié ou les deux tiers de cette durée entre les deux contacts internes; il en faut conclure que l'effet de la décomposition des rayons ne s'est pas étendu au-delà de 3 à 4 secondes.

Ainsi lorsque nous avons vu Vénus entrer sur le Soleil le 3 Juin 1769 par la partie supérieure de son disque, la circonférence du Soleil a paru complète & sans échancrure lors du premier contact intérieur, mais elle étoit terminée par d'autres rayons que celle qui a été jugée peu de temps après appartenir au point de coïncidence des deux disques ou du cercle oculateur; c'est-à-dire, lorsque l'on a cru distinguer le premier filet de lumière qui séparoit les deux disques.

Les observations de Nanci, de Rouen & de l'Orient, celles de Saint-Hubert & de Caen, déposent toutes en faveur de ce premier contact interne, & comme le Soleil y étoit plus bas qu'à l'Observatoire d'Angleterre, la durée entre ces premiers contacts internes, & ce qui a été vu par le filet de lumière, devient plus longue qu'en Angleterre, où la différence ne s'étend qu'à près d'une minute ou  $1\frac{2}{3}$  de temps écoulé aux horloges à pendule. A la vérité le Soleil étoit à Stockholm beaucoup plus bas, mais la sphère y étant plus oblique & le temps moins orageux, les réfractions horizontales pourroient y avoir été moins variables,

& par cette raison ont dû moins affecter la vision : aussi le temps écoulé entre les deux contacts internes n'a guère été désigné que par un seul Observateur, savoir de 84" écoulées à la pendule vers 8<sup>h</sup> 43' du soir.

Ces phénomènes doivent donc jeter quelque défiance sur l'emploi qu'on a fait en 1761 des contacts vus au lever du Soleil, & j'avois déjà assez averti qu'ils avoient besoin de corrections provenant des causes physiques que les loix d'Optique & les micromètres objectifs avoient déjà indiquées il y a plus de vingt ans, sans néanmoins que l'on ait pu produire rien d'aussi avantageux que les passages de Vénus pour en assigner les limites.

Revenons à notre sujet qui s'étend à la recherche de la parallaxe ou distance du Soleil par les observations faites dans nos Colonies d'Amérique, & par celles de Pétersbourg & d'une autre ville située plus au nord. On a aperçu dans celle-ci, outre la sortie du disque, l'entrée ou le premier contact interne, & par conséquent la durée entière du passage de Vénus sur le disque du Soleil. Cette ville, nommée Cajanebourg est déjà connue par l'observation de Vénus de l'année 1761. Le ciel y a été encore favorable cette année-ci : elle est située sous 64<sup>d</sup> 13' 30" de latitude septentrionale, & un peu moins avancée vers l'Orient que n'est Pétersbourg, n'étant qu'à 1<sup>h</sup> 41' 30" du méridien de Paris.

La séparation des deux disques ou sortie totale a été vue à Pétersbourg le 4 Juin 17' 52'  $\frac{1}{2}$  après le contact interne, celui-ci s'étant fait à 3<sup>h</sup> 25' 45" du matin, & à Cajanebourg à 3<sup>h</sup> 14' 27" : ce sont-là les deux seules villes du nord connues jusqu'ici, où la sortie ait été vue par un temps fort serein. D'autres observations faites encore plus au nord, pourront parvenir à notre connoissance, & nous y aurons égard ; mais à Cajanebourg on a vu l'entrée où le contact intérieur, comme je l'ai dit, & il étoit alors 9<sup>h</sup> 20' 45"  $\frac{1}{2}$  du soir.

La sortie observée dans le nord est très-avantageuse pour reconnoître l'effet des parallaxes, en comparant les durées avec l'entrée observée par M. Pingré à Saint-Domingue, qui est la plus occidentale de nos deux îles de l'Amérique, où les seules observations de l'entrée, ainsi qu'en France, ont été faites. Nos

observations d'Europe donnent toutes l'entrée affectée de l'effet de la parallaxe qui a dû y être beaucoup plus grande qu'à Saint-Domingue, où le Soleil étoit élevé de  $51^{\circ} \frac{1}{2}$  ou environ. Dans l'un & l'autre cas, l'effet de la parallaxe a dû accélérer l'entrée, mais comme cet effet a dû être d'une plus courte durée à Saint-Domingue qu'en Europe; il est aisé de discerner quel est le choix d'une hypothèse de parallaxe, ou quelle est la parallaxe du Soleil la plus approchante de la vraie qu'il faut adopter.

Je suppose que l'œil placé dans le Soleil apercevrait le diamètre de la Terre sous un angle de  $7'' \frac{1}{2}$ , ce que l'on nomme autrement la parallaxe horizontale du Soleil, on trouve en ce cas, réduisant toutes les observations au méridien de Paris, les entrées vues, soit à Saint-Domingue, soit en Europe, déduites des observations immédiates, comme il suit:

$7^h 34' 09'' \frac{1}{2}$ à Saint-Domingue, & le contact intérieur observé	$2^h 44' 44''$
$7. 35. 16.$ à Brest. ....	$7. 11. 35.$
$7. 34. 57.$ à Greenwich ..... 1. <sup>er</sup> contact extérieur	$7. 20. 10.$
$7. 35. 48 \frac{1}{2}$ à Stockolm ..... 2. <sup>er</sup> contact extérieur	$8. 23. 55.$
$7. 35. 50.$ à Cajanebourg ..... contact intérieur observé	$9. 20. 45 \frac{1}{2}$

Si l'on eût adopté la parallaxe horizontale de  $10''$ , on eût trouvé une différence un peu plus grande entre les résultats de ces entrées du centre de Vénus, vues du centre de la Terre, supposée transparente. Le calcul m'a donné ce qui suit:

$7^h 35' 01'' \frac{1}{2}$ .... à Saint-Domingue ...	$74^d 10'$ à l'ouest,
$7. 37. 35.$ .... Brest.	
$7. 37. 03.$ .... Greenwich.	
$7. 37. 41.$ .... Stockolm.	
$7. 37. 46 \frac{1}{2}$ .... Cajanebourg.	

J'ai choisi à Greenwich & à Stockolm les premiers contacts extérieurs, parce que le Soleil y étoit plus élevé sur l'horizon, & que le ciel y ayant été plus serein, trois à quatre Observateurs s'y sont réunis pour mieux saisir l'instant de ces premiers contacts; à Cajanebourg le second contact ou intérieur y a été vu au défaut du premier, & le Soleil étoit pour lors élevé de deux degrés sur l'horizon &, comme nous en avons déjà averti, la grande

obliquité de la sphère a pu y occasionner des réfractions moins variables \*. En effet, cette observation paroît s'accorder à  $1'' \frac{1}{2}$  &  $5'' \frac{1}{2}$  près avec le premier contact vu à Stockholm ; mais outre qu'il nous reste à en éclaircir la longitude géographique, nous ne voyons pas assez lequel des deux espèces de contacts intérieurs, dont j'ai déjà averti, y aura été observé. La sortie est bien autrement décisive, le Soleil étant élevé le 4 Juin au matin de 6 degrés sur l'horizon à l'instant de la séparation des deux disques.

Dans la supposition des moyennes parallaxes horizontales du Soleil de  $7'' \frac{1}{2}$  & de  $10''$ , il n'y avoit que  $2' 16''$  dans le premier cas, & il y auroit  $3' 4'' \frac{3}{4}$  dans le second cas, dont l'entrée auroit été accélérée à Saint-Domingue : en Europe & sur-tout à Cajanebourg, on trouve  $5' 50''$  &  $7' 51''$  dans l'un & l'autre cas ; ainsi il y a quelque'avantage à comparer ces différences, puisqu'au moins une minute de temps, dont l'une excède l'autre, est très-sensible aux Observateurs, & que d'ailleurs ceux d'Europe que j'ai choisis, ont vu le Soleil plus élevé sur l'horizon que si les seconds contacts eussent été employés uniquement : ils n'ont pu errer que de quelques secondes, comme la Table ci-jointe de leurs observations en fait foi.

Mais si l'on considère les sorties observées dans les deux villes du Nord dont j'ai parlé, l'avantage de comparer les durées devient plus intéressant, en supposant la longitude géographique du Cap-François à Saint-Domingue donnée ; car nous n'avons plus guère besoin en ce cas de celle de Cajanebourg, où les parallaxes, déjà très-grandes, ont dû accélérer l'entrée & retarder la sortie. Ces durées sont à Cajanebourg dans les deux hypothèses de parallaxes de  $6^h 01' 3''$ , & de  $5^h 57' 29'' \frac{1}{2}$  : ainsi  $2'' \frac{1}{2}$  de diminution dans la parallaxe horizontale du Soleil a dû allonger la durée d'environ  $3' \frac{1}{2}$  de temps.

Comparant l'entrée observée à Saint-Domingue avec la sortie vue à Cajanebourg, on trouve d'autres durées plus longues & qui semblent mieux s'accorder avec la parallaxe du Soleil de  $7'' \frac{1}{2}$ .

Or la preuve que nous n'avons pas excédé les limites géo-

\* La chaleur y diminue par des degrés moins sensibles que lorsque le Soleil s'approche plus rapidement de l'horizon.

graphiques dans les observations & résultats rapportés ci-dessus; & qu'ainsi la parallaxe de  $7'' \frac{1}{2}$  n'est pas absolument trop foible; c'est que la durée vraie se trouve encore plus grande par l'observation de la sortie de Vénus vûe à Pétersbourg, où le Soleil étoit élevé à l'instant de la séparation des deux disques de  $4^d 5'$ .

Il nous reste à comparer dans la suite les observations qu'on a dû faire aux Indes orientales & dans la mer du sud; mais il paroît déjà qu'il faut s'écarter de la parallaxe moyenne & usitée de 10 secondes pour le Soleil, laquelle nous rapproche trop de cet astre.

*On a supposé la longitude du lieu de l'observation à Saint-Domingue  $74^d 10'$  à l'ouest du Méridien de Paris; mais il paroît que le Cap-François doit être environ  $0^d 15'$  plus à l'ouest; ce qu'il sera nécessaire de vérifier dans la suite.*



**MANIÈRE**

# MANIÈRE DE DÉTERMINER L'ERREUR DES TABLES DE VÉNUS,

*Indépendamment des effets des parallaxes du SOLEIL  
& de VÉNUS, dans l'observation du mois de  
Juin 1769.*

Par M. LE MONNIER.

COMME M. Pingré m'a communiqué dès le mois d'Août 28 Nov. 1769. dernier, par une Lettre écrite de Saint-Domingue, l'instant des deux contacts extérieur & intérieur de Vénus sur le disque du Soleil, j'ai cherché le point de la circonférence du disque où a dû se faire cette entrée: ayant reconnu en même temps que l'angle parallaxique surpassoit en ce moment l'angle droit, & qu'il étoit obtus de quelques degrés, j'en ai conclu que les parallaxes de latitudes, négatives d'ailleurs, étoient peu considérables, & que la différence de celle du Soleil à celle de Vénus, se pouvoit connoître très-exactement; car elle étoit de — 0",63 dans le cas d'une parallaxe moyenne du Soleil de 7" $\frac{1}{2}$ , & presque la même ou — 0",84, si au lieu de 7" $\frac{1}{2}$  on prend 10". J'aurois bien désiré pour un premier essai que M. Pingré nous eût indiqué le degré de la circonférence du limbe du Soleil où s'est fait l'un ou l'autre contact: j'y ai suppléé d'abord par une autre observation faite à la Martinique par le P. Christophle, qui muni d'excellens instrumens, tels que M. Pingré en convient lui-même dans sa Lettre du 12 Juin 1769, a déterminé le point de contact apparent lors de la première entrée, à 35<sup>d</sup> 30' au-dessus de la ligne horizontale du côté de l'est. Ici ce premier contact s'est fait presque au zénit du disque, & il eût été dangereux de l'observer imparfaitement, parce que l'erreur d'un degré dans la circonférence du limbe entraînoit avec soi une trop grande variation dans les

*Mém. 1769.*

. Sff



différences en longitudes & latitudes apparentes de Vénus au Soleil. Ces données suffisent, comme l'on voit, pour connoître, à l'aide de la durée vue en Europe, quelles sont les erreurs des Tables de Vénus, tant en longitude qu'en latitude, & je m'en étois tenu jusqu'ici à ces résultats, dont j'ai fait usage.

Ayant rendu compte le 22 de ce mois de Novembre à l'assemblée de l'Académie, des observations faites au nord dans la Lapponie Moscovite, telles que je les ai extraites de deux ouvrages ou feuilles imprimées à Pétersbourg, & dont j'avois eu communication l'assemblée précédente, j'ai dit que la durée avoit été observée à Kola, ce qui sert de confirmation à celle qui a été vue à Cajanebourg: j'ai rendu compte aussi à l'Académie qui m'en avoit chargé, de l'autre observation faite à Ponoï sous une latitude moins septentrionale, laquelle, quant à la durée, est imparfaite, l'entrée de Vénus sur le Soleil y ayant été d'abord observée, & la fin de l'éclipse du Soleil après les pluies qui y ont fait manquer la sortie de Vénus du disque. Or l'Auteur de cette observation (M. Mallet) a cherché d'abord à mesurer la plus courte distance des bords du Soleil & de Vénus, y ayant employé un micromètre objectif appliqué à un télescope Grégorien de 24 pouces, de la construction de M. Short. Les dernières phases mesurées à minuit & trois quarts, s'accordent toutes à une partie près de la division de son instrument, mais nous ignorons la loi de la réfraction qui a dû accourcir cette distance apparente de  $4\frac{3}{4}$ . Je trouve par les Tables des réfractions dont je me sers, 37 à 38 secondes d'accourcissement; d'où il est visible qu'on ne peut guère employer cette observation & la réduire à l'instant de la plus courte distance, qui s'est fait 18 minutes d'heure plus tard. Je ne la rejette pas assurément, & j'invite même ceux qui ont traité la théorie des réfractions, à assigner précisément s'ils le peuvent, la différence des réfractions qui a dû accourcir cette distance, mais j'ai renoncé jusqu'à présent à tirer quelque utilité de ces résultats pour vérifier la parallaxe.

On voit en effet que la parallaxe de latitude étant presque nulle à la Martinique & à S.<sup>t</sup>-Domingue, elle a dû être toute absorbée à Ponoï, par l'effet qu'elle a occasionné dans la plus courte

distance, & qu'un Observateur placé plus avant vers le pôle, où il auroit vu Vénus plus élevée & dégagée des réfractions horizontales, eût été bien mieux situé pour cette recherche qu'on ne l'étoit à Ponoï. Je vais rendre compte à présent de quelques autres observations plus importantes qui feront mieux distinguer les effets des parallaxes.

La méthode que je propose consiste à rendre nuls ces effets; sinon en latitude, puisque nous le savons déjà par ce qui a été vu à S.<sup>t</sup>-Domingue, au moins ces parallaxes nulles en longitude, ce qui achèvera de nous donner l'erreur des Tables de Vénus, & nous mettra par conséquent en état de distinguer laquelle des deux hypothèses de  $10''$  ou de  $7''\frac{1}{2}$  doit être rejetée, & ce qui convient enfin à la vraie parallaxe moyenne du Soleil. Il faut pour cet effet éviter les réfractions, sur-tout s'il s'agit d'observations faites aux environs de l'horizon. En 1753, Mercure a été observé à Meudon par des distances prises au bord vertical du Soleil, & l'on auroit pu observer de la même manière Vénus à Ponoï & même très-exactement à l'aide du micromètre objectif, si les fabricateurs ordinaires avoient soin d'y adapter un niveau à bulle d'air, ainsi qu'il s'en trouve un parallèle au fil, & qui est extérieur à la lunette de mon micromètre. J'aurois bien désiré qu'on eût employé en Lapponie un pareil instrument, ou malgré les nuées on eût mesuré différentes phases dans des plans verticaux. Quoi qu'il en soit, j'ai recherché la vraie longitude de Vénus, indépendamment de la parallaxe, par des observations faites au quart-de-cercle à l'aide de la pendule, méthode assez vulgaire, mais dont le résultat fait l'éloge de l'Observateur; car il a observé le passage des deux bords du Soleil au fil vertical, de manière que l'un des bords sert de confirmation à ce qui a été observé pour lors, lorsqu'on les compare séparément avec le passage de Vénus.

A Ponoï, le cercle de longitude se confondoit avec le cercle vertical au temps de cette observation, parce que je trouve que le pôle de l'Écliptique étoit à peine  $0^d 31'$  à l'occident &  $33'$  au-delà du zénit; ainsi le vertical se confondoit alors presque absolument avec le cercle de longitude, & les parallaxes de longitude s'évanouissent en pareil cas.

M. Mallet a trouvé que le Soleil passoit en  $2' 20''$  au fil vertical de son quart-de-cercle, & que son centre a suivi de  $7''\frac{1}{4}$  de temps celui de Vénus au même fil. L'angle au pôle auroit donc été de  $109''$  de degré; ce qui donne précisément  $100''$  pour la différence vraie en longitude entre Vénus & le Soleil à  $13^h 08' 17''$  de temps vrai à Ponoï: c'est à Paris à  $10^h 37' 00''$ ; & si l'on suppose la vraie longitude du Soleil corrigée sur mes observations pour le même instant, de  $73^d 47' 32''$ , la longitude géocentrique de Vénus sera  $73^d 45' 52''$ , ou bien  $8^f 13^d 46' 52''\frac{1}{4}$  héliocentrique; c'est  $58''\frac{1}{2}$  plus avancé que selon les Tables de Halley. Cette erreur des Tables, que l'on ne regarde pas encore ici comme absolue, donne, à ce qu'il semble, une distance des centres trop petite: peut-être faudra-t-il conclure autrement le passage du centre de Vénus au fil vertical, & diminuer les  $7''\frac{1}{4}$ , à cause qu'on n'a vu à ce fil que le premier bord de Vénus.

Par un premier essai, je trouve la vraie durée du passage de Vénus sur le Soleil avec la parallaxe horizontale de  $7''\frac{1}{2}$ , de  $6^h 6'$ ; au lieu qu'entre Saint-Domingue & Cajanebourg, ou bien par Cajanebourg même, la durée est  $6^h 2' 36''\frac{1}{2}$  ou  $6^h 1' 03''$ . Cela s'éloigne bien moins que si l'on employoit la parallaxe moyenne du Soleil de 10 secondes, laquelle donneroit  $6^h 00''\frac{1}{4}$  &  $5^h 57'\frac{1}{2}$ .



*COMPARAISON  
DU PASSAGE DE VÉNUS,  
OBSERVÉ À BORDEAUX,  
AVEC LES OBSERVATIONS FAITES A PARIS.*

Par M. DE LA LANDE.

**J'**AVOIS engagé M. l'Abbé Faugere, qui demeure à Bordeaux, à faire l'observation de ce passage, & il s'y prépara 14<sup>e</sup> Juin 1769. de la manière la plus exacte. Je lui avois choisi un télescope de 32 pouces, fait à Paris par M. Gonichon, & une pendule de M. Lepaute; de son côté il avoit fait exécuter lui-même un quart-de-cercle de trois pieds & demi de rayon, qu'il avoit divisé avec soin, & auquel il avoit appliqué une bonne lunette.

La ville de Bordeaux ne lui fournissant pas de lieu commode vers le couchant, il se transporta chez M. de Secondat, fils du célèbre Président de Montequieux, qui desiroit que cette observation fut faite avec soin dans la terre de la Brede. M. Faugere se plaça dans une ferme située à 8800 toises au sud de Bordeaux, & 400 toises à l'orient du Château-Trompette. Il en a déterminé la situation exacte par des observations faites aux environs dans des lieux d'où l'on découvre les Tours de Bordeaux, & d'où il a observé les angles avec la méridienne; la carte nouvellement levée par les Ingénieurs-Géographes lui a fait connoître aussi la position de son Observatoire, dont la latitude se trouve de  $44^{\text{d}} 40' 43''$ , & la distance en temps au méridien de Paris  $1^{\text{h}} 36^{\text{m}} \frac{1}{2}$  à l'occident, en supposant que la longitude & la latitude de Bordeaux, déterminées par les triangles de la France, répondent au Château-Trompette, comme l'endroit de la ville le plus apparent & le plus commode pour les observations des triangles.

Contact  
intérieur.

Par des hauteurs correspondantes le 2 & le 4, M. Faugere a trouvé qu'au moment du contact intérieur il étoit  $7^h 27' 16''$  de temps vrai, ce qui fait  $7^h 38' 52''\frac{1}{2}$  au méridien de Paris.

Mais pour comparer cette observation avec celle de Paris, d'une manière rigoureuse, il étoit nécessaire de calculer l'effet de la parallaxe pour Bordeaux, ainsi que je l'avois calculé pour Paris, en rendant compte à l'Académie de mes observations. Je trouve à l'heure de l'observation, la hauteur vraie du centre de Vénus dans l'endroit où M. Faugere observoit, de  $1^d 37' 55''$ , & l'angle parallactique  $41^d 23' 51''$ , & par la méthode expliquée ci-dessus à l'occasion de mes propres observations, j'ai trouvé l'effet de la parallaxe en temps, plus petit de  $2''$  qu'à Paris, ou de  $0^h 7' 9''$  de temps, en supposant la parallaxe moyenne du Soleil de  $8'',8$ ; d'où il suit qu'il faut ôter  $2''$  du temps trouvé ci-dessus, pour avoir celui qu'on auroit dû observer à Paris, & l'on a  $7^h 38' 50''\frac{3}{4}$ ; c'est la même seconde qu'a trouvé M. Maraldi;  $2''\frac{3}{4}$  de moins que M. Cassini,  $7''\frac{1}{2}$  de plus que M. Messier,  $5''\frac{3}{4}$  de plus que M.<sup>r</sup> de Fouchy, de Bory & Bailly, à la Meute; en sorte que cette observation de M. Faugere tient le milieu entre toutes celles de Paris, & me fait croire de plus en plus que le contact intérieur ne s'éloigne pas de  $7^h 38' 45''$ , ce qui donne le temps vrai de la conjonction à  $10^h 14' 35''$  dans  $2^f 13^d 27' 22''$ , avec  $10' 13'',7$  de latitude boréale. C'est une chose assez singulière que les Tables de M. Cassini donnent à  $2''$  près cette longitude observée de Vénus, ou  $8^f 13^d 27' 24''$ : cet accord des Tables avec l'observation est aussi rare dans l'Astronomie que satisfaisant pour l'Astronome.

Je suppose ici le lieu du Soleil tel qu'il est dans les Tables de M. de la Caille, mais les Tables du Soleil de M. Cassini, donnent  $2^f 13^d 26' 46''$ ; c'est-à-dire  $38''$  de moins, quoique la somme de toutes les petites équations employées par M. de la Caille n'ajoute que  $13''$  au lieu du Soleil dans ses nouvelles Tables.

Le mouvement diurne héliocentrique, relatif de Vénus au Soleil, étant de  $37'$ , les  $38''$  de différence entre les Tables

du Soleil, produiroient plus de 24' d'erreur sur le temps de la conjonction; c'est pour cela qu'en prédifant le passage de 1761 dans la *Connoissance des Temps*, pour avoir corrigé le lieu du Soleil, je m'écartai de l'observation beaucoup plus que ceux qui l'avoient annoncé sur les anciennes Tables, & sans aucune correction (*Mémoires de l'Académie, année 1761, page 107*).

L'observation du contact m'a servi à rectifier sur la Carte du passage de Vénus que j'ai publiée en 1764, la situation du pôle d'entrée ou du centre des cercles qui joignent tous les pays où l'entrée doit paroître au même instant. En effet, puisqu'au moment du contact l'angle horaire à Paris étoit de  $114^{\circ} 51'$ , & l'angle de l'orbite avec le rayon qui joignoit les centres de Vénus & du Soleil  $49^{\circ} 48'$ , il est facile de trouver que le point de la projection terrestre, qui étoit placé sur le même rayon, avoit  $49^{\circ} 48'$  de latitude, & qu'il étoit à  $4^{\circ} 23'$  à l'orient de Paris, ce qui tombe à très-peu près sur la ville de Trèves. Ainsi l'on peut tracer sur une Carte de France des cercles qui servent à reconnoître dans tout le Royaume l'effet des parallaxes, avec la précision des dixièmes de secondes. J'ai d'abord reconnu qu'en une seconde de temps Vénus faisant  $\frac{1}{15}$  de seconde sur son orbite, se rapprochoit du centre du Soleil d'une quantité qui étoit sur la projection, le sinus verse de  $3^{\circ} 51'$ ; ainsi décrivant un cercle dont le centre soit à Trèves, & qui ait quatre-vingt-seize lieues ou  $3^{\circ} 51'$  de rayon, l'on marquera tous les pays où l'effet de la parallaxe a été plus petit d'une seconde que le plus grand effet possible au pôle d'entrée.

Mais les sinus verses étant comme les carrés des arcs, les largeurs de ces cercles d'entrée diminuent très-rapidement, en sorte que le cercle de  $2''$  n'a que  $5^{\circ} 36'$  de rayon. A l'égard de Bordeaux qui est à  $6^{\circ} 50'$  environ de Trèves, j'ai reconnu facilement sur la Carte de France, que l'effet de la parallaxe y étoit de  $3''$  plus petit qu'à Bordeaux, & par conséquent  $2''$  plus petit qu'à Paris, ce qui est conforme au calcul précédent.

Depuis la lecture de ce Mémoire, M. de la Roque, Inspecteur de la jauge des Bâtimens de mer à Bordeaux, m'a envoyé une

512 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

observation qu'il a faite avec un télescope grégorien de 27 pouces de longueur, il a trouvé le contact intérieur à  $7^h 27' 5''$ , le commencement de l'éclipse de Soleil le 4 à  $6^h 30' 49''$  du matin; la fin à  $8^h 4' 11''$ : il a réglé son horloge sur des hauteurs correspondantes, prises avec un quart-de-cercle de bois de 39 pouces de rayon, ainsi que j'y ai souvent invité dans mes écrits les Amateurs & les Curieux. Il me donne lieu de croire que l'Astronomie sera bientôt cultivée avec soin à Bordeaux, en m'apprenant que la Ville fait bâtir une maison pour l'Académie, dans laquelle il y aura un Observatoire de 20 pieds dans œuvre & de 75 pieds de hauteur, & cela à Tourny, qui est le quartier le plus élevé & le plus beau de la ville.



*OBSERVATION*

*OBSERVATION DU PASSAGE DE VÉNUS;  
SUR LE DISQUE DU SOLEIL,  
FAITE  
AU CAP FRANÇOIS, ISLE DE S.<sup>T</sup> DOMINGUE;*

*Le 3 Juin 1769.*

Par M. P I N G R É.

**L**E lieu que nous avons jugé le plus favorable pour y établir un observatoire, est situé hors de la ville du Cap françois au nord, par la latitude boréale de  $19^{\text{d}} 57' 3''$ ; quant à la longitude, je n'en puis dire pour le présent autre chose, sinon que ce lieu est de 4 heures 58 à 59 minutes plus occidental que le méridien de l'Observatoire royal de Paris. C'est un pavillon quarré-long, n'ayant qu'une simple salle au rez-de-chaussée, ouverte à tous les vents par un très-grand nombre de croisées; on l'appeloit la *Maison-rouge*; cette maison est située sur un petit morne, & une gorge entre deux montagnes fort élevées permet d'y suivre le Soleil en Juin & Juillet jusque vers six heures du soir. Par-tout ailleurs dans la ville & aux environs, on cesse de voir le Soleil cinq quarts d'heure au moins avant l'heure de son véritable coucher.

Presque tous les jours que nous avons passés au Cap, depuis le 23 Mai jusqu'au 16 Juin, se sont ressemblés: le matin, le ciel étoit parfaitement serein; peu après midi les nuages commençoient à sortir des montagnes qui sont à l'ouest de la ville, bientôt le ciel se couvrait, le tonnerre rouloit au loin, s'approchoit peu à peu sur nos têtes, & l'orage duroit fort avant dans la nuit dont les commencemens n'étoient éclairés que par la continuité & la vivacité des éclairs. Tel est, nous disoit-on, le temps qu'il fait ordinairement au Cap dans cette saison. Il y eut quelques jours privilégiés, le 3 de Juin fut heureusement de ce nombre: les nuages, contre

*Mém. 1769.*

*T t t*



la coutume, s'étoient formés dès le matin, mais ils ne commençoient à couvrir le ciel que vers les cinq heures & demie du soir.

Pour régler la pendule, je prenois des hauteurs du Soleil avant & après midi, avec un quart-de-cercle de 2 pieds de rayon, appartenant à l'Académie. M. de Fleurieu, Officier des vaisseaux du Roi, commandant la Frégate l'*Isis*, employoit un quart-de-cercle anglois de Cisson, d'environ 15 à 16 pouces de rayon : cet instrument étoit très-bien travaillé, il paroissoit fort simple aux yeux de M. de Fleurieu, je n'en jugeois pas de même : j'ai soupçonné d'abord & je me suis ensuite affermi de plus en plus dans l'idée que les différences que nous trouvions quelquefois entre les résultats de nos hauteurs correspondantes respectives, étoient dûes, au moins en grande partie, à la délicatesse de cet instrument.

Le 30 Mai au matin, nous avions pris un assez grand nombre de hauteurs ; je ne pus prendre le soir que trois correspondantes, équivalentes à six, parce que je prenois le passage du bord du disque par deux fils horizontaux distans l'un de l'autre de près de 2 minutes. Je trouvai

Midi vrai à..... 11<sup>h</sup> 57' 40" 40".

M. de Fleurieu le trouva plus tard seulement de 9 tierces, par cinq hauteurs correspondantes à celles qu'il avoit prises le matin.

Nous supposons ce jour à midi l'équation du temps moyen, de 2' 52" 23" soustractive du temps vrai.

Le 2 Juin, nous primes le matin des hauteurs ; il ne fut pas possible de prendre les correspondantes le soir. Mais en comparant ces hauteurs avec celles du 3 au soir, j'ai trouvé

Minuit vrai, à..... 11<sup>h</sup> 59' 36" 8".

Et M. de Fleurieu à..... 11. 59. 37. 6.

Nous supposons l'un & l'autre l'équation du temps moyen de 2' 20" 43" soustractive ; ainsi la pendule auroit avancé en vingt-quatre heures sur le temps moyen de 23" 57" selon moi, de 23" 41" selon M. de Fleurieu.

Le 3 Juin, midi vrai, selon moi, à..... 11<sup>h</sup> 59' 53" 50".

Selon M. de Fleurieu..... 11. 59. 54. 19.

Équation du temps moyen..... — 2. 15. 53.

La pendule depuis le 30 Mai, a avancé, selon moi, de  $24'' 10'''$ , & selon M. de Fleurieu de  $24'' 15'''$  chaque vingt-quatre heures.

Le 7 Juin après midi, les nuages m'ont empêché de prendre des hauteurs correspondantes à celles que j'avois prises le matin; M. de Fleurieu a été plus heureux, il en a saisi quatre, qui lui ont donné

Midi vrai à.....  $0^h 2' 17'' 13'''$ .

Équation du temps moyen..... — 1. 37. 59.

D'où il suivroit que la pendule depuis le 3 du mois, auroit avancé par jour de  $26'' 22'''$  sur le temps moyen.

Enfin le 10 Juin, jour unique entre ceux que nous avons passés au Cap, le beau temps se soutint pendant tout le jour & toute la nuit suivante. Nous primes beaucoup de hauteurs le matin; & nous eumes le soir toutes leurs correspondantes. Je trouvai

Midi vrai à.....  $0^h 4' 8'' 1'''$ .

Et M. de Fleurieu à.....  $0. 4. 8. 28.$

L'équation du temps moyen étoit..... — 0. 58. 38.

J'en conclus que depuis le 3 Juin jusqu'au 10, la pendule avoit retardé par jour sur le temps moyen, de  $25'' 16'''$ . Selon les hauteurs de M. de Fleurieu, le retard journalier du 3 au 10, auroit été absolument le même.

En réduisant dans le détail des observations suivantes, le temps de la pendule au temps vrai, je supposerai que la pendule retardoit à midi du 3 Juin, de  $0' 6'' 10'''$  sur le temps vrai, ainsi qu'il suit de mes observations; que la pendule avançoit de 25 secondes en vingt-quatre heures sur le temps moyen; que le temps moyen avançoit de  $10''$  par jour sur le temps vrai; & par conséquent que la pendule avançoit sur le temps vrai d'environ  $35''$  en vingt-quatre heures.

Nous étions quatre Observateurs; aux instans des contacts des bords du Soleil & de Vénus, il n'a été fait aucun mouvement, il n'a été prononcé aucune parole qui ait pu faire soupçonner aux Observateurs que le contact avoit déjà été observé par un des coobservateurs.

M. Saqui Destourès, commandant le détachement des Gardes de la Marine à bord de l'*Isis*, employoit la lunette de mon quart-de-cercle, qui n'a que 2 pieds de longueur, à deux verres seulement, & qui n'est pas achromatique.

M. le Chevalier de la Fillière, Officier des vaisseaux du Roi, avoit une lunette achromatique de 3 pieds de longueur, de la façon de M. de l'Étang, avec deux oculaires plans-convexes; elle faisoit moins d'effet que les deux suivantes.

M. de Fleurieu se servoit d'une lunette achromatique à deux verres objectifs seulement, de la longueur d'environ 2 pieds & demi, avec deux oculaires plans-convexes, de la façon de M. Dollond, montée bien solidement sur un pied de télescope, & faisant un excellent effet.

J'avois une lunette achromatique à deux verres objectifs seulement, de la longueur de 5 pieds, avec deux oculaires plans-convexes, forçant extrêmement & peut-être un peu trop, de la façon de M. de l'Étang; elle étoit suspendue à quatre montans, réunis à leur sommet par une pièce de cuivre à charnières; elle y étoit attachée par des bîtors qui lui laissoient assez de jeu pour la remuer facilement, mais qui lui en laissoient un peu trop pour la stabilité que j'aurois désirée.

*Premier contact des bords du Soleil & de Vénus.*

<i>Temps de la pendule.</i>	<i>Temps vrai.</i>	
2 <sup>h</sup> 26' 12"	2 <sup>h</sup> 26' 14 <sup>s</sup> $\frac{1}{2}$	Selon M. de Fleurieu.
2. 26. 14	2. 26. 16 $\frac{1}{2}$	Selon M. le Chevalier de la Filière.
2. 26. 18	2. 26. 20 $\frac{1}{2}$	Selon M. Destourès.
2. 26. 10	2. 26. 12 $\frac{1}{2}$	Selon moi.

Nos yeux étoient fatigués, nous les laissâmes reposer quelques minutes; étant retournés aux lunettes, nous vîmes Vénus entrée d'environ le tiers de son diamètre. M. de Fleurieu distingua très-clairement autour de la partie du disque de Vénus, qui étoit encore hors de celui du Soleil, un filet ou anneau lumineux, lequel forma constamment une circonférence de cercle sensiblement parfaite avec l'arc qui terminoit la partie de Vénus déjà entrée sur le disque

folaire. M. de Fleurieu ne m'avertit point de ce phénomène, & je pensois alors à toute autre chose qu'à la partie physique de l'observation; je vis cependant cet anneau deux minutes environ avant l'immersion totale de Vénus.

*Contact intérieur des bords du Soleil & de Vénus.*

<i>Temps de la pendule.</i>	<i>Temps vrai.</i>
2 <sup>h</sup> 44' 43"	2 <sup>h</sup> 44' 45" Selon M. de Fleurieu.
2. 44. 39	2. 44. 41 Selon M. le Chevalier de la Filière.
2. 44. 48	2. 44. 50 Selon M. Destouërs.
2. 44. 42	2. 44. 44 Selon moi.

Aux observations suivantes, M. de Foucaux, Officier des vaisseaux du Roi, & M.<sup>rs</sup> les Chevaliers d'Isle & de l'Éguille, Gardes de la Marine, ont bien voulu se succéder pour compter perpétuellement à la pendule. L'affluence du monde étoit plus nuisible qu'utile aux observations: je commence par les miennes, je les ai faites au quart-de-cercle de 2 pieds de rayon; deux fils du micromètre se coupant à angles droits, me servoient de réticule.

*I<sup>re</sup> OBSERVATION, assez douteuse.*

<i>Temps de la pendule.</i>	<i>Temps vrai.</i>
3 <sup>h</sup> 26' 7"	3 <sup>h</sup> 26' 8 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> Premier bord du Soleil au fil vertical.
3. 27. 3 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	3. 27. 4 <sup>3</sup> / <sub>4</sub> Centre de Vénus à l'horizontal.
3. 27. 41	3. 27. 42 <sup>1</sup> / <sub>4</sub> Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 28. 52 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	3. 28. 53 <sup>3</sup> / <sub>4</sub> Second bord de Vénus au vertical.

*II<sup>e</sup> OBSERVATION, également douteuse.*

3. 29. 50	3. 29. 51 Premier bord du Soleil au vertical.
3. 31. 15	3. 31. 16 Centre de Vénus à l'horizontal.
3. 31. 54 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	3. 31. 55 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 32. 0	3. 32. 1 Premier bord de Vénus au vertical.
3. 32. 32	3. 32. 33 Second bord de Vénus au vertical.
	Hauteur de l'horizontal environ 41 <sup>d</sup> .

III.<sup>e</sup> OBSERVATION.

<i>Temps de la pendule.</i>	<i>Temps vrai.</i>	
3 <sup>h</sup> 34' 31"	3 <sup>h</sup> 34' 32"	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
3. 34. 38	3. 34. 39	Premier bord du Soleil au vertical.
3. 36. 10	3. 36. 11	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 36. 13 $\frac{1}{2}$	3. 36. 14 $\frac{1}{2}$	Second bord }
3. 36. 45	3. 36. 46	Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 36. 46	3. 36. 47	Premier bord } de Vénus au vertical.
3. 37. 16	3. 37. 17	Second bord }
		Hauteur de l'horizontal, 39 <sup>d</sup> 53'

IV.<sup>e</sup> OBSERVATION.

3. 39. 20 $\frac{1}{2}$	3. 39. 21 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
3. 40. 55	3. 40. 56	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 40. 59	3. 41. 0	Second bord }
3. 41. 0	3. 41. 1	Premier bord du Soleil au vertical.
3. 43. 6	3. 43. 7	Premier bord } de Vénus au vertical.
3. 43. 34 $\frac{1}{2}$	3. 43. 35 $\frac{1}{2}$	Second bord }
		Hauteur de l'horizontal 38 <sup>d</sup> 48'.

V.<sup>e</sup> OBSERVATION.

3. 44. 24	3. 44. 24 $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
3. 44. 37	3. 44. 37 $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
3. 45. 57 $\frac{1}{4}$	3. 45. 58	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 46. 1 $\frac{1}{4}$	3. 46. 2	Second bord }
3. 46. 33 $\frac{1}{2}$	3. 46. 34 $\frac{1}{4}$	Premier bord de Vénus au vertical.
3. 46. 42	3. 46. 42 $\frac{1}{4}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 47. 2	3. 47. 2 $\frac{1}{4}$	Second bord de Vénus au vertical.
		Hauteur de l'horizontal 37 <sup>d</sup> 24' $\frac{1}{2}$

VI.<sup>e</sup> OBSERVATION.

3. 54. 59	3. 54. 59 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
3. 55. 0	3. 55. 0 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.

Temps de la pendule.	Temps vrai.	
3 <sup>h</sup> 56' 30"	3 <sup>h</sup> 56' 30 $\frac{1}{2}$ "	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 56. 34	3. 56. 34 $\frac{1}{2}$ "	Second bord }
3. 56. 57	3. 56. 57 $\frac{1}{2}$ "	Premier bord de Vénus au vertical.
3. 57. 17	3. 57. 17 $\frac{1}{2}$ "	Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 57. 24	3. 57. 24 $\frac{1}{2}$ "	Second bord de Vénus au vertical.
		Hauteur de l'horizontal, 35 <sup>d</sup> 14'.

VII<sup>e</sup> OBSERVATION.

3. 59. 40	3. 59. 40 $\frac{1}{4}$ "	Premier bord du Soleil au vertical.
3. 59. 46 $\frac{1}{2}$ "	3. 59. 46 $\frac{1}{4}$ "	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 1. 16 $\frac{1}{2}$ "	4. 1. 16 $\frac{1}{2}$ "	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 1. 20	4. 1. 20 $\frac{1}{2}$ "	Second bord }
4. 1. 37	4. 1. 37 $\frac{1}{2}$ "	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 2. 2	4. 2. 2 $\frac{1}{2}$ "	Second bord }
4. 2. 3 $\frac{1}{2}$ "	4. 2. 3 $\frac{1}{2}$ "	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 34 <sup>d</sup> 8'.

VIII<sup>e</sup> OBSERVATION.

4. 4. 6	4. 4. 6 $\frac{1}{4}$ "	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 4. 24	4. 4. 24 $\frac{1}{4}$ "	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 5. 34 $\frac{3}{4}$ "	4. 5. 35	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 5. 38 $\frac{1}{2}$ "	4. 5. 39	Second bord }
4. 6. 16	4. 6. 16 $\frac{1}{4}$ "	Premier bord de Vénus au vertical.
4. 6. 24	4. 6. 24 $\frac{1}{4}$ "	Second bord du Soleil à l'horizontal.
4. 6. 41	4. 6. 41 $\frac{1}{2}$ "	Second bord de Vénus au vertical.
		Hauteur de l'horizontal, 33 <sup>d</sup> 9'.

IX<sup>e</sup> OBSERVATION.

4. 8. 26	4. 8. 26	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 8. 30 $\frac{1}{2}$ "	4. 8. 30 $\frac{1}{2}$ "	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 9. 53 $\frac{1}{4}$ "	4. 9. 53 $\frac{1}{4}$ "	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 9. 57 $\frac{3}{4}$ "	4. 9. 57 $\frac{3}{4}$ "	Second bord }
4. 10. 29	4. 10. 29	Premier bord de Vénus au vertical.

<i>Temps de la pendule.</i>	<i>Temps vrai.</i>	
4 <sup>h</sup> 10' 44 <sup>s</sup> $\frac{1}{2}$	4 <sup>h</sup> 10' 44 <sup>s</sup> $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
4. 10. 52	4. 10. 52	Second bord de Vénus au vertical.
		Hauteur de l'horizontal, 32 <sup>d</sup> 11'.

X.<sup>e</sup> OBSERVATION.

4. 12. 39	4. 12. 39	Premier bord du Soleil au vertic. & à l'horiz.
4. 14. 5 $\frac{1}{4}$	4. 14. 5 $\frac{1}{4}$	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 14. 9 $\frac{1}{4}$	4. 14. 9 $\frac{1}{4}$	Second bord }
4. 14. 29	4. 14. 29	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 14. 52	4. 14. 52	Second bord }
4. 14. 57	4. 14. 57	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 31 <sup>d</sup> 12'.

XI.<sup>e</sup> OBSERVATION.

4. 17. 55	4. 17. 55	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 17. 56 $\frac{1}{2}$	4. 17. 56 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 19. 22	4. 19. 22	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 19. 26	4. 19. 26	Second bord }
4. 19. 46	4. 19. 46	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 20. 8	4. 20. 8	Second bord }
4. 20. 15 $\frac{1}{2}$	4. 20. 15 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 30 <sup>d</sup> 0'.

XII.<sup>e</sup> OBSERVATION.

4. 22. 16	4. 22. 15 $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 22. 26	4. 22. 25 $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 23. 51	4. 23. 50 $\frac{3}{4}$	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 23. 55	4. 23. 54 $\frac{3}{4}$	Second bord }
4. 24. 3	4. 24. 2 $\frac{3}{4}$	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 24. 25	4. 24. 24 $\frac{3}{4}$	Second bord }
4. 24. 44 $\frac{1}{2}$	4. 24. 44 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 28 <sup>d</sup> 59'.

XIII.<sup>e</sup> OBSERVATION.

XIII.<sup>e</sup> OBSERVATION.

<i>Temps de la pendule.</i>	<i>Temps vrai.</i>	
4 <sup>h</sup> 28' 31 <sup>s</sup> $\frac{1}{2}$	4 <sup>h</sup> 28' 31 <sup>s</sup> $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 29. 20	4. 29. 19 $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 29. 56 $\frac{1}{4}$	4. 29. 56	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 30. 0 $\frac{1}{4}$	4. 30. 0	Second bord }
4. 30. 51	4. 30. 50 $\frac{3}{4}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
4. 31. 2	4. 31. 1 $\frac{3}{4}$	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 31. 23	4. 31. 22 $\frac{3}{4}$	Second bord }
		Hauteur de l'horizontal, 27 <sup>d</sup> 36'

XIV.<sup>e</sup> OBSERVATION.

4. 33. 8	4. 33. 7 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 34. 48 $\frac{1}{2}$	4. 34. 48	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 35. 9	4. 35. 8 $\frac{1}{2}$	Second bord }

XV.<sup>e</sup> OBSERVATION.

4. 37. 20 $\frac{1}{2}$	4. 37. 20	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 38. 10 $\frac{1}{2}$	4. 38. 10	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 39. 1	4. 39. 0 $\frac{1}{2}$	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 39. 21	4. 39. 20 $\frac{1}{2}$	Second bord }
4. 39. 32 $\frac{1}{2}$	4. 39. 32	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 39. 36 $\frac{1}{4}$	4. 39. 35 $\frac{3}{4}$	Second bord }
4. 40. 28 $\frac{1}{2}$	4. 40. 28 $\frac{1}{4}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 25 <sup>d</sup> 26'

XVI.<sup>e</sup> OBSERVATION.

4. 42. 57	4. 42. 56 $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 43. 41	4. 43. 40 $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 44. 34	4. 44. 33 $\frac{1}{4}$	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 44. 54	4. 44. 53 $\frac{1}{4}$	Second bord }
4. 45. 1	4. 45. 0 $\frac{1}{4}$	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 45. 5	4. 45. 4 $\frac{1}{4}$	Second bord }
4. 45. 59 $\frac{1}{2}$	4. 45. 58 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 24 <sup>d</sup> 11'

Mém. 1769.

V H U



XVII.<sup>e</sup> OBSERVATION.

<i>Temps de la pendule.</i>	<i>Temps vrai.</i>	
4 <sup>h</sup> 47' 29 <sup>s</sup> $\frac{1}{2}$	4 <sup>h</sup> 47' 28 <sup>s</sup> $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.
4 48. 30 $\frac{1}{2}$	4 48. 29 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4 49. 6	4 49. 5	Premier bord } de Vénus au vertical.
4 49. 25	4 49. 24	Second bord }
4 49. 49 $\frac{1}{2}$	4 49. 48 $\frac{1}{2}$	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4 49. 53 $\frac{1}{2}$	4 49. 52 $\frac{1}{2}$	Second bord }
4 50. 48 $\frac{1}{2}$	4 50. 47 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 23 <sup>d</sup> 6'

XVIII.<sup>e</sup> OBSERVATION *douteuse.*

4 52. 53	4 52. 52	Premier bord du Soleil au vertical.
4 53. 27	4 53. 26	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4 54. 31 $\frac{1}{2}$	4 54. 30 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus au vertical.
4 54. 45	4 54. 44	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4 54. 49	4 54. 48	Second bord }
4 54. 49 $\frac{1}{2}$	4 54. 48 $\frac{1}{2}$	Second bord de Vénus au vertical.
4 55. 47	4 55. 46	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 22 <sup>d</sup> 0'

XIX.<sup>e</sup> OBSERVATION.

5. 0. 29 $\frac{1}{2}$	5. 0. 28 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
5. 0. 53	5. 0. 52	Premier bord du Soleil au vertical.
5. 1. 46 $\frac{1}{2}$	5. 1. 45 $\frac{1}{2}$	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
5. 1. 50 $\frac{1}{2}$	5. 1. 49 $\frac{1}{2}$	Second bord }
5. 2. 23 $\frac{1}{2}$	5. 2. 22 $\frac{1}{2}$	Premier bord } de Vénus au vertical.
5. 2. 40 $\frac{1}{2}$	5. 2. 39 $\frac{1}{2}$	Second bord }
5. 2. 49 $\frac{1}{2}$	5. 2. 48 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 20 <sup>d</sup> 15'

XX.<sup>e</sup> OBSERVATION, *assez douteuse.*

5. 10. 43	5. 10. 41 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
-----------	-------------------------	--

<i>Temps de la pendule.</i>	<i>Temps vrai.</i>	
5 <sup>h</sup> 10' 47"	5 <sup>h</sup> 10' 45" $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.
5. 11. 55 $\frac{1}{2}$	5. 11. 54	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
5. 11. 59 $\frac{1}{2}$	5. 11. 58	Second bord }
5. 12. 11	5. 12. 9 $\frac{1}{2}$	Premier bord } de Vénus au vertical.
5. 12. 28	5. 12. 26 $\frac{1}{2}$	Second bord }
5. 13. 5	5. 13. 3 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 18 <sup>d</sup> 7'

XXI.<sup>e</sup> OBSERVATION.

5. 18. 18	5. 18. 16 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.
5. 18. 41	5. 18. 39 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
5. 19. 43	5. 19. 41 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus au vertical.
5. 19. 54	5. 19. 52 $\frac{1}{2}$	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
5. 19. 58	5. 19. 56 $\frac{1}{2}$	Second bord }
5. 19. 58	5. 19. 56 $\frac{1}{2}$	Second bord de Vénus au vertical.
5. 21. 2 $\frac{1}{2}$	5. 21. 1	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 16 <sup>d</sup> 20'

XXII.<sup>e</sup> OBSERVATION.

5. 24. 35	5. 24. 33 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.
5. 24. 35 $\frac{1}{4}$	5. 24. 33 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
5. 25. 46 $\frac{1}{2}$	5. 25. 44 $\frac{3}{4}$	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
5. 25. 50 $\frac{1}{2}$	5. 25. 48 $\frac{3}{4}$	Second bord }
5. 25. 57	5. 25. 55 $\frac{1}{2}$	Premier bord } de Vénus au vertical.
5. 26. 12	5. 26. 10 $\frac{1}{2}$	Second bord }
5. 26. 57	5. 26. 55 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 14 <sup>d</sup> 50'

Les nuages ont commencé à couvrir le Soleil, il n'a plus été possible de faire aucune observation suivie.

Le quart-de-cercle donnoit les hauteurs trop foibles d'une minute ou environ ; d'ailleurs je n'ai pas prétendu prendre avec la plus grande précision la hauteur du fil horizontal, ou, ce qui est la même chose, la hauteur des bords du Soleil & de Vénus, lorsqu'ils atteignoient le fil horizontal du réticule.

# 524 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Je n'ai point observé le passage du second bord ou du bord austral du Soleil par le fil vertical ; le mouvement du Soleil en ce sens étoit si lent, relativement à son mouvement en hauteur, que je n'aurois pu attendre ce passage, sans nuire à la multiplicité & même à la précision des observations totales.

Dans les observations suivantes, M. de Fleurieu employoit un instrument des passages, dirigé vers le Soleil, & bien garni de ses niveaux. La lunette achromatique de 3 pieds de longueur avoit à son foyer un réticule formé par deux fils qui se coupoient à angles droits. M. de Fleurieu y avoit ajouté deux autres fils parallèles au fil vertical, pour servir dans le commencement de l'éclipse, en cas que l'intervalle de temps entre le passage du premier bord du Soleil & celui de Vénus par un seul fil vertical, parût d'une longueur trop démesurée : ces fils n'ont pas été employés à l'usage auquel ils étoient destinés ; mais c'est à un de ces deux fils qu'on a pris les passages des bords du Soleil & de Vénus aux deuxième, quatrième & sixième observations ; à la quatrième, on a pris un autre fil qu'à la deuxième & à la sixième ; tous les autres passages ont été pris au fil du milieu, & donnent en conséquence des observations plus certaines, le parallélisme des deux autres fils pouvant être un peu équivoque.

Numéros des Observ.	TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	PASSAGES des DIFFÉRENS BORDS.
	H. M. S.	H. M. S.	
I.	3. 31. 19. $\frac{1}{2}$	3. 31. 20. $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	3. 32. 55	3. 32. 56	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	3. 33. 37. $\frac{1}{2}$	3. 33. 38. $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
II.	3. 39. 36. $\frac{1}{2}$	3. 39. 37. $\frac{1}{4}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	3. 40. 20	3. 40. 20. $\frac{3}{4}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
	3. 42. 57	3. 42. 57. $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	3. 45. 6 *	3. 45. 6. $\frac{1}{4}$	Premier bord } de Vénus au vertical.
	3. 45. 44. $\frac{1}{2}$	3. 45. 45. $\frac{1}{4}$	Second bord }

\* Il me paroît probable qu'il faut lire ici 45' 16" ; de la manière dont on comptoit, il nous étoit facile de nous tromper de 10".

Numéros des Observ.	TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	PASSAGES des DIFFÉRENS BORDS.
	H. M. S.	H. M. S.	
III.	3. 57. 21 $\frac{1}{2}$	3. 57. 22	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	3. 58. 52	3. 58. 52 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	3. 59. 40 $\frac{1}{2}$	3. 59. 41	Second bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 0. 44	4. 0. 44 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 2. 37 $\frac{1}{2}$	4. 2. 38	Premier bord
	4. 3. 3	4. 3. 3 $\frac{1}{2}$	Second bord } de Vénus au vertical.
IV.	4. 8. 10	4. 8. 10 $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 9. 3	4. 9. 3 $\frac{1}{4}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	4. 9. 54	4. 9. 54 $\frac{1}{4}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 10. 13	4. 10. 13 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus au vertical.
V.	4. 15. 13	4. 15. 13	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 17. 13	4. 17. 13	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 20. 8	4. 20. 8	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 21. 33	4. 21. 33	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	4. 22. 28	4. 22. 28	Second bord du Soleil à l'horizontal.
VI.	4. 30. 21	4. 30. 20 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 31. 18 $\frac{1}{2}$	4. 31. 18	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 32. 14	4. 32. 13 $\frac{3}{4}$	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 32. 41	4. 32. 40 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	4. 33. 38 $\frac{1}{2}$	4. 33. 38	Second bord du Soleil à l'horizontal.
VII.	4. 34. 48 $\frac{1}{2}$	4. 34. 48	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 36. 15	4. 36. 14 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	4. 36. 29	4. 36. 28 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 37. 14	4. 37. 13 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
VIII.	4. 39. 9 $\frac{1}{2}$	4. 39. 9	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 40. 2 $\frac{1}{2}$	4. 40. 2	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 40. 51	4. 40. 50 $\frac{3}{4}$	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 41. 23 $\frac{1}{2}$	4. 41. 23	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
IX.	4. 43. 45 $\frac{1}{2}$	4. 43. 44 $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 44. 29 $\frac{1}{2}$	4. 44. 28 $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 45. 26 $\frac{1}{2}$	4. 45. 25 $\frac{3}{4}$	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 45. 57 $\frac{1}{2}$	4. 45. 56 $\frac{3}{4}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.

Numéros des Observ.	TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	PASSAGES des DIFFÉRENS BORDS.
	H. M. S.	H. M. S.	
X.	4. 48. 45	4. 48. 44 $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 50. 24 $\frac{1}{2}$	4. 50. 23 $\frac{3}{4}$	Premier bord de Vénus au vertical.
XI.	4. 51. 50	4. 51. 49	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 52. 29 $\frac{1}{2}$	4. 52. 28 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 53. 21	4. 53. 20	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 53. 48	4. 53. 47	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XII.	5. 0. 9 $\frac{1}{2}$	5. 0. 8 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 1. 13 $\frac{1}{2}$	5. 1. 12 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 1. 43 $\frac{1}{2}$	5. 1. 42 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 2. 29	5. 2. 28	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XIII.	5. 4. 41	5. 4. 39 $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 5. 25 $\frac{1}{2}$	5. 5. 24 $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 6. 11	5. 6. 9 $\frac{3}{4}$	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 6. 41 $\frac{1}{2}$	5. 6. 40 $\frac{1}{4}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XIV.	5. 12. 19 $\frac{1}{2}$	5. 12. 18	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 13. 32	5. 13. 30 $\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 13. 50 $\frac{1}{2}$	5. 13. 49	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 14. 46.	5. 14. 44 $\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XV.	5. 18. 36 $\frac{1}{2}$	5. 18. 35	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 19. 16 $\frac{1}{2}$	5. 19. 15	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 20. 0 $\frac{1}{2}$	5. 19. 59	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 20. 29 $\frac{1}{2}$	5. 20. 28	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XVI.	5. 24. 53 $\frac{1}{2}$	5. 24. 51 $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 25. 37 $\frac{1}{2}$	5. 25. 35 $\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 26. 15 $\frac{1}{2}$	5. 26. 13 $\frac{3}{4}$	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 26. 48 $\frac{1}{2}$	5. 26. 46 $\frac{3}{4}$	Premier bord de Vénus à l'horizontal.

Les observations suivantes sont de M. Saqui Destourès. Dès le premier Juin il avoit observé le diamètre du Soleil avec le mégamètre de M. de Charnières ; il réitéra la même observation le 2<sup>e</sup> Juin au matin ; de ces observations, nous concluons 1.<sup>o</sup> que le

commencement des divisions du micromètre n'étoit pas exact, & que de toutes les distances marquées par cet instrument, il falloit retrancher quatre-vingt-huit parties; 2.<sup>o</sup> que trois révolutions huit cents soixante-dix-sept parties de la vis, répondoient dans le Ciel à un arc de  $31'34\frac{1}{2}''$ . Les distances prises par M. Destoures sont toujours celles du bord du Soleil le plus près de Vénus, au bord de Vénus le plus voisin du centre du Soleil: ôtant cette distance de la somme des deux demi-diamètres, on aura pour reste la distance apparente des centres. Nous avons supposé le diamètre du Soleil tel qu'il est déterminé dans la *Connoissance des Temps*; s'il étoit un peu plus grand ou un peu plus petit, il faudroit augmenter ou diminuer à proportion la valeur des parties du micromètre.

TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	DISTANCE DES BORDS en parties du microm.	LA MÊME réduite.	LA MÊME en minutes & sec.
H. M. S.	H. M. S.	Révol.	Révol.	M. S.
2. 58. 10	2. 58. 12	1,01	0,13	1. 3,5
3. 5. 53	3. 5. 54 $\frac{3}{4}$	1,055	0,175	1. 25,5
3. 13. 15	3. 13. 16 $\frac{1}{2}$	1,10	0,22	1. 47,5
3. 18. 19	3. 18. 20 $\frac{1}{4}$	1,13	0,25	2. 2,5
3. 24. 48	3. 24. 49 $\frac{1}{4}$	1,155	0,275	2. 14,5
3. 29. 0	3. 29. 1	1,17	0,29	2. 21,75
3. 34. 6	3. 34. 7	1,195	0,315	2. 34
3. 39. 10	3. 39. 11	1,2175	0,3375	2. 45
3. 45. 15	3. 45. 15 $\frac{3}{4}$	1,25	0,37	3. 0,75
3. 55. 10	3. 55. 10 $\frac{1}{2}$	1,295	0,415	3. 22,75
3. 59. 30	3. 59. 30 $\frac{1}{2}$	1,3125	0,4325	3. 31,5
4. 4. 38	4. 4. 38 $\frac{1}{4}$	1,34	0,46	3. 44,75
4. 9. 10	4. 9. 10 $\frac{1}{4}$	1,37	0,49	3. 59,5
4. 13. 33	4. 13. 33	1,395	0,515	4. 11,5
4. 20. 22	4. 20. 22	1,435	0,555	4. 31,25
4. 24. 20	4. 24. 19 $\frac{3}{4}$	1,45	0,57	4. 38,5
4. 31. 10	4. 31. 9 $\frac{1}{2}$	1,47	0,59	4. 48,25
4. 36. 4	4. 36. 3 $\frac{1}{2}$	1,49	0,61	4. 58

TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	DISTANCE DES BORDS en parties du micron.	LA MÊME réduite.	LA MÊME en minutes & sc.
H. M. S.	H. M. S.	Révol.	Révol.	M. S.
4. 40. 20	4. 40. 19 $\frac{1}{2}$	1,50	0,62	5. 3
4. 42. 59	4. 42. 58 $\frac{1}{4}$	1,5125	0,6325	5. 9
4. 46. 20	4. 46. 19 $\frac{1}{4}$	1,5275	0,6475	5. 16,25
4. 52. 40	4. 52. 39	1,5325	0,6525	5. 19
5. 0. 12	5. 0. 11	1,59	0,71	5. 47
5. 12. 23	5. 12. 21 $\frac{1}{2}$	1,62	0,74	6. 1,5
5. 19. 40	5. 19. 38 $\frac{1}{2}$	1,63	0,75	6. 6,5
5. 25. 2	5. 25. 0 $\frac{1}{4}$	1,635	0,755	6. 9

Selon ma dernière observation, faite à très-peu près au milieu du passage, la distance apparente des centres auroit été au Cap-François de 10' 2" : la dernière observation de M. de Fleurieu donne précisément le même résultat. Comme Vénus n'étoit pas encore absolument parvenue au milieu de son passage, il faudra peut-être diminuer un peu cette quantité pour avoir la moindre distance des centres. Selon la dernière observation de M. Deslours, à 5<sup>h</sup> 25' la distance des centres étoit de 10' 7".



OBSERVATION

# OBSERVATION DU PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL

*Du 3 Juin 1769.*

*Faite à l'Observatoire avec une lunette de Dollond de 3 pieds & demi.*

Par M. le Duc DE CHAULNES.

UN gros nuage ayant empêché de voir le premier contact, le Soleil n'a commencé à être aperçu que lorsque Vénus étoit déjà entrée aux trois quarts de son disque; les vapeurs rendoient les bords du Soleil & de Vénus si ondoyans, que l'on ne pouvoit pas juger avec beaucoup de précision des contacts.

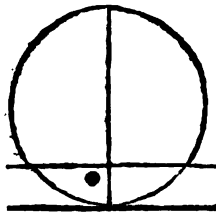
Le second contact du bord extérieur de Vénus avec le bord intérieur du Soleil est arrivé à  $7^h\ 38'\ 58''$ .

Le coucher de Vénus s'est fait derrière une petite maison qui se trouvoit à cet endroit de l'horizon, Vénus s'est cachée environ deux ou trois secondes avant que son bord supérieur parvint à l'horizon. Cependant on a jugé assez exactement du moment où elle a disparu tout-à-fait.

Coucher de Vénus . . . .  $7^h\ 56'\ 46''$ .

Coucher du Soleil . . . .  $7^h\ 57'\ 17''$ .

J'ai pris une distance du bord supérieur de Vénus au bord inférieur du Soleil, comme dans la figure ci-jointe; à  $7^h\ 49'\ 14''$  distance du bord supérieur de Vénus au bord inférieur du Soleil  $1'\ 15''$ ; mais, comme je l'ai déjà dit plus haut, les bords des deux Astres étoient si ondoyans, qu'on ne peut être assuré d'une grande précision.



Pour faire cette observation, ma lunette étoit placée sur un pied destiné à être parallactique, mais dont j'avois laissé le cercle qui représente l'Equateur dans le plan de

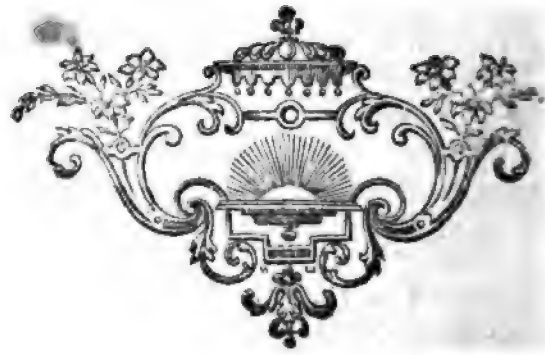
*Mém. 1769.*

**XXX**



l'horizon ; & mon micromètre étoit disposé de telle façon , que le mouvement du curseur se faisoit dans le vertical. La table de ce micromètre ayant été faite avec soin de quatre en quatre secondes, l'observation auroit été susceptible de beaucoup de précision, sans les circonstances physiques.

Je n'ai pu faire que cette observation à cause de l'affluence des Spectateurs qui troubloient beaucoup les observations par le bruit & le mouvement continuel.



## OBSERVATION

*Du PASSAGE DE VÉNUS sur le Soleil, le 3 Juin  
1769 ; & de l'ÉCLIPSE DU SOLEIL, du 4  
Juin de la même année.*

*Faite au Cabinet de Physique du Roi, à Passy.*

Par M.<sup>rs</sup> DE FOUCHY, DE BORY & BAILLY.

Nous nous sommes transportés, M. de Fouchy & moi ; le 1.<sup>er</sup> Juin à l'hôtel de Passy, où Dom Noël, qui est Gardien du Cabinet de Physique, sous les ordres de M. le Marquis de Marigny, nous a procuré toutes les commodités nécessaires pour faire l'importante observation du passage de Vénus.

Nous nous sommes établis dans le pavillon qui est à l'extrémité du jardin de la Muette ; d'où l'on pouvoit très-bien suivre le Soleil pendant toute la durée du phénomène jusqu'à quelques minutes de son coucher.

La pluie & le mauvais temps nous ont empêchés de prendre des hauteurs du Soleil le 1.<sup>er</sup> au soir & le 2 au matin ; l'après-midi du 2 ayant été assez belle, nous en avons pris vingt-six, dont nous n'avons point fait d'usage, parce qu'ayant obtenu l'heure à midi le 3 & le 4, cela suffisoit pour avoir l'heure vraie, & pour connoître la marche de la pendule dans cet intervalle de temps.

Nous avons eu midi le 3 par cinq hauteurs, à 0<sup>h</sup> 1' 3" de la pendule.

Il a soufflé toute la journée un vent d'ouest violent, qui a amené de la pluie, du tonnerre à diverses reprises. Le soir, M. de Bory s'est rendu à Passy, & M. l'Abbé Bourriot s'est joint à nous pour faire l'observation du passage de Vénus.

M. de Fouchy & moi, nous nous servions chacun d'un télescope de 30 pouces de foyer, qui porte 4 pouces & demi d'ouverture.

Xxx ij

Ces deux télescopes ont été faits par Dom Noël, & sont excellens.

M. de Bory se servoit d'une lunette achromatique de M. de Létang, de 5 pieds, & dont l'ouverture a 24 lignes; Dom Noël, d'un télescope de 4 pieds; M. l'Abbé Bourriot, d'une lunette achromatique de 6 pieds, qui porte 27 lignes d'ouverture, dont il a travaillé lui-même l'objectif qui est très-bon.

Vers les six heures, un nuage long & épais s'est établi dans la partie du Ciel où le Soleil devoit descendre pour se coucher, mais de manière qu'il restoit au-dessous de ce nuage un endroit clair qui pouvoit avoir 6 ou 7 degrés de hauteur, à compter de l'horizon jusqu'au nuage; le Soleil est entré dans le nuage vers 6 heures  $\frac{3}{4}$ , & nous sommes restés dans la plus grande inquiétude que Vénus ne fût entrée avant que le Soleil se remontrât. A 7 heures, les nuages ont paru s'éclaircir; & 10 minutes après, le Soleil a paru, mais un moment seulement, & comme pour nous faire voir que Vénus n'étoit pas encore entrée. A  $7^h\ 22' 23''$  à la pendule ou à  $7^h\ 21' 6''$  temps vrai, j'ai aperçu le bord supérieur du Soleil, & je me suis écrié que le bord étoit entamé; ce bord ne s'étoit pas montré l'espace d'une seconde; mais je puis affirmer que le premier contact étoit fait, & qu'il n'y avoit pas long-temps, parce que le bord du Soleil étoit très-légèrement échancré. Je craignis d'abord de m'être trompé, parce que j'avois été seul à apercevoir le phénomène; mais à  $7^h\ 21' 51''$  temps vrai, le Soleil se montra plus à découvert, & on fut assuré que le contact étoit arrivé; l'échancrure étoit déjà plus que sensible. Le Soleil resta pendant quelques minutes assez clair, & nous nous préparâmes à observer la phase la plus importante, c'est-à-dire le contact intérieur: alors un petit nuage se plaça sur le Soleil dans la partie supérieure, de manière qu'il n'occupoit qu'un segment assez petit, mais il suffisoit pour nous cacher Vénus & faire manquer notre observation. On eût dit qu'il s'étoit mis là exprès, car il paroissoit suivre constamment le Soleil. Il est aisé de juger de notre inquiétude; enfin à  $7^h\ 38' 33''$  le nuage s'étant éclairci, M. de Bory annonça que le bord de Vénus avoit quitté le bord du Soleil. M. de Fouchy, qui l'avoit observé comme lui, & qui n'avoit attendu à le dire que

pour juger , par le mouvement de Vénus , du vrai moment du contact intérieur , M. de Fouchy , dis-je , assura , comme M. de Bory , qu'à  $7^h\ 38'\ 33''$  Vénus s'étoit détachée du bord du Soleil , & il assura en même-temps qu'il n'y avoit pas plus de deux secondes. Nous en avons tous ensuite porté le même jugement ; ainsi nous croyons pouvoir dire , avec confiance , que le contact intérieur est arrivé à Passy à  $7^h\ 38'\ 31''$  , ou à  $7^h\ 38'\ 45''\frac{1}{2}$  , temps vrai , réduit au temps de l'observatoire. Après cette observation il survint une pluie considérable , sans que le Soleil se couvrit ; nous fumes obligés de recueillir , dans la pièce où nous observions , quantité de personnes qui étoient dans le jardin. J'essayai cependant de faire une observation avec mon quart-de-cercle ; je la rapporterai telle que je l'ai faite , mais je ne la garantis en aucune façon , parce que dans ce moment il y avoit du bruit & de la confusion ; & que d'ailleurs le Soleil étant presque à l'horizon , ses bords étoient fort onduyans ; ceux de Vénus changeoient continuellement de forme.

Bord supérieur de Vénus au fil horizontal . . . . .	$7^h\ 46'\ 16''$
Bord précédent du Soleil au vertical . . . . .	$7.\ 46.\ 18$
Bord supérieur du Soleil à l'horizontal . . . . .	$7.\ 46.\ 25$
Bord précédent de Vénus au vertical . . . . .	$7.\ 47.\ 38$

### *Observation de l'Éclipse de SOLEIL.*

Le Dimanche 4 Juin , le Ciel étoit très-beau , & le temps le plus favorable pour l'observation.

Nous nous étions proposés d'observer , 1.<sup>o</sup> le commencement , la fin & la grandeur de l'éclipse ; 2.<sup>o</sup> l'occultation des différentes taches du Soleil qui étoient en assez grand nombre , & qui pouvoient se trouver sur la route de la Lune ; 3.<sup>o</sup> les passages des cornes aux fils vertical & horizontal du quart-de-cercle ; 4.<sup>o</sup> d'observer les instans où l'éclipse auroit un doigt , deux doigts , &c.

Pour cela M. de Fouchy établit sur une machine parallactique , une lunette de huit pieds , qui portoit un carton divisé en douze

# 534 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

doigts par six cercles concentriques, & sur lequel carton on devoit faire tomber l'image du Soleil. M. de Fouchy se chargea de suivre cette observation.

Nous nous préparâmes à observer le commencement de l'éclipse & l'occultation des taches, avec les mêmes instrumens qui nous avoient servi pour Vénus.

## *Commencement de l'Éclipse.*

M. DE FOUCHY.....	6 <sup>h</sup> 46' 42" Temps vrai.
M. DE BORY.....	6. 46. 42
Dom NOEL.....	6. 46. 42
M. l'Abbé BOURRIOT.....	6. 46. 42
M. BAILLY.....	6. 46. 37

Après avoir observé la fin de l'éclipse, & avoir comparé l'échancrure sensible, qui nous avoit fait connoître que l'éclipse étoit commencée, à celle de la fin, j'ai estimé qu'il y avoit bien 5", que l'éclipse étoit commencée lorsque nous l'avons jugée telle; ainsi je crois que le véritable commencement est arrivé, selon ces Messieurs, à 6<sup>h</sup> 46' 37"; & , selon moi, à 6<sup>h</sup> 46' 32".

Nous avons observé, autant que nous l'avons pu, l'attouchement des grosses taches, & leur immersion totale.

## *Tache a.*

Nous avons observé

L'attouchement à.....	6 <sup>h</sup> 51' 0"
Immersion totale.....	6. 51. 45

## *Tache b.*

La tache *b*, comme on le voit par la figure, étoit environnée d'une atmosphère; elle avoit deux parties pointues fort distinctes, que j'ai marquées 1 & 2; on a donc observé d'abord l'attouchement du bord de la Lune au bord de l'atmosphère, ensuite au bord de la tache même; enfin l'immersion totale des parties marquées 1 & 2.

*Attouchement au bord de l'atmosphère.*

M. l'Abbé BOURRIOT.....	7 <sup>h</sup> 11' 42"
M. BORY.....	7. 11. 47
Dom NOEL.....	7. 11. 48
M. BAILLY.....	7. 11. 49
M. DE FOUCHY.....	7. 11. 50

*Attouchement au bord de la Tache.*

M. BORY.....	7 <sup>h</sup> 12' 51"
M <sup>rs</sup> { DE FOUCHY BOURRIOT Dom NOEL BAILLY } .....	7. 12. 52

*Immersion totale. Partie I.*

M <sup>rs</sup> { DE FOUCHY BAILLY } .....	7 <sup>h</sup> 13' 33"
M. BORY.....	7. 13. 31

*Immersion totale. Partie II.*

M <sup>rs</sup> { DE FOUCHY BAILLY } .....	7 <sup>h</sup> 14' 4"
M. BORY.....	7. 14. 2

Nous avons observé aussi, M. Bory & moi, à 7<sup>h</sup> 40' que la tache *b* étoit sortie, & nous avons marqué l'instant où le bord de l'atmosphère a quitté le bord de la Lune, à 7<sup>h</sup> 41' 2".

*Tache c.*

Nous avons tous observé en même-temps

L'attouchement à.....	7 <sup>h</sup> 22' 45"
Et l'immersion totale à.....	7. 23. 28

*Tache e.*

M. Bory & M. l'Abbé Bourriot ont observé

L'attouchement à..... 7<sup>h</sup> 26' 19"

L'immersion à..... 7. 26. 33

M. Bory a observé l'immersion

De la tache *d* à..... 7<sup>h</sup> 28' 17"

*f* à..... 7. 28. 18

*n* à..... 7. 28. 42

*g* n'a pas été observée.

*Tache h.*

Cette tache a paru à M. Bory divisée en deux.

Il a observé l'immersion de la première à..... 7<sup>h</sup> 33' 4"

L'immersion de la seconde à..... 7. 33. 19

*Tache k.*

M. l'Abbé Bourriot a vu

L'attouchement à..... 7<sup>h</sup> 41' 49"

L'immersion à..... 7. 43. 32

*Tache m.*

M. l'Abbé Bourriot ;

Attouchement à..... 7<sup>h</sup> 42' 44"

Immersion à..... 7. 43. 32

*Observation au quart-de-cercle.*

La première de ces quatre observations est de M. Bory, les trois autres sont de moi.

Corne précédente au vertical..... 7<sup>h</sup> 3' 11"

à l'horizontal..... 7. 3. 28

Corne suivante à l'horizontal..... 7. 4. 35

au vertical..... 7. 4. 38

Corné

*Suite de l'Observation au quart-de-cercle.*

Corne précédente à l'horizontal.....	7 <sup>h</sup> 46' 28" $\frac{1}{2}$
au vertical.....	7. 47. 40 $\frac{1}{2}$
Corne suivante à l'horizontal.....	7. 48. 42
au vertical.....	7. 49. 7
Corne précédente à l'horizontal.....	7. 50. 27 $\frac{2}{3}$
au vertical.....	7. 51. 9
Corne suivante au vertical.....	7. 52. 22 $\frac{2}{3}$
à l'horizontal.....	7. 52. 49
Corne précédente à l'horizontal.....	7. 53. 14
au vertical.....	7. 54. 14
Corne suivante au vertical.....	7. 55. 17
à l'horizontal.....	7. 55. 36

A 7<sup>h</sup> 7' 12", j'ai observé que dans la lunette du quart-de-cercle, la ligne des cornes paroissoit horizontale.

*Observation des Doigts.*

Il y a dans le commencement quelques doigts qui n'ont pas été observés, parce qu'alors M. de Fouchy observoit l'occultation des taches; mais ceux qui sont marqués ici, ont été observés par lui.

Deux doigts.....	6 <sup>h</sup> 58' 12"
Deux doigts & demi.....	7. 0. 42
Trois doigts.....	7. 6. 2
Trois doigts & demi.....	
Quatre doigts.....	
Quatre doigts & demi.....	
Cinq doigts.....	7. 24. 36
Cinq doigts.....	7. 43. 33
Quatre doigts & demi.....	7. 51. 41
Quatre doigts.....	7. 57. 51
Trois doigts & demi.....	8. 2. 0
Trois doigts.....	8. 7. 0

Mém. 1769.

Yyy



# 338 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

## *Suite de l'Observation des Doigts.*

Deux doigts & demi.....	8 <sup>h</sup> 11' 0 <sup>''</sup>
Deux doigts.....	8. 14. 20.
Un doigt & demi.....	8. 17. 50.
Un doigt.....	8. 21. 0

M. de Fouchy a déterminé la grandeur de l'éclipse de 5 doigts  
20 minutes.

## *Fin de l'Éclipse.*

M. DE FOUCHY.....	8 <sup>h</sup> 27' 02 <sup>''</sup>
M. l'Abbé BOURRIOT.....	8. 27. 4
M. BAILLY.....	8. 27. 5
M. BORY.....	8. 27. 6
Dom NOEL.....	8. 27. 8

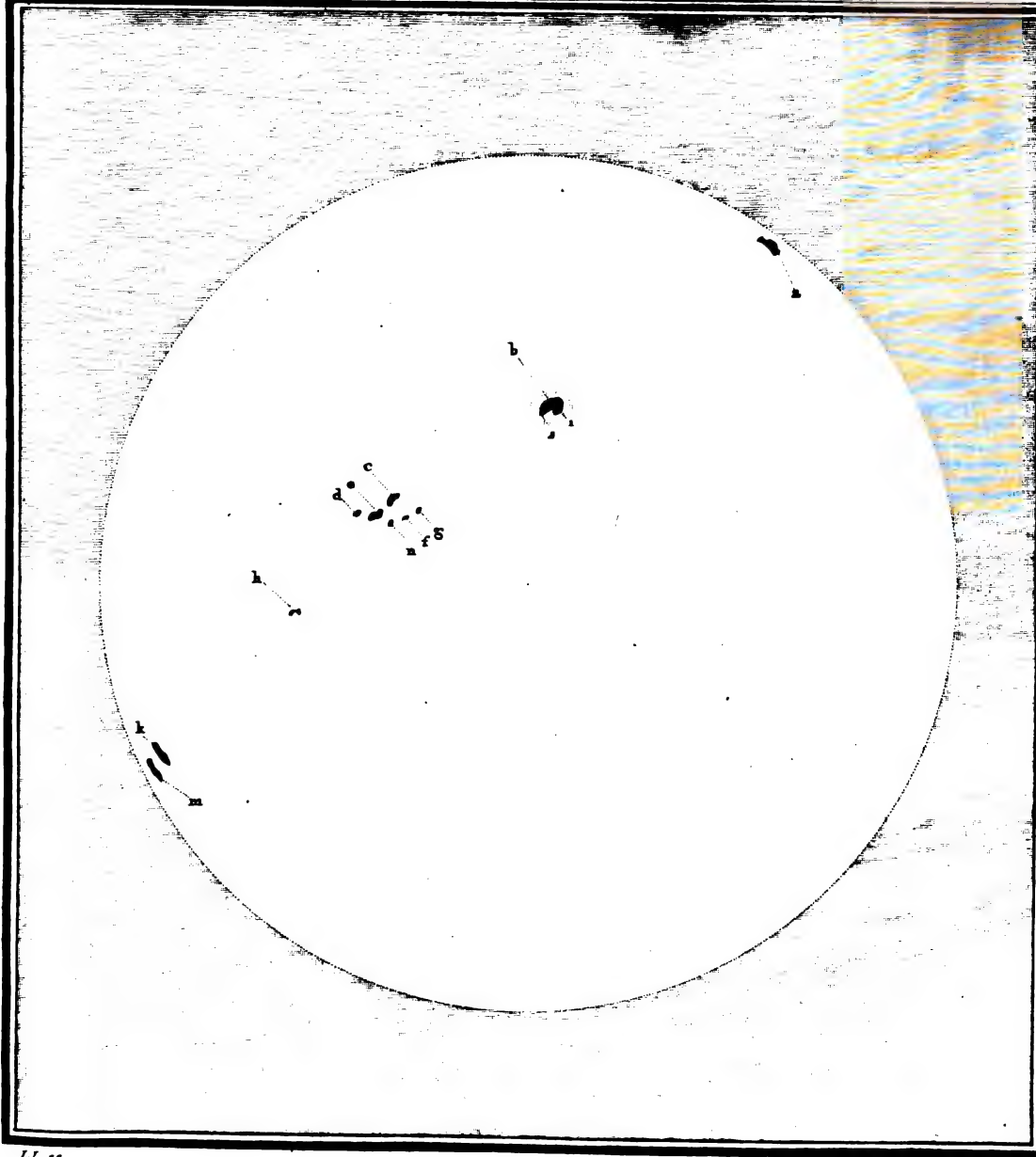
Midi vrai le 4 par dix hauteurs correspondantes, 0<sup>h</sup> 1' 48<sup>''</sup>  
à la pendule.

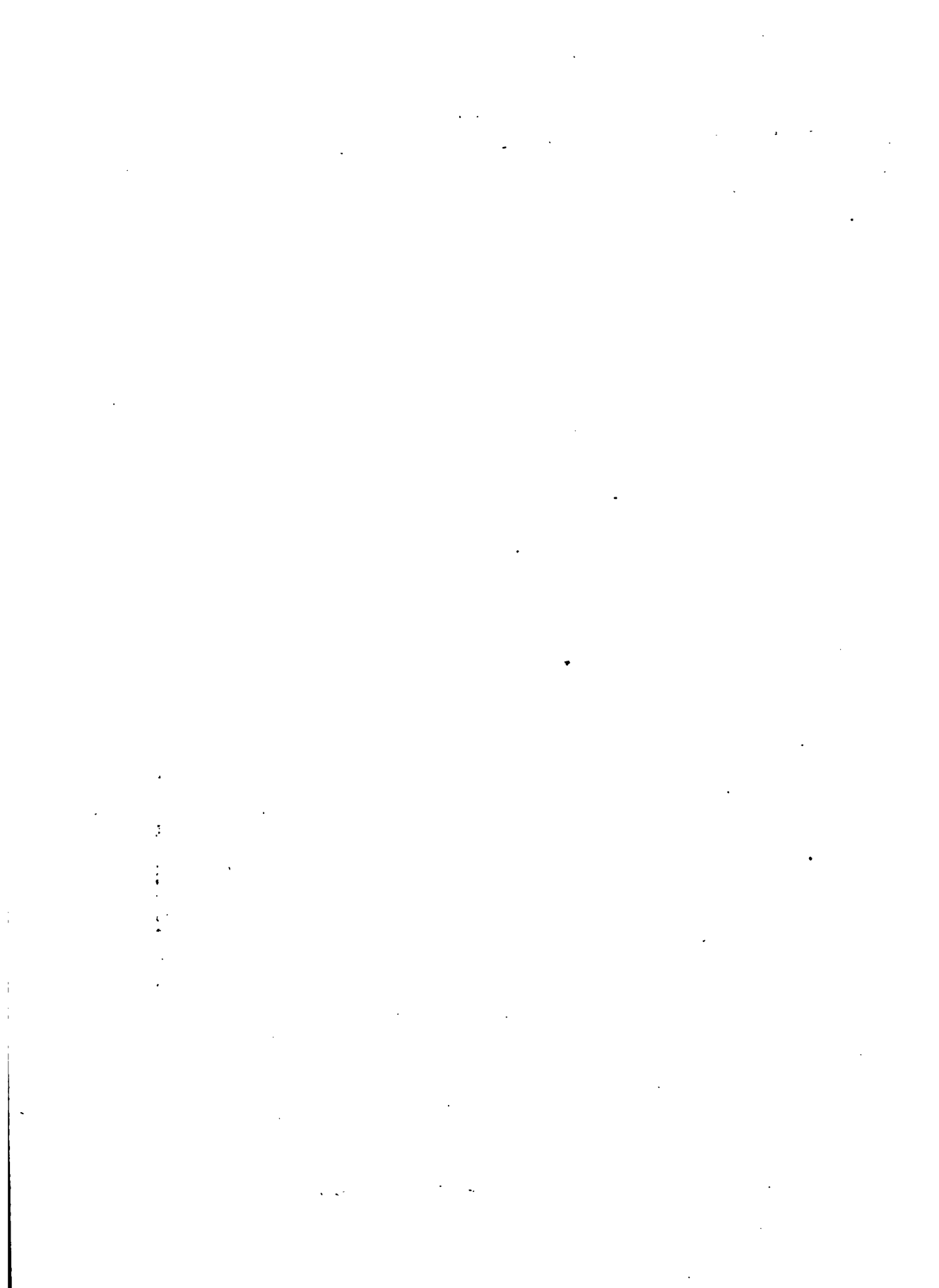
Tous les instans marqués dans ce Mémoire, sont au temps vrai,  
& ont été corrigés de l'avancement de la pendule.

La différence des méridiens de l'Observatoire Royal, & de  
l'hôtel de Passy, est de 14<sup>''</sup> $\frac{1}{2}$  de temps, dont Passy est plus à  
l'ouest. Voyez le Mémoire de M. de Fouchy, année 1761.



TACHES VUES SUR LE SOLEIL,  
lors de l'éclipse de cet Astre par la Lune le 4 Juin 1769.  
*Observée par Messieurs de Fouchy, de Bory et Bailly*





**R E M A R Q U E S**  
**SUR LES DIFFÉRENTES OBSERVATIONS**  
**DU PASSAGE DE VÉNUS,**

*Faites en Angleterre.*

Par M. DE LA LANDE.

**M.** le Docteur Bevis s'étoit transporté, pour faire cette observation ; dans la maison de M. Kerby, Membre de la Société Royale de Londres, à Kew, & seulement à un quart de lieue du nouvel Observatoire que le Roi d'Angleterre a fait faire pour son usage ; il étoit sous une latitude de  $51^{\text{d}} 29' 45''$ , &  $0^{\text{h}} 1' 9''$  de temps à l'ouest de l'Observatoire Royal de Greenwich, c'est-à-dire  $10' 25''$  à l'ouest de Paris ; il se servoit d'un télescope grégorien de  $3\frac{1}{2}$  pieds de foyer, qui avoit 6 pouces anglois d'ouverture, & grossissoit cent vingt fois.

Le 3 Juin, à  $7^{\text{h}} 9' 59''$ , temps apparent ou temps vrai ; M. Bevis aperçut un commencement d'altération sur le bord supérieur du Soleil.

A  $7^{\text{h}} 10' 7''$ , Vénus avoit déjà fait une impression sensible sur le disque du Soleil ; il jugea que le contact extérieur s'étoit fait quelques secondes plus tôt.

A  $7^{\text{h}} 28' 8''$ , Vénus paroissoit entièrement sur le Soleil, ses deux bords sembloient se toucher ; mais au lieu d'un trait de lumière que M. Bevis s'attendoit à voir tout de suite entre les deux limbes, il les vit encore unis pendant quelques secondes par un espèce de ligament étroit, qui étoit moins noir que le disque de Vénus, & qui lui étoit adhérent comme le col d'une bouteille. Cela approche un peu de la manière dont je vis le contact intérieur se faire en 1761.

A  $7^{\text{h}} 28' 17''$  ( ou  $7^{\text{h}} 38' 42''$  à Paris ) ce ligament disparut

Yyy ij

subitement, & abandonna le limbe de Vénus auquel il avoit été uni, & qui reprit bientôt toute sa rondeur.

Quelques minutes après, la circonférence de Vénus devint très-irrégale & raboteuse; elle parut agitée d'une façon très-singulière, en forme de frisure. M. Bevis n'avoit rien vu de semblable dans le passage de 1761, qu'il observoit avec le Duc de Cumberland, le Duc d'York & le Duc de Gloucester, Vénus avoit toujours paru très-bien terminée; mais dans la dernière observation, c'étoit un effet des réfractions qui sont très-irrégales vers l'horizon; je me souviens que le 2 de Juin au soir, regardant le Soleil dans ma lunette achromatique, un peu avant son coucher, je le voyois non-seulement inégal & dentelé, mais morcelé & hérissé d'aspérités si irrégulières, qu'il y en avoit de semblables à des crochets, & qui changeoient de forme dans le moment même qu'on les regardoit. Mais le 3 de Juin, la pluie qui venoit d'abaisser les vapeurs dans l'horizon de Paris, fit que le bord du Soleil couchant parut beaucoup moins inégal. On peut voir dans le voyage astronomique du Père Boscovich, des effets encore plus extraordinaires des vapeurs de l'horizon.

Il paroît donc que c'est à  $7^h 38' 42''$  que M. Bevis a véritablement observé le contact intérieur, mais pour achever de réduire cette observation à Paris, il faut aussi connoître l'effet que la parallaxe y a produit. Pour cela, je me suis servi des calculs que j'avois fait d'avance pour Greenwich, dont je n'avois cependant pas encore reçu les observations: je trouvois qu'à  $7^h 38' 43''$ , comptées au méridien de Paris, l'angle horaire de Vénus étoit à Greenwich de  $112^d 12' 11''$ , la hauteur apparente  $4^d 48' 30''$ ; la parallaxe, par rapport au Soleil,  $22'',548$ , en supposant  $9''$  pour celle du Soleil; l'angle du vertical avec le rayon du Soleil, passant par le lieu vrai de Vénus  $1^d 4' 8''$ , l'angle de la distance apparente  $1^d 5' 42'',5$ ; la distance apparente  $1.5' 17'',5$ ; la distance vraie  $1.5' 40'',03$ ; la distance vraie à la perpendiculaire abaissée sur l'orbite  $2^h 59' 24'',6$ ; la distance au contact, vu du centre de la Terre, étant supposée de  $2^h 51' 58'',4$ : ainsi l'effet de la parallaxe à Greenwich étoit de  $7' 26'',2$ , plus petit seulement de  $0'',2$  qu'à Paris; il paroît donc qu'il n'y a presque aucune réduction à faire

aux observations de Londres & des environs, par rapport à la parallaxe, pour les réduire à Paris; en sorte que l'observation de M. le Docteur Bevis tombe à la même seconde que celle de M. Messier à Paris. Cette observation angloise est datée du 16 Juin; elle m'est arrivée le 21.

Ainsi le contact intérieur pour Paris me paroît pouvoir être fixé par une espèce de milieu entre toutes les observations, à  $7^h 38' 45''$ , du moins à  $5''$  près; les vapeurs de l'horizon ne permettent pas une plus grande précision. Depuis ce temps-là M. Maskelyne m'a envoyé un grand nombre d'observations de ce passage, faites en différentes parties de l'Angleterre & des Colonies Angloises en Amérique; on les trouvera toutes dans les Transactions philosophiques de 1769; j'ai déjà présenté les plus importantes à l'Académie, avec les conséquences que j'en ai tirées. En voici encore quelques-unes.

A Greenwich près de Londres, M. Maskelyne observa le contact intérieur à  $7^h 29' 23''$ , avec une incertitude d'environ  $3''$ , produite par la fluctuation du disque solaire, avec un télescope de 2 pieds de foyer qui grossissoit cent quarante fois. M. Dollond à  $7^h 29' 20''$ ; avec un télescope de  $3\frac{1}{2}$  pieds de foyer, qui grossissoit cent cinquante fois; de même que M. Nairn, avec un télescope de 2 pieds qui grossissoit cent vingt fois; ils étoient dans une autre salle que M. Maskelyne. M. Hirst, dans une troisième pièce, avec un télescope de deux pieds qui grossissoit cinquante-cinq fois, observa le contact à  $7^h 29' 18''$ . Greenwich est à  $9' 16''$  à l'occident de Paris; en sorte que l'observation de M. Maskelyne tombe à  $7^h 38' 39''$  au méridien de l'Observatoire Royal de Paris; c'est 3 secondes plus tôt que suivant M. Messier: aussi M. Maskelyne estimoit à 3 secondes l'incertitude de son observation.

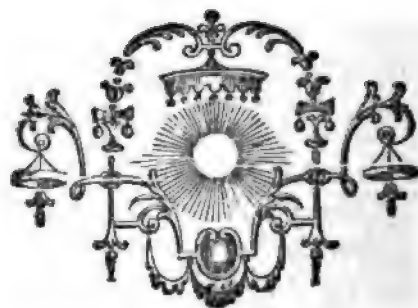
A Hawkill, un mille & demi au nord-est du Collège d'Édimbourg, les deux contacts furent observés de la manière suivante en temps moyen; auquel il faut ajouter  $2' 13''$  pour avoir le temps vrai.

	<i>Contact extér.</i>	<i>Contact intér.</i>	
Lord ALCMOER	6 <sup>h</sup> 57' 33"	7 <sup>h</sup> 14' 32"	Télescope de 18 pouces.
M. JAMES HEY	6. 57. 30	7. 14. 35	Lunette achr. de 3 $\frac{1}{2}$ pieds.
Le Docteur LIND	6. 57. 41	7. 14. 37	Lunette achr. de 2 pieds.

La latitude du lieu est 55<sup>d</sup> 57' 37". La longitude peut se déterminer par la fin de l'éclipse de Soleil, observée à 8<sup>h</sup> 19' 37". de temps vrai.

A Gibraltar, latitude 36<sup>d</sup> 4' 44", & environ 28' 46" à l'occident de Paris. M. le Lieutenant Jardine observa le contact intérieur à 7<sup>h</sup> 8' 21".

Ces observations ne s'éloignent pas sensiblement des résultats que l'on trouvera ci-après, à l'occasion de la plus courte distance des centres, déduite de l'observation de Cajanebourg.



*E X A M E N*  
*D E L A*  
*PLUS COURTE DISTANCE DES CENTRES*  
*D E V É N U S E T D U S O L E I L.*

*Le 3 Juin 1769.*

Par M. DE LA LANDE.

**L**A première observation que nous ayons reçue de la durée totale du passage de Vénus sur le Soleil, est celle de M. Planman, faite à Cajanebourg, sous la latitude de  $64^{\text{d}} 13' 30''$  &  $1^{\text{h}} 40' 40''$  à l'orient de Paris, suivant les calculs que fit M. Pingré, à l'occasion du passage de 1761 qui avoit déjà été observé à Cajanebourg; ou  $1^{\text{h}} 41' 44''$ , suivant les observations de ce nouveau passage, comparées avec celles de Paris.

Le contact intérieur de l'entrée, ou l'immersion totale, arriva le 3 Juin. à  $9^{\text{h}} 20' 45\frac{1}{2}''$ ; & le contact extérieur de la sortie, ou l'émergence totale, le 4 Juin. à  $3^{\text{h}} 32' 27''$  du matin. Pour calculer l'effet des parallaxes dans ces deux instans, il faut avoir les hauteurs de Vénus que j'ai trouvées de  $2^{\text{d}} 14' 38''$  &  $6^{\text{d}} 4' 50''$ ; les angles parallaxiques  $16^{\text{d}} 13' 54''$  &  $20^{\text{d}} 32' 42''$ ; supposant la parallaxe de  $9''$  & les distances apparentes  $91.7'',5$  &  $97.6''$ ; on trouve les distances vraies  $93.9'',04$  &  $99.1'',78$ , les distances au milieu du passage pour les temps des observations  $2^{\text{h}} 57' 17''$  &  $3^{\text{h}} 14' 23''$ , les distances vraies qui auroient lieu pour le centre de la Terre au moment de l'immersion & de l'émergence  $2^{\text{h}} 50' 6''$  &  $3^{\text{h}} 9' 29''$ , & par conséquent l'effet de la parallaxe  $7' 11''$  &  $4' 54''$ , & l'effet total sur la durée  $12' 5''$ .

Ainsi l'immersion totale, vue du centre de la Terre, seroit arrivée à  $9^{\text{h}} 27' 56\frac{1}{2}''$ , & l'émergence à  $3^{\text{h}} 27' 33''$ , au méridien de Cajanebourg: c'est-à-dire au méridien de Paris  $7^{\text{h}} 47' 16\frac{1}{2}''$  du soir, &  $1^{\text{h}} 46' 53''$  du matin.



#### §44 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La corde parcourue sur le disque du Soleil par Vénus dans l'espace de  $5^h 59' 36''$ , qui se sont écoulées entre les deux observations, est de  $1439''.09$ ; d'où il est aisé de conclure la plus courte distance des centres au milieu du passage  $615''.16$ , plus grande seulement de  $8''.4$  que celle que j'avois annoncée dans la *Connoissance des Temps* & dans mon Mémoire sur le passage de Vénus. On la trouveroit encore moindre si l'on diminueoit le diamètre du Soleil de 3 ou 4 secondes, comme il me semble que les deux passages de Vénus l'exigeroient. L'effet de la parallaxe que j'ai trouvée de  $12' 5''$ , en supposant  $9''$  pour celle du Soleil, augmenteroit de  $1' 20''\frac{1}{2}$ , si l'on donnoit  $1''$  de plus à la parallaxe du Soleil. Dans ce cas-là, on trouveroit  $3''.14$  de plus pour la plus courte distance des centres de Vénus & du Soleil. Cette distance seroit de  $618''.3$ , si la parallaxe du Soleil étoit de  $10''$ ; mais les observations des deux passages de Vénus prouvent assez que la parallaxe est à peine de  $9''$ .

De-là il suit qu'on ne sauroit déterminer la parallaxe à un dixième de seconde près, en comparant l'entrée que nous avons observée avec la sortie, observée à Pétersbourg ou ailleurs, à moins qu'on n'eût d'ailleurs la plus courte distance à un tiers de seconde près, ce qui est impossible. Je crois donc absolument inutile toutes les méthodes qui ont été proposées pour déterminer la parallaxe par les seules observations du Nord, en comparant trois observations & éliminant la latitude de Vénus; & je pense qu'il faut attendre les observations d'Amérique pour avoir quelque certitude sur cet élément essentiel qui a fait l'objet de tant de Voyages dispendieux & pénibles (a).

Suivant cette observation de Cajanebourg, le milieu du passage a dû arriver à  $10^h 37' 23''$ , temps vrai, au méridien de Paris; la conjonction à  $10^h 17' 12''$  ou à  $10^h 15'$  de temps moyen, le lieu du Soleil étant, par les Tables de M. l'Abbé de la Caille,

(a) Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai comparé cette durée, observée à Cajanebourg, avec celles de Californie, & j'ai trouvé la parallaxe moyenne du Soleil  $8''.4$ : l'observation

de Wardhus donne même  $9''$  de parallaxe, comme on le verra dans les Mémoires de 1770 & dans la seconde édition de mon *Astronomie*, article 2149.

8<sup>f</sup> 13<sup>d</sup> 27' 27" $\frac{1}{2}$ , plus grand de 57" $\frac{1}{2}$  que par les Tables de Vénus qu'a données M. Halley. Cette erreur des Tables étoit en 1761, de 52" $\frac{1}{2}$ ; en sorte que par un milieu l'on trouveroit 55" à ajouter aux époques de ces Tables pour 1765, s'il n'y avoit une partie de cette erreur qui provient de l'aphélie, comme je me propose de le faire voir par le moyen des digressions de Vénus que j'ai observées avant & après le passage sur le Soleil.

## A D D I T I O N.

DEPUIS la lecture de ce Mémoire, la comparaison de plusieurs autres observations m'a fait trouver le temps vrai de la conjonction à 10<sup>h</sup> 14' 32", ou 10<sup>h</sup> 12' 19" de temps moyen, dans 2<sup>f</sup> 13<sup>d</sup> 27' 22" de longitude, avec 10' 13",8 de latitude; la plus courte distance 10' 7", & le lieu du nœud 2<sup>f</sup> 14<sup>d</sup> 36' 5", peu différent de ce qui se trouve dans mon ASTRONOMIE, art. 2155. J'ai aussi trouvé que l'aphélie de Vénus devoit être fixé à 10' 8<sup>d</sup> 58' pour le commencement de 1768, c'est-à-dire plus avancé de 54' que dans les Tables de M. Cassini, & de 1<sup>d</sup> 22' $\frac{1}{2}$  que dans celles de M. Halley (ASTRONOMIE, art. 1318). C'est ainsi que je l'ai supposé dans les nouvelles Tables de Vénus qui sont jointes à la seconde édition de mon ASTRONOMIE. Le nœud de Vénus est, suivant mes Tables, plus avancé de 15"; mais cette quantité est absolument insensible, car elle ne suppose que 2" d'erreur sur la plus courte distance, ou sur le diamètre du Soleil; d'ailleurs les longitudes même du Soleil ne sont pas certaines à 15" près. Je suppose dans ces calculs la parallaxe moyenne du Soleil de 8",8; la parallaxe pour le jour du passage 8",67; la différence des demi-diamètres du Soleil & de Vénus 914",8; & le moment du contact intérieur à Paris 7<sup>h</sup> 38' 45".

Lû en 1770.

Nœud de  
Vénus.

La durée du passage entre les contacts intérieurs, se trouve par-là de 5<sup>h</sup> 41' 57"; le contact à Cajanebourg, vu du centre de la Terre; 9<sup>h</sup> 27' 39" $\frac{1}{2}$ , & la différence des méridiens tirée des contacts intérieurs 1<sup>h</sup> 41' 44".

Le calcul que j'avois donné d'avance dans la *Connoissance des Temps*, étoit en défaut de 4' 39"; & celui du Mémoire de  
Mém. 1769.

Z z z

*M É M O I R E*  
*S U R L E S*  
*OBSERVATIONS DU PASSAGE DE VÉNUS,*  
*FAITES À B R E S T.*

Par M. D E L A L A N D E.

**L**E passage de Vénus a été observé à Brest dans deux endroits différens, avec toutes les précautions que l'on prend en Astronomie pour s'assurer d'un phénomène; d'un côté, M. le Roy & M. Blondeau, tous deux Professeurs de Mathématiques attachés au Corps de la Marine; de l'autre, M. Fortin, également Professeur de Mathématiques, & M. de Verdun, Officier de Vaisseaux, que nous avons vu cette année même à Paris s'exercer à la pratique de l'Astronomie, après avoir fait, dans le voyage d'Amérique, différentes observations relatives aux Longitudes; M. Fortin a été long-temps à l'Observatoire Royal attaché au travail de la Carte de France, & il s'occupoit dès-lors beaucoup de l'Astronomie; M. Blondeau est celui qui avoit observé déjà le passage de 1761 à Calais, ainsi que l'éclipse annulaire du 1<sup>er</sup> Avril 1764; M. le Roy est celui à qui nous devons une très-bonne traduction du grand *Traité d'Optique* de Smith, enrichie de notes intéressantes.

Les pendules furent réglées de part & d'autre par des hauteurs correspondantes, prises pendant plusieurs jours. M. de Verdun avoit une lunette ordinaire de 7 pieds, M. Fortin une lunette achromatique de 5 pieds, M. Blondeau une lunette achromatique semblable, & M. le Roy une bonne lunette de 14 pieds de Buttieri, que M. de Buffon avoit apportée de Rome, & que j'avois envoyée à M. le Roy.

Dans cet état, le contact intérieur de Vénus, qui étoit notre observation importante, fut observé par M. de Verdun à  $7^h 11' 37''$ , par M. Fortin  $7^h 11' 44''$ , par M. Blondeau  $7^h 12' 4''$ , & par M. le Roy  $7^h 12' 7''$ .

Toutes ces observations paroissent donner le contact plus tard qu'il n'a été observé à Paris, celle de M. de Verdun en approche le plus; car si l'on ajoute  $27' 23''$  à l'observation  $7^h 11' 37''$ , on a  $7^h 39' 0''$ , dont ôtant encore  $2''\frac{1}{2}$ , dont l'effet de la parallaxe étoit plus grand à Brest qu'à Paris; on a  $7^h 38' 57''\frac{1}{2}$  pour le moment du contact, réduit au méridien de Paris: c'est, à la vérité, la même seconde que M. le Duc de Chaulnes a compté à l'Observatoire Royal de Paris, mais c'est  $14''$  plus tard que M. Messier, M. du Séjour, M. Cassini le fils, & suivant l'observation d'Angleterre dont je ferai part à l'Académie dès que j'en aurai fait les calculs.

Mais, comme ce contact a été estimé 30 secondes plus tard par un des autres Observateurs, & qu'en général les Astronomes de Brest me paroissent avoir été en retard sur ceux de Paris, j'ai cru d'abord qu'il pourroit y avoir une partie de cette différence causée par la longitude de Brest, qui seroit peut-être trop forte de quelques secondes dans la Carte de France & dans la *Connoissance des Temps*; je me suis servi pour la vérifier, de l'éclipse de Soleil, dont la fin fut observée le lendemain à Brest par les mêmes Astronomes, avec les mêmes pendules & les mêmes lunettes, à  $7^h 56' 33''$ , suivant M. le Roy & M. Blondeau; & à  $7^h 56' 44''$ , suivant M. Fortin.

J'ai trouvé qu'à  $7^h 56' 33''$ , la parallaxe de la Lune, à Brest, étoit de  $31' 29''$  en longitude &  $38' 18''$  en latitude, la somme des demi-diamètres du Soleil & de la Lune, étoit de  $32' 42''$ ; & la latitude apparente de la Lune, rectifiée sur les observations de Paris, étoit de  $17' 34''$ ; d'où je conclus la distance à la conjonction vraie  $0^h 6' 35''$ , & le temps de la conjonction à Brest  $8^h 3' 8''$ ; je l'ai trouvée pour Paris  $8^h 30' 38''$ , ou 41 secondes, ainsi la différence des méridiens seroit, par cette observation,  $27' 30''$ , au lieu de  $27' 23''$  que j'avois supposé; il ne faudroit même que prendre un milieu, ou de se rapprocher

de l'autre observation de Brest, pour trouver exactement la différence des méridiens de  $27' 23''$ ; j'ai donc lieu de croire que ce n'est point de l'erreur sur la longitude de Brest que provient la différence entre ces observations & celles de Paris.

Pour trouver la quantité dont j'ai dit ci-dessus que l'effet de la parallaxe étoit plus grand à Brest qu'à Paris, il suffit de jeter les yeux sur une Carte de France, sachant que le pôle d'entrée étoit à Trèves, qu'il y a  $7^d 12'$  environ de Trèves à Brest, que pour  $3^d 51'$  l'effet de la parallaxe est d'une seconde, & qu'il croît, comme les sinus versés des arcs; on trouve  $3''\frac{1}{2}$  pour l'effet à Brest, ou presque 3 secondes de plus qu'à Paris.

Je l'ai calculé de même par la méthode rigoureuse dont j'ai donné le détail en rendant compte de mon observation, je trouve les résultats suivans pour  $7^h 12' 6''$  à Brest; angle horaire de Vénus  $107^d 51' 56''$ , déclinaison  $22^d 38' 43''$ , hauteur apparente  $5^d 43' 19''$ , angle parallactique  $39^d 26' 28''$ , angle du vertical avec la ligne du lieu vrai de Vénus  $5^d 9' 17''$ , & avec la ligne du lieu apparent  $5^d 16' 51''$ , 7.

La parallaxe de hauteur  $22''$ , 515; la distance vraie  $15' 39''$ , 92; la distance apparente  $15' 17''$ , 5; la distance au milieu de l'éclipse  $2^h 59' 22''$ , 4; & , comme la vraie distance au moment du contact, vu du centre de la Terre, étoit  $2^h 51' 58''$ , 4; l'effet de la parallaxe pour Brest est donc  $7' 24''$ , tandis qu'il étoit pour Paris  $7' 26''$ , 4: donc l'effet est plus grand à Brest qu'à Paris de  $2''$ , 4, ce qui ne diffère pas sensiblement de ce que j'ai trouvé par la simple figure.



---

*M É M O I R E*

*Dans lequel on démontre l'action du Pourmon sur l'aorte , pendant le temps de la respiration , & où l'on prouve que dans l'enfant qui vient de naître , le pourmon droit respire avant le gauche.*

Par M. PORTAL.

SI l'on jugeoit de la perfection des Sciences, par le nombre & le rang des Savans qui les ont cultivées, on croiroit que tous les objets que l'Anatomie & la Physiologie présentent, sont épuisés. Mais dans la vaste carrière des Sciences, quelque battue qu'elle soit, on voit toujours paroître mille sujets qui piquent notre curiosité, & qui avoient échappé aux yeux de nos prédécesseurs.

Ce n'est pas en recherchant les causes des phénomènes, que l'on parvient à les connoître; c'est en suivant la Nature dans sa marche, qu'on la force à se dévoiler. J'étois depuis long-temps occupé à chercher la cause de l'inégalité des bronches; non-seulement le pourquoi me sembloit nouveau, mais encore la question d'Anatomie me paroissoit peu connue.

Pour dissiper mes doutes, je consultois en vain les descriptions & les planches des Anatomistes; la plupart n'avoient pas indiqué cette inégalité; les autres étoient en contradiction avec leurs contemporains, souvent avec eux-mêmes. Je pris pour lors le parti de ne m'en rapporter qu'à mes recherches; j'ouvris le vrai livre de la Nature: je consultai le cadavre, je fis plusieurs expériences sur les animaux vivans. Une découverte conduit ordinairement à une autre; & de l'examen scrupuleux des organes renfermés dans la poitrine, j'ai tiré une description exacte des bronches; j'ai sur-tout aperçu la connexion de la bronche gauche avec la crosse de l'aorte. Les animaux m'ont présenté un phénomène qui fait le principal sujet de ce Mémoire; je vais donner la description des bronches.

La trachée-artère parvenue entre la seconde & la troisième vertèbre du dos, se divise en deux branches, appelées par les Anatomistes, *bronches*, par rapport aux usages que ces canaux remplissent dans l'économie animale.

Les bronches diffèrent entre elles par leur grosseur, leur longueur & leur direction; la droite est environ d'un quatrième plus grosse que la gauche, & celle-ci est plus longue d'un cinquième.

La bronche gauche est beaucoup plus inclinée que la droite; elle est en même-temps plus postérieure.

La direction de ces canaux souffre quelques variétés par rapport aux âges; le fœtus qui n'a point respiré, a la bronche gauche plus inclinée, plus postérieure, que l'enfant venu au jour; la bronche droite dans l'enfant venu à terme, se trouve un peu plus élevée qu'elle n'étoit avant la naissance de l'enfant.

Cette description, qui est conforme à la Nature, ne se trouve dans aucun livre d'Anatomie; les uns indiquent certains points, & en omettent d'autres aussi essentiels. M. Lieutaud a parlé du changement de position dans les bronches, lorsque l'air distend les poumons; mais il n'a point parlé des différentes capacités de ces tuyaux *aérifères*. On voit dans les planches de Cowper la bronche droite plus inclinée, plus longue, & moins large que la gauche, ce qui rentre dans l'ordre naturel; mais les bronches sont dans le même plan, ce qui n'est point dans l'homme, puisque la bronche droite dans l'adulte est plus antérieure que la gauche.

Un autre reproche qu'on peut faire à Cowper, c'est de n'avoir point indiqué dans sa description, la différente position, l'étendue & l'inclinaison des bronches. Il semble que le Peintre ait été au-delà des vues de cet Anatomiste.

Ce que le Peintre de Cowper a observé, a été représenté par le Peintre dont M. Haller s'est servi pour faire des planches sur le poulmon & sur le cœur; ces planches sont insérées dans les Opuscules d'Anatomie; dans l'explication de la figure, M. Haller n'a nullement indiqué les objets qui sont le sujet de nos recherches. Cependant M. Haller entre ailleurs dans des détails plus longs; dans son chapitre sur la respiration, il dit, en parlant de la bronche gauche, *sinister longior, obliquior, idemque aliquanto gracilior est.*

Ce grand Physiologiste ne dit point, comme M. Lieutaud, que la bronche gauche est placée plus en avant que la droite.

Ce changement de direction, ignoré de la plupart des Anatomistes, a donné lieu à beaucoup de méprises. On voit dans les Tables Anatomiques de Verrèyen, de ceux qui l'ont copié, ou qu'il a copiés lui-même, les bronches dans le même plan, & au même degré d'inclinaison, & de la même grosseur. M. Winslow & d'autres, ont omis de parler de ces différences de bronches, mais elles n'ont pas échappé aux yeux de M. Senac. Il représente dans ses planches sur le cœur, la bronche gauche plus inclinée que la droite; l'inclinaison qu'on a donnée à la bronche gauche est telle qu'on l'observe dans l'adulte; mais dans le fœtus, elle approche plus de la perpendiculaire, & elle est plus postérieure. Cependant si la planche que j'indique est exacte, la description que M. Senac en donne est infidèle.

Il faut donc, pour avoir une idée exacte des bronches, recueillir les différentes descriptions que les Anatomistes ont données de ces vaisseaux; les uns fixent notre attention sur certains objets, les autres sur quelqu'autre; & c'est en réunissant les idées éparées dans une multitude d'ouvrages, qu'on peut se former une véritable idée des vaisseaux aériens.

Les premières bronches ont, comme la trachée-artère, des anneaux cartilagineux, avec cette différence qu'ils ne sont pas tronqués postérieurement; ce sont de véritables cercles fixés dans leur place, par un ligament très-élastique dont la couleur est d'un blanc tirant sur le rouge. Quelques Anatomistes séduits par cette couleur, ont regardé cette enveloppe comme musculaire, & M. Haller a adopté ce sentiment.

Ce ligament est composé de deux plans de fibres; ces plans se joignent entre les anneaux, & se divisent en s'écartant pour recevoir les cartilages qui les recouvrent. Bartholin a connu le ligament & le double plan de fibres dont il est composé; selon cet Anatomiste, la lame externe est un prolongement de la plèvre, l'externe est la continuation de la membrane qui tapisse la bouche.

Je ne donnerai point à ces lames membraneuses la même origine. Je crois qu'elles sont d'une structure bien différente de la



plèvre & de la membrane qui revêt la bouche ; on ne peut d'ailleurs démontrer leur continuité , aussi je les regarde comme purement appartenantes aux bronches : entre les deux lames de la membrane , il y a , selon le même Auteur , des ligamens propres qui s'implantent aux cartilages : ces ligamens n'existent point : on dégage les cartilages de leurs enveloppes , en faisant long - temps macérer les bronches dans l'eau bouillante , ou même dans l'eau froide ; la membrane reste dans son entier , ce qui fournit une preuve complète de la continuité de la membrane ligamenteuse. M. Winslow s'étoit formé une autre idée sur la structure de la trachée-artère & des bronches ; il dit que les cerceaux sont liés par des ligamens particuliers qui se terminent chacun aux cartilages voisins : l'observation anatomique que je viens de rapporter pour appuyer mon sentiment , suffiroit seule pour détruire celle qu'avoit adoptée ce grand Anatomiste ; mais je puis en trouver une autre dans la manière dont se fait l'ossification de cette partie ; il n'y a souvent que la membrane extérieure qui s'ossifie : on trouve pour lors les cartilages dans leur intégrité , quoique toute la trachée-artère paroisse ossifiée.

Les bronches sont tapissées intérieurement d'une membrane dans laquelle on voit plusieurs lignes longitudinales parallèles les unes aux autres ; mais outre les replis longitudinaux , il en est un autre qui mérite une très-grande attention ; ce repli se trouve dans le point où la trachée-artère fournit la bronche gauche ; il est en partie formé par la membrane , & en partie par le premier cartilage de la bronche qui est poussé dans l'intérieur du canal ; cette position du cartilage provient de l'inclinaison du conduit auquel il appartient ; & comme cette inclinaison varie , cette duplicature est plus ou moins saillante dans les différens âges de la vie : la bronche gauche est plus inclinée dans le fœtus qui n'a pas respiré , & ce repli est plus élevé : le contraire arrive , lorsque le poumon droit reçoit l'air ; alors la bronche droite se relève , & la duplicature diminue : elle disparoîtroit totalement , si la bronche formoit avec la trachée-artère , un angle parfaitement droit ; cette duplicature est placée entre les bronches , comme les éperons d'un pont des rivières le sont entre les arches différentes qui le composent.

La bronche droite flotte librement dans la cavité de la poitrine  
qui

qui la reçoit : aucun obstacle ne s'oppose aux différens mouvemens que l'air ou l'abaissement des côtes lui fait produire. Elle s'élève librement lorsque le poumon qui lui répond, se dilate, & elle s'abaisse avec une égale facilité lorsque les poumons s'affaissent ; il n'en est pas de même de la bronche gauche, l'artère-aorte l'embrasse exactement : il faut même que le vaisseau par où passe la plus grande quantité de sang, obéisse, cède aux différens mouvemens qu'exécute la bronche sur laquelle elle appuie.

La connexion de l'aorte avec la bronche, est connue de quelques Physiologistes. Il est surprenant qu'ils n'aient pas réfléchi sur les effets que ces deux vaisseaux doivent produire l'un sur l'autre ; l'aorte trop distendue, peut comprimer la bronche, & empêcher l'air de pénétrer le poumon gauche pour le distendre suffisamment.

La bronche dilatée par l'air, ou relevée par la même cause ; en pressant à son tour l'aorte, peut donner lieu aux palpitations de cœur les plus violentes & à un nombre infini d'autres maladies dont il seroit hors de propos de faire l'énumération. Dans un homme attaqué d'un anévrysme à la crosse de l'aorte, & qui avoit ressenti la plus grande difficulté de respirer, je trouvai la bronche gauche très-rétrécie par la compression que l'aorte exerçoit sur elle ; & dans le cadavre d'un asthmatique, dont le pouls avoit été extraordinairement irrégulier, je vis le poumon gauche rempli de tubercules & la bronche du même côté, qui, par son élévation contre nature, comprimoit le bord concave de la crosse de l'aorte.

Pour jeter un plus grand jour sur la cause des dérangemens qui peuvent survenir dans ce cas, il est nécessaire que j'entre dans quelques détails anatomiques.

L'aorte dans le fœtus qui n'a point respiré, est très-inclinée de devant en arrière, & un peu sur le côté de la bronche ; car, outre que la bronche gauche qu'elle accompagne toujours est plus en arrière à cet âge, qu'elle ne l'est dans l'enfant qui a respiré, le thymus qui remplit une partie de la poitrine, concourt encore à la porter en arrière. M. Lientaud a déjà fait cette remarque dans son troisième Mémoire sur le cœur, inséré dans le volume de l'Académie Royale des Sciences, année 1754.

L'aorte change de position lorsque l'air pénètre l'intérieur du

*Mém. 1769.*

A a a

poumon gauche ; la bronche en s'élevant , élève en même-temps l'aorte ; & comme la bronche , lorsqu'elle se relève se porte en avant , l'artère la suit aussi dans ses différens mouvemens ; le thymus en s'effaçant , laisse à la bronche un plus grand espace pour exécuter ses mouvemens. J'ai soumis à l'expérience plusieurs animaux vivans ; les chats , les chiens , n'ont point été épargnés ; & après plusieurs ouvertures d'animaux , tant de ceux qui n'avoient point respiré , que de ceux qui avoient déjà reçu l'air dans leurs poumons , j'ai toujours vu l'aorte plus en arrière dans la poitrine de ceux qui n'avoient pas respiré que dans ceux qui avoient déjà eu les poumons dilatés par l'air.

Ces recherches sur les changemens qui arrivent dans les organes de la poitrine , me donnèrent lieu à de nouvelles réflexions. Je fus curieux de savoir ce qui se passoit dans le temps de la respiration : voici ce que j'ai observé , & que tout Anatomiste peut apercevoir s'il veut se donner la peine de le rechercher sur les animaux vivans. Après avoir levé le sternum d'un chien vivant , j'ai soufflé dans la trachée-artère , par le moyen d'un tuyau de verre que j'avois introduit dans le canal aérien , à la faveur d'une ouverture pratiquée au-dessous du larynx : toutes les fois que le poumon gauche entroit en dilatation , je voyois la bronche gauche s'élever avec l'aorte ; au contraire , ces deux canaux s'abaissoient lorsque j'exprimois l'air des poumons. Je conclus , d'après cette expérience , que l'artère-aorte est élevée & portée en avant à chaque inspiration , & qu'elle est portée en arrière & en bas lorsque le poumon s'affaïsse. Cette remarque de Physiologie me paroît de la plus grande importance pour la pratique de la Médecine. Non-seulement on apprend jusqu'à quel point les maladies du cœur & des vaisseaux sanguins , peuvent agir sur les poumons , mais encore on voit clairement que les vices de la respiration doivent se faire sentir sur tout le système vasculaire ; car les inspirations trop grandes , trop souvent répétées , doivent accélérer ou retarder la circulation de nos humeurs ; ce qui ne peut se faire sans un dérangement de fonctions. On remarque que dans certaines affections du poumon , les artères battent de temps en temps , comme par *soubresaut* ; ce qui s'accorde assez avec la théorie que nous venons d'exposer.

Mes recherches en étoient au point que je viens d'indiquer, lorsqu'un jour, conduit par un esprit de doute & d'incertitude, je voulus répéter les expériences que j'avois déjà faites; j'ouvris le thorax d'un petit chat mort depuis peu, j'aperçus une différence dans la couleur des lobes du poulmon, le droit étoit d'un rouge-pâle, la couleur du gauche étoit plus foncée, elle étoit d'un rouge-obscur; cette différence de couleurs me fit présumer que le poulmon droit avoit reçu l'air avant le gauche; je jetai ces poulmons dans de l'eau de fontaine, le droit surnagea, tandis que le gauche se précipitoit au fond du vaisseau; je me défois de ces signes, quoique suffisans pour me convaincre. J'ouvris, quelques jours après, la poitrine de trois chiens qui avoient respiré, j'enlevai leurs poulmons qui surnagèrent tous: les poulmons de plusieurs chats qui n'étoient pas venus à terme, & qui n'avoient pas respiré; ceux de trois petits chiens, dont la mère n'avoit pas encore mis bas, étant jetés dans l'eau, s'y enfoncèrent; ayant soufflé dans le poulmon droit d'un petit chien qui n'avoit pas encore respiré, ce poulmon surnagea, malgré les efforts que j'avois faits pour en exprimer l'air, au lieu que le gauche se précipita au fond de l'eau.

Toutes ces expériences auroient pu, je crois, suffire pour conclure que le poulmon droit respiroit avant le gauche; mais comme en matière de Physique, on ne sauroit agir avec trop de précaution quand on procède à des expériences, & trop réservé quand il faut tirer des conclusions sur ce que l'on observe, je voulus vérifier ce fait que je croyois déjà très-vraisemblable.

Un chat tué deux ou trois minutes après sa naissance, m'offrit les mêmes circonstances que le premier; le poulmon droit étoit d'un rouge-blanc, le gauche d'un rouge-obscur; le premier remplissoit presque toute la capacité droite de la poitrine, l'autre étoit tout ramassé & ridé, la poitrine présentoit un grand vide, le poulmon droit plongé dans un seau d'eau de rivière surnagea, au lieu que le gauche s'enfonça: je tirai ce dernier hors de l'eau, & après avoir soufflé dans l'intérieur des bronches, je le plongeai dans l'eau; il surnagea aussi-bien que l'autre. De l'Anatomie comparée, je passai à celle d'un fœtus humain: on m'en procura un qui n'étoit pas venu à terme & qui n'avoit pas respiré; ayant soufflé dans la

trachée-artère, je vis clairement que l'air gonflait plutôt le poulmon droit que le gauche ; il sembloit que l'air n'entroit dans ce dernier que par reflux.

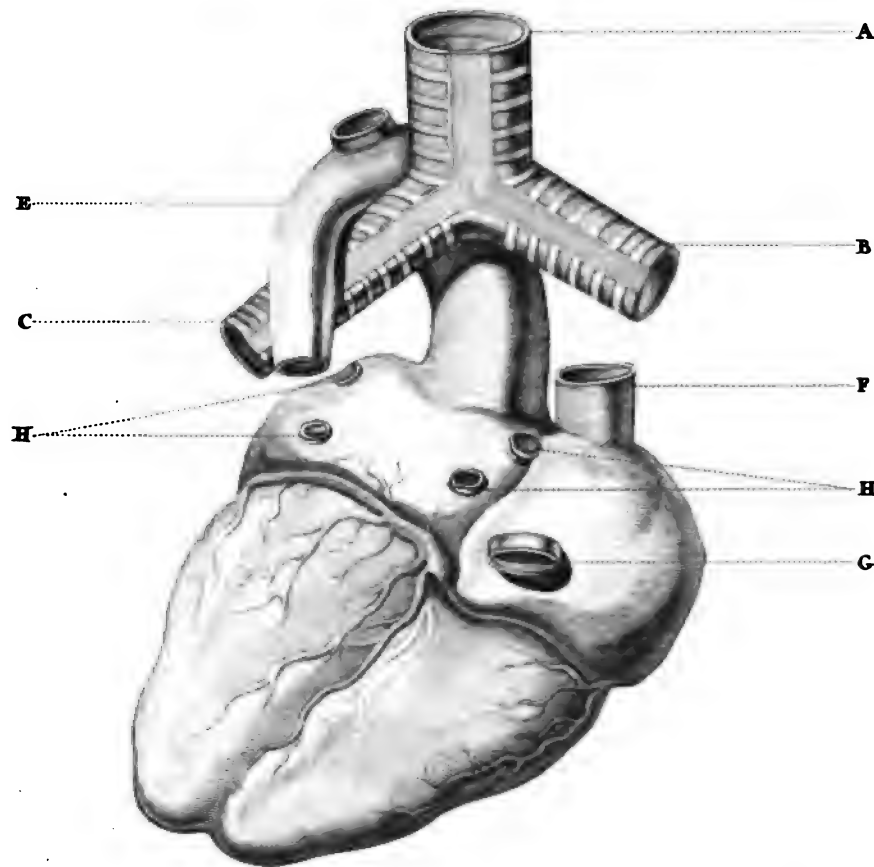
On doit avouer que ces expériences ne réussissent pas toujours ; la direction que l'on donne au tuyau dont on se sert pour souffler, les obstacles qui se rencontrent quelquefois dans le poulmon droit, s'opposent à l'entrée de l'air ; le souffle entre pour lors dans le gauche plus tôt que dans le droit. Je cherchois un jour à découvrir la cause qui m'avoit fait manquer mon expérience, & je trouvai des grumeaux de sang dans la bronche droite ; je l'ai trouvée une autre fois remplie de mucosité.

On fait aisément ces expériences sur les animaux, mais il est difficile d'avoir des foetus humains pour s'assurer de la vérité ; il est rare d'avoir des enfans qui n'aient vécu que deux ou trois minutes ; ou ils ont vécu plus long-temps, ou bien ils sont venus morts. On trouve cependant un fait dans un Mémoire de M. Petit de Namur, inséré dans le Recueil de l'Académie Royale des Sciences (*année 1733*), qui m'est trop favorable pour le passer sous silence. M. Petit, en donnant la description d'un foetus humain monstrueux, s'exprime ainsi :

« Les poulmons étoient différens l'un de l'autre ; celui du côté droit étoit rouge, pâle, gonflé, comme sont ordinairement les poulmons qui ont respiré ; le côté gauche étoit d'un rouge-brun, comme sont ceux des foetus qui n'ont pas encore respiré : ce qui marquait assez que l'enfant avoit respiré par le poulmon droit, dans lequel l'air étoit entré, mais qu'il n'avoit pu s'introduire dans le poulmon gauche. M. Petit donne ensuite la description des bronches ; il ne parle point de l'inégalité de ces conduits »

Après tout ce que je viens de rapporter, il me paroît qu'on peut conclure que dans la première inspiration, & peut-être dans toutes les autres de la vie, l'air pénètre le poulmon droit avant le poulmon gauche. L'expérience vient à l'appui de ce sentiment, & l'on peut rendre raison de cette particularité qui dépend de la structure même des parties : la bronche droite est plus grande, plus ample que la gauche ; l'air entrant pour la première fois dans la poitrine, a moins de peine à pénétrer dans l'intérieur

*Face postérieure du Cœur, de l'Aorte et de la Trachée Artère*



- A... *Portion inférieure de la Trachée Artère* . . . . .
- B... *Bronche droite* . . . . .
- C... *Bronche gauche* . . . . .
- E... *La Crosse de l'Aorte* . . . . .
- F... *Veine Cave Supérieure* . . . . .
- G... *Orifice de la Veine Cave inférieure* . . . . .
- HH... *Les quatre Troncs des Veines pulmonaires* . . . . .



de ce tuyau que dans le gauche ; en outre , la bronche gauche étant plus longue & plus étroite , l'air a plus de frottemens à effuyer contre ses parois , que contre celles de la droite dont la surface est beaucoup plus étendue : la bronche gauche est en partie bouchée par le petit repli de la membrane interne des bronches , & par la portion interne du poumon ; de plus , l'aorte & le canal artériel qui sont remplis de sang en comprimant la bronche gauche , diminuent sa capacité , & forment un obstacle qui retarde l'entrée de l'air.

Quand on connoît ce mécanisme , on peut aisément expliquer pourquoi le canal artériel s'efface peu après la naissance ; la bronche gauche en s'élevant , éloigne l'aorte de l'artère pulmonaire , distend le canal artériel ; & comme elle est placée sous ce même canal , elle ne peut se relever qu'en le comprimant. Ceux qui sont par état obligés de faire des rapports en Justice , doivent faire attention aux expériences que j'ai rapportées : le poumon droit d'un enfant qui n'avoit vécu que très-peu de temps , plongé dans l'eau , surnageoit , tandis que le poumon gauche s'enfonçoit ; & si l'on portoit son jugement d'après une seule épreuve , l'on pourroit tomber dans la plus fâcheuse méprise.





**O B S E R V A T I O N S**  
**BOTANICO - MÉTÉOROLOGIQUES,**  
*Faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers*  
*en Gâtinois, pendant l'année 1768.*

Par M. DU HAMEL.

**A V E R T I S S E M E N T.**

**L**ES Observations météorologiques sont divisées en sept colonnes, de même que les années précédentes. On s'est toujours servi du thermomètre de M. de Reaumur, & on part du point zéro, ou du terme de la glace: la barre à côté du chiffre indique que le degré du thermomètre étoit au-dessous de zéro; quand les degrés sont au-dessus, il n'y a point de barre; o désigne que la température de l'air étoit précisément au terme de la congélation.

Il est bon d'être prévenu que dans l'Automne, quand il a fait chaud plusieurs jours de suite, il gèle, quoique le thermomètre, placé en dehors & à l'air libre, marque 3 & quelquefois 4 degrés au-dessus de zéro; ce qui vient de ce que le mur & la boîte du thermomètre ont conservé une certaine chaleur; c'est pourquoi on a mis dans la septième colonne, *Gelée*.

Les Observations ont été faites à huit heures du matin, à deux heures après midi, & à onze heures du soir.

*Nota.* Les Observations du baromètre, à commencer du premier de ce mois, ont été faites sur un baromètre callé sur celui de l'Observatoire, qui est 3 lignes plus haut que celui dont nous servions les années précédentes.

JANVIER 1768.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi.	Sotr.			
		Degts.	Degts.	Degts.	pous.	lign.	
1	E.	—6	—4	—4	26.	9	couvert, neigeux & venteux.
2	N.	—6	—8	—11	27.	6	beau & grand vent.
3	N.	—12	—9 $\frac{1}{2}$	—11	27.	8	beau soleil, & venteux.
4	N.	—11	—10	—13	27.	9	<i>idem.</i>
5	N. E.	—11 $\frac{1}{2}$	—12 $\frac{1}{2}$	—11 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau soleil.
6	N. E.	—13 $\frac{1}{2}$	—9	— $\frac{1}{2}$	27.	6	beau avec brouillard en l'air.
7	E.	—2 $\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{2}$	—1	27.	5	variable avec brouillard.
8	E.	— $\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{2}$	0	27.	3	brouillard & givre sur les murs.
9	E.	— $\frac{1}{2}$	—2 $\frac{1}{2}$	2	27.	1	variable avec pluie.
10	S.	2	2 $\frac{1}{2}$	2	27.	5	couvert & bruine, grande humidité.
11	S.	1	3 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$	27.	6	variable avec pluie.
12	S. E.	1	3	2	27.	9	couvert & brouillard.
13	E.	2 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	1	26.	7	grand brouillard.
14	S.	1	7	3	27.	5	beau soleil.
15	E.	2 $\frac{1}{2}$	9	6	27.	6	beau avec nuages.
16	N. E.	4 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	4	27.	9	couvert & pluvieux.
17	N. E.	3	6 $\frac{1}{2}$	4	27.	9	variable avec bruine.
18	S.	3 $\frac{1}{2}$	6	4 $\frac{1}{2}$	27.	6	pluvieux & venteux.
19	S.	1	3 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$	27.	7	couvert & pluvieux.
20	S. O.	2	4	2 $\frac{1}{2}$	27.	4	grande pluie & grand vent. à midi 27.2.
21	N.	1	1 $\frac{1}{2}$	0	27.	8	couvert.
22	S.	—1	2	1 $\frac{1}{2}$	27.	4	beau avec nuages.
23	S. O.	$\frac{1}{2}$	3	0	27.	4	grand vent froid & nébuleux.
24	S. O.	0	3	4	27.	4	nébuleux, venteux, pluvieux.
25	S.	4	7	7	27.	7 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
26	O.	6	7 $\frac{1}{2}$	2	27.	10 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie.
27	E.	0	7	3	27.	8 $\frac{1}{2}$	grand brouillard le matin, le soir beau.
28	E.	1	8 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	27.	8	beau temps; petite gelée blanche.
29	E.	3	9	4	27.	9	beau temps.
30	E.	2	8	3	27.	9	<i>idem.</i>
31	N. E.	0	7	2	27.	7 $\frac{1}{2}$	beau temps, gelée à glace.

Eau de pluie du 1 au 31, 1 ponce 6 lignes  $\frac{4}{5}$ .

Ce mois a été très-froid jusqu'au 6 ; le 5, le thermomètre descendit à 13 degrés & demi au-dessous de zéro ; ce qui est près d'un degré de moins qu'en 1709 ; un puits qui a cinquante-cinq pieds de profondeur a gelé de l'épaisseur de deux lignes ; dans un autre, qui n'a que trois ou quatre toises, les seaux ne pouvoient rompre la glace : cependant la Terre n'a pas été gelée aussi profondément que l'année dernière, parce qu'elle étoit plus couverte de neige & que la gelée n'a pas duré aussi long-temps ; mais dans les étangs & dans la rivière d'Essonne où il n'y avoit qu'une nappe d'eau, la gelée ayant pénétré dans la vase, tout le poisson gros & petit, les anguilles, les écrevisses ont péri. Lorsque le dégel est venu, la fonte des neiges a rempli le lit de la rivière, & les bouches des sources qui étoient taries depuis long-temps se trouvant couvertes d'eau, elle y entroit & s'y perdoit comme dans des gouffres.

Il y avoit peu de neige sur les sommières, c'est pourquoi les perdrix & le gibier ont peu souffert, mais on en a beaucoup pris au collet.

Les blés étoient très-épais, & ils se sont montrés bien verts lorsque la neige a été fondue.

On a vu très-peu de comeilles pendant l'hiver ; la maladie des dindons dont on a parlé dans le Journal de l'année 1767, a fini pendant ce mois, parce que tous ceux qui en étoient atteints étoient morts, cette contagion ne s'étant pas étendue sur toute l'espèce. Cette maladie est, je crois, dans le genre des érysipèles ; d'abord les ganglions de la tête se durcissoient, la tête s'enflait, les yeux se fermoient ; les ganglions sont venus à suppuration, & il s'est formé des chancres dans le bec ; & à plusieurs, les yeux sont tombés en pourriture. On leur a lavé la tête avec de la lessive ou de l'eau vulnérable, & gargarisé le bec avec du vinaigre, du sel & du poivre, le tout inutilement ; mais il est bon d'observer que presque tous les mâles sont morts, & qu'il y a eu beaucoup moins de femelles qui aient été atteintes de la maladie ; de quarante-huit dindons de notre basse-cour, il en est mort vingt-cinq ou vingt-six.

Quelques-uns aussi sont morts subitement sans paroître malades ; on les trouvoit morts le matin sous leurs jucs ; j'en ai fait ouvrir,

&

& j'ai remarqué que la membrane intérieure du gésier étoit sphacelée & se déchiroit comme de l'amadoué, mais il y a des raisons de doute que ce soit la vraie cause de la mort de ces animaux ; on en conviendra si l'on consulte la note qui est au bas de cette page \*.

En général, les Fermiers ont perdu cette année la moitié de leurs poules, quelques-uns même toutes leurs volailles, qui mourroient en langueur ; entr'autres d'une espèce de diarrhée que les Fermières appellent la *foire blanche*.

Les hommes ont été affligés pendant l'automne de dysenteries très-dangereuses & de fièvres malignes.

Les rhûmes, accompagnés de fièvre qu'on appelle la *grippe*, ont été épidémiques pendant ce mois ; presque personne n'en a été exempt.

\* Voy. le Volume des Mémoires de l'Académie, année 1752, page 297, où il est question du premier Mémoire sur la digestion des oiseaux, par M. de Reaumur ; il est dit en parlant de la membrane interne des gésiers :

« Enfin ce que cette membrane » peut perdre, ce qui lui est enlevé, » est réparé, s'il a besoin de l'être, » comme le sont les calus des mains » de ceux qui travaillent à des ouvrages de force. M. Hérissant soup- » çonne plus ; il a puvert des gésiers

qui lui ont donné de la disposition « à penser que la membrane intérieure « se renouvelle comme l'estomac des « écrevisses, mais par parties ; il a vu « & m'a fait voir des endroits où des « lambeaux manquoient à cette mem- « brane, & d'autres morceaux de « membranes formés par-dessous, prêts « à avoir la consistance de l'ancienne « membrane ; il n'est pas rare de trou- « ver des gésiers auxquels cette mem- « brane ne tient presque point, & il « n'en est pas dont il ne soit aisé de la « détacher ».

## FÉVRIER.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pous.	lignes.	
1	N. E.	1	7	2 $\frac{1}{2}$	27.	7 $\frac{1}{2}$	variable sans pluie.
2	N. E.	$\frac{1}{2}$	4	1	27.	7	variable avec pluie.
3	N. E.	-1 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$	-2	27.	9	beau soleil.
4	N.	-3	-1	- $\frac{1}{2}$	27.	10	couvert & brouillard.
5	N. E.	0	2 $\frac{1}{2}$	-1	28.	1	beau & venteux avec nuages.
6	N. E.	-2 $\frac{1}{2}$	2	1	28.	2	beau avec nuages.
7	N. E.	1	2 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$	28.		couvert.
8	S.	$\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	-1 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau & couvert.
9	S.	-1 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$	0	27.	8	idem.
10	S.	3 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	7	27.	7	couvert & venteux.
11	S.	$\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	7 $\frac{1}{2}$	27.	8	beau & venteux avec nuages.
12	S.	6	10	5	27.	8 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
13	S.	2 $\frac{1}{2}$	7 $\frac{1}{2}$	4	27.	10	gélée, brouillard, beau avec nuages.
14	E.	2 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau avec nuages.
15	S. O.	3	10 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau & venteux avec nuages.
16	N.	7	9 $\frac{1}{2}$	4	27.	9	variable avec brume.
17	E.	5	6	4 $\frac{1}{2}$	27.	9	idem.
18	E.	1	7	6 $\frac{1}{2}$	27.	8 $\frac{1}{2}$	couvert, venteux & brume.
19	S.	5 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	5	27.	11 $\frac{1}{2}$	idem.
20	S.	3	8 $\frac{1}{2}$	5	28.		beau & couvert.
21	S.	4 $\frac{1}{2}$	9	7	27.	11	variable avec pluie.
22	E.	6 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	7 $\frac{1}{2}$	27.	9	couvert.
23	S. O.	6	11 $\frac{1}{2}$	8 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau & venteux avec nuages.
24	S. O.	7	9	7 $\frac{1}{2}$	27.	10	variable avec pluie & éclairs.
25	S.	6	8	6 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau & venteux avec nuages.
26	S. O.	2	9	4	28.	1	beau avec nuages.
27	S.	4	8	7 $\frac{1}{2}$	28.	1	beau & couvert.
28	S.	6 $\frac{1}{2}$	8 $\frac{1}{2}$	7 $\frac{1}{2}$	28.	$\frac{1}{2}$	couvert & petite pluie.
29	S.	6	11	6	27.	10	beau avec nuages.

Eau de pluie, du 1. au 29, 6 lignes  $\frac{1}{10}$ .

Ce mois a été assez doux ; il est tombé peu d'eau ; cependant la terre a toujours été rafraîchie par les petites rosées , & on a beaucoup travaillé pour les mars , tant à labourer la terre qu'à semer les avoines.

Le 8 , les petits ellebores jaunes ont fleuri quelques jours avant la perce-neige.

Les Vignerons , en taillant la vigne , trouvoient la moëlle du sarment noire , mais l'œil étoit verd.

Les blés étoient très - verts , un peu trop épais , & il y avoit beaucoup d'herbes que la neige avoit conservées , ainsi que les blés.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pous.	lign.	
1	S.	6 $\frac{1}{2}$	12	6	27.	9 $\frac{1}{2}$	beau soleil.
2	O.	4 $\frac{1}{2}$	10	6 $\frac{1}{2}$	27.	9	couvert & nébuleux.
3	N. E.	2	3	-3	28.	1	venteux avec un peu de neige.
4	N. E.	-5	1	-1	28.	1 $\frac{1}{2}$	beau & venteux.
5	N. E.	-3	2 $\frac{1}{2}$	-2	27.	11	idem.
6	N. E.	-3	2 $\frac{1}{2}$	-2 $\frac{1}{2}$	27.	10	beau & venteux avec nuages.
7	N. E.	-3 $\frac{1}{2}$	3	-1 $\frac{1}{2}$	27.	11	idem.
8	N. O.	-4	2	$\frac{1}{2}$	28.		variable avec neige.
9	N. E.	-1	3 $\frac{1}{2}$	-1	28.		variable avec grêle.
10	N. E.	-1	-1	-3 $\frac{1}{2}$	28.	1	beau & venteux avec nuages.
11	N. E.	-5 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$	0	28.		beau & venteux.
12	N.	$\frac{1}{2}$	4	2	27.	11 $\frac{1}{2}$	couvert & venteux.
13	N. O.	3	7	3 $\frac{1}{2}$	27.	10 $\frac{1}{2}$	variable avec ondées.
14	O.	4	8	4 $\frac{1}{2}$	27.	$\frac{1}{2}$	couvert & venteux.
15	O.	4 $\frac{1}{2}$	8	1 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau & venteux.
16	O.	4	8 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	28.		beau & couvert.
17	S.	4	11	6	27.	11	beau temps.
18	O.	3	10	5	28.	1	beau & venteux avec nuages.
19	N. E.	-1	8	2	28.	1	beau fixe (le soir 28° 2')
20	N. E.	-1 $\frac{1}{2}$	2	4	27.	10	beau avec nuages.
21	N. O.	4 $\frac{1}{2}$	8	-1	27.	11	venteux & nébuleux.
22	N. E.	-3	2	-3	28.	1	beau & grand vent forcé.
23	N. E.	-4	4	-1	28.		beau & grand vent.
24	N. E.	-2 $\frac{1}{2}$	9	3	28.		beau & venteux.
25	N. E.	- $\frac{1}{2}$	10	3	27.	11	} beau avec nuages.
26	N. E.	0	11	4 $\frac{1}{2}$	27.	11	
27	N. E.	2 $\frac{1}{2}$	13	5	27.	11 $\frac{1}{2}$	
28	N. E.	2	14 $\frac{1}{2}$	8	27.	11 $\frac{1}{2}$	
29	N. E.	3	16	8	27.	11	
30	N.	3 $\frac{1}{2}$	13	3 $\frac{1}{2}$	27.	11	} couvert & brouillard sec.
31	N.	2 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	4	27.	10	

Eau de pluie, du 1 au 31, 1 ligne  $\frac{1}{2}$ .

Ce mois a été beau, froid & sec; on a semé dans les premiers jours les avoines, mais on a été obligé de discontinuer, parce que la terre étoit trop sèche.

Le 1.<sup>er</sup> les crapauds commencèrent à se promener & à se faire entendre; ce qui annonce ordinairement la venue du printemps.

Le 15, les oyaux & les jacintes étoient en fleur.

Le 20, on commença à retourner quelques avoines, qui; ayant été semées de très-bonne heure, avoient été prises de la gelée du 11 de ce mois, mais il y en avoit peu en cet état dans ce pays-ci.

Le 25, toutes les terres à mars étoient labourées; on attendoit avec impatience de la pluie pour mettre en terre les légumes & finir les avoines que les sécheresses avoient empêché de semer.

Les eaux étoient toujours très-basses dans la rivière d'Esnonne & dans les puits; les sources ne pouffoient point.



Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pou.	lignes.	
1	N. E.	2 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	6	27.	10	beau avec nuages.
2	N. E.	2 $\frac{1}{2}$	10	5	27.	10	beau avec vent.
3	E.	4	13 $\frac{1}{2}$	7	27.	9	beau & nébuleux.
4	S.	3	13	7	27.	7	variable avec pluie.
5	E.	4	13 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	27.	6	beau & nébuleux.
6	S. E.	9	15	9 $\frac{1}{2}$	27.	6	variable avec pluie & éclairs.
7	N.	9	13	9 $\frac{1}{2}$	27.	4 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie.
8	N.	4	6	5	27.	7	couvert & vent froid.
9	E.	3	9	3	27.	9	couvert & nébuleux.
10	N. E.	1 $\frac{1}{2}$	10	3	27.	10	beau & nébuleux. (à 5 <sup>h</sup> du mat.—1 $\frac{1}{2}$ )
11	N. E.	1 $\frac{1}{2}$	9	3	28.	1	beau temps. (à 5 <sup>h</sup> — 1 $\frac{1}{2}$ )
12	E.	3	13	6	28.		beau temps, gelée blanche.
13	S. E.	3 $\frac{1}{2}$	6	11	27.	10	beau temps.
14	S. O.	9	15	9	28.		beau & nébuleux.
15	S. O.	5	13	8 $\frac{1}{2}$	28.		gelée blanche, nébuleux.
16	S. E.	8	13	10	27.	9	beau avec nuages.
17	N. O.	9	13	8 $\frac{1}{2}$	27.	10	variable avec grand vent de galerne.
18	O.	9	11	7	28.		pluie & grand vent forcé.
19	S. O.	8 $\frac{1}{2}$	11	7	27.	10	variable avec pluie & vent.
20	S.	8 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{4}$	10	27.	11	idem.
21	S. O.	10	15	10	27.	9 $\frac{1}{2}$	couvert & grand vent.
22	S. O.	9 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	10	27.	7 $\frac{1}{2}$	couvert & pluvieux.
23	N. E.	8	12	9	27.	6 $\frac{1}{2}$	pluvieux.
24	S. O.	9	13	10	27.	10 $\frac{1}{2}$	couvert, pluie & vent.
25	S. O.	8	13	9	27.	9	brouillard, nébuleux & venteux.
26	S. O.	8	12 $\frac{1}{2}$	8	27.	10	beau & venteux avec nuages.
27	O.	7 $\frac{1}{2}$	12	6 $\frac{1}{4}$	27.	9	nébuleux & venteux.
28	S.	6 $\frac{1}{2}$	11	8	27.	7	nébuleux, brouine le soir.
29	S.	7 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	7	27.	5	pluvieux.
30	S.	7	11 $\frac{1}{2}$	8	27.	6	pluie, grêle & vent.

Eau de pluie du 1 au 30, un pouce 11 lignes  $\frac{1}{4}$ .

Le commencement de ce mois a été fort sec ; ce qui donnoit beaucoup d'inquiétude , car on attendoit de l'eau pour achever de semer les avoines ; la fin du mois ayant été humide , on en a profité pour finir les mars & pour rouler le peu d'avoine qui étoit levé.

Les blés étoient très-verts & très-beaux ; mais en général trop épais , parce que les grains de l'année dernière étant menus , il en tenoit une plus grande quantité dans la main des semeurs ; le blé a valu pendant ce mois , 25 à 27 livres le setier , mesure de Paris ; & l'avoine , 7 livres 5 sous à 7 livres 10 sous le sac ou le setier du froment ; il en faut deux pour faire le setier d'avoine de Paris.

La vigne commençoit à être en bourre , les pêchers , les poiriers , les pruniers , les cerisiers étoient hors de fleur ; les pommiers étoient en pleine fleur , & tous les arbres paroissoient bien préparés.

Le 1.<sup>er</sup> on a vu une hirondelle dans la vallée , & le 13 elles ont paru dans la plaine ; le 7 , le rossignol chantoit dans la vallée , mais le 15 on ne l'avoit point encore entendu dans le parc qui est situé dans la plaine.

Le 13 , il a paru une grande quantité de petits hannetons rouges , connus sous le nom de *hannetons des blés* ; ils précèdent ordinairement les vrais hannetons.

Le 14 , les tilleuls & les charmes ont pris une teinte de verdure.

Le 15 , le coucou chantoit dans les vallées.

Il a régné une maladie épidémique sur les volailles ; la crête leur noircissoit , & en deux jours elles mouraient : dans une ferme près du château , il en mourait cinq à six par jour.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL
		Matin	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pois.	lignes.	
1	N.	8	11	7	27.	8 $\frac{1}{2}$	nébuleux; le vent d'en bas N. les nuages du S. O.
2	E.	6	11	10	27.	8	couvert, pluvieux, gelée blanche; le soir vent N.
3	N. E.	10	15 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	27.	7	variable avec petite bruine & éclairs.
4	E.	10	16	10 $\frac{1}{2}$	27.	11 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
5	E.	12 $\frac{1}{2}$	20	14	27.	10	<i>idem.</i>
6	E.	13 $\frac{1}{2}$	21	11	27.	9	lourd, tonnerre; pluie, brouillard.
7	O.	11	11 $\frac{1}{2}$	10	27.	10	pluvieux tout le jour.
8	N.	10	16 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{1}{2}$	27.	11 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
9	N. E.	11 $\frac{1}{2}$	17	8 $\frac{1}{2}$	28.		beau temps.
10	N. E.	10	16 $\frac{1}{4}$	11	27.	10	beau & venteux.
11	N. E.	10	18	11	27.	8	beau & grand vent.
12	N. E.	10	18	10	27.	8	} beau avec grand vent froid.
13	N. E.	9	13	7 $\frac{1}{2}$	27.	9 $\frac{1}{2}$	
14	N. E.	6 $\frac{1}{2}$	11	7	27.	11	} beau avec nuages & vent froid.
15	N.	6 $\frac{1}{2}$	12	7 $\frac{1}{2}$	27.	11	
16	N. E.	8 $\frac{1}{2}$	15	8	27.	10	beau & venteux.
17	N.	8 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	27.	7	variable avec bruine & grand tonnerre.
18	S. O.	9	9 $\frac{1}{2}$	5 $\frac{1}{2}$	27.	4	variable avec pluie, vent & grêle.
19	S. O.	7 $\frac{1}{2}$	14	7 $\frac{1}{2}$	27.	8 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
20	S. O.	9	15	11	27.	10	variable & couvert avec petite rosée.
21	E.	12 $\frac{1}{2}$	17	12	27.	10	beau avec nuages.
22	N. E.	12 $\frac{1}{2}$	21 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	27.	11	} beau temps.
23	N. E.	14	20	14	27.	11	
24	N. E.	13 $\frac{1}{2}$	20 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	27.	10 $\frac{1}{2}$	} beau & petite bruine.
25	N.	14 $\frac{1}{2}$	21	14	27.	10	
26	N. E.	15	20 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	27.	10	<i>idem.</i>
27	E.	9	15 $\frac{1}{2}$	10	27.	9 $\frac{1}{2}$	beau temps.
28	S. O.	12	18	12	27.	7	<i>idem.</i>
29	S.	14 $\frac{1}{2}$	13	11	27.	5	variable avec pluie.
30	S. O.	9 $\frac{1}{2}$	14	10	27.	6	pluie continue le matin.
31	E.	10	17	9	27.	6	pluie & tonnerre.

Eau de pluie, le 18 par orage, 3 lignes  $\frac{1}{16}$ ; du 1 au 31, 1 pouce 7 lignes  $\frac{1}{16}$ .

Les

Les premiers jours de ce mois, vers le milieu & à la fin, il est tombé de l'eau très-à-propos pour faire lever les avoines & les graines légumineuses.

Les blés étoient très-beaux dans le Gàtinois; il n'en étoit pas de même dans la haute Beauce & dans la Picardie; le blé valoit au marché de Pithiviers 24 à 26 livres le sac pesant 240 livres, & l'avoine 7 livres à 7 livres 10 sous.

Il y avoit peu de grappes aux vignes & elles étoient petites; ce que l'on jugeoit d'avance devoir arriver, parce que, comme nous l'avons déjà dit, la moëlle du sarment étoit noire, ce qui vient de ce qu'elle avoit été attaquée par le froid de l'hiver.

Les sainfoins étoient fort bas; on a commencé à en faucher en fleur pour les vaches le 25, lendemain des fêtes de la Pentecôte.

Il n'y a eu ni hannetons ni chenilles pendant ce mois.

Le 2, il gela blanc; mais comme la terre étoit humide & la rosée abondante, la gelée tourna en eau, & elle ne fit aucun dommage.

Le 4, l'épine-blanche étoit en fleur; les fleurs des cerisiers étoient toutes brouies par le vent, ainsi que celles des ragouminier\*; beaucoup de fleurs de pêchers avoient aussi été endommagées par le vent ou les brouillards du matin au soleil-levant.

Il n'y avoit point encore de rossignols dans le bois, parce que le vent continuel & froid qui avoit régné pendant tout le mois d'Avril les avoit fait réfugier dans les vallées où ils s'étoient établis pour faire leur nid: Le 10, les tourterelles étoient arrivées, & on les entendoit depuis deux jours.

Il y a eu des brouillards secs qui, en beaucoup d'endroits, ont rouillé les blés, & ont beaucoup diminué les grandes espérances qu'on avoit de faire une pleine récolte; car nos Fermiers disoient, avant ces brouillards, que depuis plus de vingt ans ils n'avoient pas vu les blés aussi beaux dans cette saison.

\* *Cerasus pumila, Canadensis, angusto folio, fructu parvo.*

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pout.	lign.	
1	O.	9 $\frac{1}{2}$	10	8 $\frac{1}{2}$	27.	9	grande pluie après midi.
2	N. E.	8 $\frac{1}{2}$	12	10	27.	10 $\frac{1}{2}$	variable & couvert sans pluie.
3	N. E.	10	15 $\frac{1}{2}$	10	27.	10	beau temps.
4	N. E.	9 $\frac{1}{2}$	15	12	27.	9	beau avec nuages.
5	S. E.	12	19	13	27.	9	beau avec nuages & tonnerre.
6	E.	14	19 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	27.	8 $\frac{1}{2}$	pluie & tonnerre.
7	E.	14 $\frac{1}{2}$	18	12	27.	6	variable avec tonnerre sans pluie.
8	S.	12 $\frac{1}{2}$	16	12	27.	6	variable avec petite pluie.
9	S.	13	12 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	27.	5	variable avec pluie & vent.
10	S. O.	11	15	12	27.	8	variable avec petite pluie.
11	E.	15	21	16	27.	6	couvert avec nuages & tonnerre.
12	S.	13	14	12 $\frac{1}{2}$	27.	7 $\frac{1}{2}$	couvert & pluvieux.
13	S.	13	14 $\frac{1}{2}$	10	27.	6	grande pluie le matin.
14	S. O.	10	11	9	27.	8	variable avec pluie.
15	S.	12 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$	9	27.	8 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
16	S.	10 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$	11	27.	9	idem.
17	S.	12 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	12	27.	8 $\frac{1}{2}$	pluvieux tout le jour.
18	S. O.	13 $\frac{1}{2}$	15	12 $\frac{1}{2}$	27.	9	brouillard le matin, pluie & tonnerre après midi.
19	O.	14	16	10 $\frac{1}{2}$	27.	11	pluvieux & orageux.
20	S. O.	11 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	27.	10	beau avec nuages.
21	O.	10 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$	12	27.	11 $\frac{1}{2}$	
22	N. E.	11 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	12	27.	10	
23	E.	11 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$	11	27.	11 $\frac{1}{2}$	beau temps.
24	N. E.	13 $\frac{1}{2}$	21 $\frac{1}{2}$	15	27.	11	
25	S.	15	18	13	27.	9	orage de pluie & tonnerre.
26	S.	12	18	14	27.	8 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie & tonnerre.
27	S. O.	15	15 $\frac{1}{2}$	13	27.	6	idem.
28	S. O.	12	14 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	27.	10	grand vent & petite pluie.
29	S. O.	12	17	14	27.	10	beau avec nuages.
30	E.	14 $\frac{1}{2}$	20	15	27.	10	beau temps.

Eau de pluie du 1 au 30, 4 pouces 2 lignes  $\frac{44}{100}$ .

Ce mois peut passer pour froid & humide; les mares ont toujours été pleines d'eau; la terre étoit si molle qu'on a été obligé de discontinuer les labours pendant plusieurs jours, & les chemins étoient aussi mauvais qu'en hiver; on espéroit que ces pluies laveroient les blés qui avoient été rouillés le mois dernier; en effet ils paroissoient avoir peu souffert, & ils étoient encore très-beaux dans nos cantons; mais depuis ce mois jusqu'à la moisson, ils n'ont fait que dépérir.

Ce temps a été très-favorable pour les menus grains, au moins pour les avoines qui n'avoient point été attaquées par les vers; à l'égard des orges, elles étoient très-belles, mais il y a eu des pièces où près d'un quart étoit charbonné.

Le blé a valu pendant ce mois 26 à 30 livres le sac de 240 livres, l'avoine 7 livres 10 sous à 8 livres.

Les sainfoins étoient fort bas, & ils ont été serrés après avoir été mouillés plusieurs fois; aussi font-ils très-noirs.

Il y avoit très-peu de raisin aux vignes, une partie étoit en verjus, une autre en fleur pendant que d'autres n'étoient pas encore fleuris.

Il n'y avoit ni hannetons ni chenilles.

On a servi pendant tout le mois des fraises, & il y en avoit encore à la fin; il y a eu très-peu de cerises, & elles ont mûri fort tard.

Il y a eu pendant ce mois plusieurs orages avec tonnerre, & le 27 il tomba en plusieurs endroits de la grêle, qui a fait un ravage prodigieux.

Les orangers ont commencé à fleurir vers la fin de ce mois, mais il y avoit peu de fleurs.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lignes.	
1	S. E.	16	25 $\frac{1}{2}$	20	27.	7	beau & chaud.
2	O.	14 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$	13	27.	9 $\frac{1}{2}$	orage de vent & tonnerre pendant la nuit.
3	S.	13	15 $\frac{1}{2}$	13	27.	9	variable avec pluie.
4	S. O.	13	16	13 $\frac{1}{2}$	27.	11 $\frac{1}{2}$	idem.
5	S. E.	13	18 $\frac{1}{2}$	15	27.	10	beau avec nuages.
6	S.	15	21	16 $\frac{1}{2}$	27.	8 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie.
7	S. O.	15 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	14	27.	7 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
8	S. O.	14	18	14 $\frac{1}{2}$	27.	11	beau avec nuages & tonnerre.
9	S.	15 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	27.	9	pluvieux tout le jour.
10	N. E.	12 $\frac{1}{2}$	13	12	27.	9 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
11	S. E.	12	18	13 $\frac{1}{2}$	27.	11	idem.
12	S.	14	19 $\frac{1}{2}$	14	27.	11 $\frac{1}{2}$	couvert.
13	S.	14	18 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$	27.	9 $\frac{1}{2}$	pluie & tonnerre.
14	S. O.	14 $\frac{1}{2}$	16	11	27.	9	beau avec nuages.
15	O.	11	18	12 $\frac{1}{2}$	27.	9	idem.
16	N. O.	13	18	10 $\frac{1}{2}$	27.	8 $\frac{1}{2}$	variable avec nuages, pluie & tonnerre.
17	S. O.	11 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$	12	27.	10	couvert.
18	S.	11 $\frac{1}{2}$	16	13 $\frac{1}{2}$	27.	7	idem.
19	S. O.	13	17 $\frac{1}{2}$	11	27.	7 $\frac{1}{2}$	pluvieux par ondées, gros nuages.
20	O.	12 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	13	27.	10 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
21	N. O.	12 $\frac{1}{2}$	18	13 $\frac{1}{2}$	28.		idem.
22	E.	13 $\frac{1}{2}$	19 $\frac{1}{2}$	14	27.	10 $\frac{1}{2}$	beau temps.
23	E.	14 $\frac{1}{2}$	21 $\frac{1}{2}$	15	27.	9	
24	S. O.	16	24	16 $\frac{1}{2}$	27.	8	tonnerre la nuit, couvert & venteux.
25	S. O.	18	19 $\frac{1}{2}$	14	27.	8 $\frac{1}{2}$	
26	E.	14 $\frac{1}{2}$	29	14	27.	9 $\frac{1}{2}$	beau & nébuleux, avec petite pluie par ondées.
27	E.	14	23 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$	27.	10 $\frac{1}{2}$	beau & nébuleux.
28	E.	17	25	17 $\frac{1}{2}$	27.	10	beau temps.
29	S. O.	19	24	14	27.	8	orage de grand tonnerre & grande pluie.
30	S. O.	12 $\frac{1}{2}$	17	13 $\frac{1}{2}$	27.	9	variable avec nuages.
31	S. O.	14	13	9	27.	9	variable avec pluie & tonnerre.

Eau de pluie, du 1 au 31, 4 pouces 5 lignes  $\frac{1}{2}$ .

Ce mois a été variable & assez humide ; il est tombé beaucoup d'eau par orage & de la grêle en plusieurs endroits ; les mares étoient pleines , cependant l'eau des sources avoit encore baissé depuis un mois.

Les chaleurs qu'il a fait du 21 au 28 , avec un vent d'est , ont fait jaunir subitement les blés qui étoient encore verts ; & ceux dont le grain étoit le moins mûr , ont été échaudés ; les menus grains étoient encore très-beaux.

Le blé a valu au marché de Pithiviers , 28 à 31 livres 10 sous ; & le 9 , on y a vendu de l'escourgeon nouveau 12 livres le sac.

On a commencé à couper les seigles le 11 ; & le 25 , dans toute la paroisse de Denainvilliers , on commença la récolte des fromens.

La vigne alloit de mal en pis , le fruit avoit coulé aux trois quarts ; aussi le vin commun d'Orléans valoit 100 livres la pièce : on a été voir par curiosité sur une souche de gouas , dans le vignoble entre Grantarvilliers & Tiolet , une grappe qui avoit 18 à 19 pouces de circonférence sur 9 pouces de longueur , non compris la queue ; mais comme il a peut-être été deux mille personnes pour la voir & qui ont voulu la toucher , elle a été fort endommagée.

Le 1.<sup>er</sup> on a servi la prune dite la *jaune-hâtive* , on mangeoit encore des fraises & des cerises ; on commençoit à manger la pêche magdeleine , les abricots , les prunes de monsieur & autres ; il y avoit beaucoup de prunes , mais peu de pêches.

Le 2 , entre minuit & une heure , on essuya un coup de vent si prodigieux , qu'il empêchoit d'entendre le tonnerre qui tomba en plusieurs endroits des environs sur des maisons où il a mis le feu ; le dégât du vent s'est réduit à plusieurs arbres dont les branches ont été cassées , d'autres étêtés , tous les échelas des vignes courbés , & les blés étoient très-mêlés.

Les abeilles ont très-peu fourni d'essains , parce qu'il n'y a point eu de mères , & que les jettons sont demeurés dans les ruches : comme la saison étoit avancée , & que s'il étoit éclos des mères les essains auroient été perdus , on a pris le parti de changer les mouches de ruches.



Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL
		Matin	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pous.	lig.	
1	S. O.	13	17	15	27.	9	beau avec nuages.
2	S. O.	14	18	14	27.	8 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie.
3	S. O.	13 $\frac{1}{2}$	18	13	27.	10	variable avec vent & tonnerre.
4	S. O.	13	14 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	27.	10 $\frac{1}{2}$	pluvieux toute la nuit & tout le jour.
5	S. O.	15	19	15	27.	11 $\frac{1}{2}$	brouillard le matin, le jour nébuleux.
6	E.	15	22	18	27.	10	beau avec nuages.
7	N. O.	15	19	12	27.	11	beau temps.
8	O.	12	17	12	28.		
9	N. E.	12 $\frac{1}{2}$	18	13	27.	11	} beau avec nuages.
10	O.	13 $\frac{1}{2}$	16	14	27.	10	
11	N. E.	13	19	14	27.	9 $\frac{1}{2}$	
12	N. E.	13 $\frac{1}{2}$	19 $\frac{1}{2}$	14	27.	10	beau avec nuag. & quelq. gout. d'eau.
13	N. E.	14 $\frac{1}{2}$	19 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	27.	9 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
14	S. O.	15	20	14	27.	9 $\frac{1}{2}$	nuages, éclairs & tonnerre au loin.
15	S.	14	21	17	27.	8 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
16	S.	17	21 $\frac{1}{2}$	16	27.	6	tonnerre le matin.
17	S.	14 $\frac{1}{2}$	18	14	27.	7 $\frac{1}{2}$	pluie & tonnerre la nuit.
18	S. O.	15	18 $\frac{1}{2}$	15	27.	9	variable avec pluie par ondées.
19	S.	14 $\frac{1}{2}$	18	15	27.	11	variable avec nuages sans pluie.
20	S.	14 $\frac{1}{2}$	21 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$	27.	9 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
21	S. O.	16 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	27.	9	couv. tonnerre au loin, petites ondées.
22	S.	12 $\frac{1}{2}$	13	18	27.	8	gros nuages, petites ondées
23	S. O.	12 $\frac{1}{2}$	15	13	27.	8	variable avec pluie & vent.
24	O.	12	17	11 $\frac{1}{2}$	27.	9	variable avec pluie.
25	O.	11	16 $\frac{1}{2}$	11	27.	10 $\frac{1}{2}$	<i>idem.</i>
26	O.	10 $\frac{1}{2}$	17	11 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau avec nuages.
27	N. E.	11	18 $\frac{1}{2}$	14	27.	7	<i>idem.</i>
28	N. E.	14	20	13	27.	8	variable avec tonnerre sans pluie.
29	S.	13 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$	13	27.	9 $\frac{1}{2}$	variable avec tonnerre & petite pluie.
30	S. O.	13 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$	13	27.	9 $\frac{1}{2}$	beau, avec nuages.
31	S. O.	14	19 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	27.	7 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie & tonnerre.

Eau de pluie, du 1 au 31, 2 pousces 1 ligne  $\frac{1}{4}$ .

Ce mois a été variable & orageux, il a fréquemment tonné; quoique le ciel ait toujours été fort chargé de nuages, il a peu tombé d'eau; ces apparences de pluie donnoient beaucoup d'inquiétude pour ferrer les blés: le 16 au matin on entendit deux forts coups de tonnerre à cinq minutes l'un de l'autre; le premier coup tomba à Acoux, à une demi-lieue de Denainvilliers; l'autre, à Denainvilliers même; aucun ne fit de dommage, on sentit seulement dans l'un & l'autre endroit une forte odeur que l'on comparoit à celle du soufre; mais il y a une grande différence entre les vapeurs électriques ou celles du tonnerre, & celles du soufre; car celles-ci sont un obstacle à la corruption, les autres la précipitent.

Comme les avoines ont été semées fort tard à cause de la sécheresse du printemps, elles ont été tardives à mûrir, & on en a fauché jusqu'à la fin du mois.

Le blé vieux valoit au marché, 30 à 32 livres le setier.

Il n'y avoit encore dans les vignes, à la fin de ce mois, que quelques grains de raisin tournés.

Pendant ce mois les cèdres du liban se sont couverts de fleurs mâles qui étoient jaunes à la fin du mois; ces fleurs ont blanchi, mais elles n'étoient pas encore alongées pour répandre la poussière fécondante.

Le 6, on vit une aurore boréale dont le foyer étoit au nord-ouest.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces.	lignes.	
1	S. O.	12 $\frac{1}{2}$	17	12 $\frac{1}{2}$	27.	5	vent, pluie & tonnerre.
2	S. O.	12	13	10	27.	9	variab. avec pluie & gr. vent. m. 4 $\frac{1}{2}$
3	E.	9 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	27.	6	variable avec pluie.
4	S. O.	12 $\frac{1}{2}$	15	11 $\frac{1}{2}$	27.	6	pluvieux. <i>Le matin</i> , 3 $\frac{1}{2}$ .
5	S. O.	11	16	11	27.	8 $\frac{1}{2}$	couvert de nuages
6	O.	11	16	11	27.	9	beau avec nuages.
7	S. O.	11	14	9 $\frac{1}{2}$	27.	8	variable avec pluie & tonnerre.
8	E.	8	11 $\frac{1}{2}$	9	27.	3 $\frac{1}{2}$	couvert & bruine.
9	N.	9	12 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	27.	9	pluvieux.
10	E.	11	13	12 $\frac{1}{2}$	27.	7 $\frac{1}{2}$	couvert & bruine.
11	S. O.	13	16	12 $\frac{1}{2}$	27.	7 $\frac{1}{2}$	pluvieux.
12	S. O.	12 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	27.	6	variable, tonnerre & vent. <i>Le mat.</i> 4 $\frac{1}{2}$
13	S. O.	11 $\frac{1}{2}$	18	12 $\frac{1}{2}$	27.	9	variable avec gros nuages.
14	S. E.	12	15 $\frac{1}{2}$	11	27.	11	variable avec pluie.
15	S. O.	11	13	10	27.	9 $\frac{1}{2}$	couvert & bruine.
16	S. O.	10	10 $\frac{1}{2}$	9	27.	3	couvert, pluie & vent.
17	S. O.	9	12 $\frac{1}{2}$	9	27.	2	grand vent avec nuages. <i>Le m.</i> 27 $\frac{1}{2}$
18	S. O.	9	13	8	27.	6	<i>idem.</i>
19	S. O.	8 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$	9	27.	10	variable sans pluie.
20	S.	10	16	12	27.	9	variable avec pluie.
21	S.	12 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau avec nuages.
22	S. O.	13	18 $\frac{1}{2}$	13	27.	8	brouil. le mat. couvert toute la journ.
23	N. O.	10 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	27.	8 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
24	S. E.	10 $\frac{1}{2}$	15	9 $\frac{1}{2}$	27.	9	variable avec tonnerre sans pluie.
25	N. O.	8 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{2}$	10	28.	$\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
26	E.	8	15	10	28.	1	<i>idem.</i>
27	E.	9	16 $\frac{1}{2}$	10	28.		
28	E.	7	17	11	27.	11 $\frac{1}{2}$	beau temps.
29	S. O.	10 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	27.	11 $\frac{1}{2}$	
30	E.	11	17 $\frac{1}{2}$	12	27.	10 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.

Eau de pluie du 1 au 30, 1 pouce 11 lignes  $\frac{1}{11}$ .

Le commencement de ce mois a été fort humide, il l'a été un peu moins vers la fin, & on en a profité pour ferrer les avoines qui étoient encore sur terre le 15, & qu'on n'avoit pu ferrer à cause des pluies continuelles; une partie étoit germée, & plusieurs ont été entièrement perdues.

Le beau temps de la fin du mois a été favorable pour avancer le dernier labour pour les blés, qui avoit été retardé par les pluies abondantes du mois d'Août & du commencement de celui-ci.

Le blé nouveau le plus beau pour les semences, valoit depuis 28 jusqu'à 36 livres.

Les raisins qui étoient en verjus au commencement du mois; commençoient à pourrir à cause des pluies; le beau temps qui est venu à la fin du mois, a été très-favorable pour avancer la maturité des fromentés, mais le plan de gouas n'étoit encore que rouge à la fin du mois.

Le vin vieux se vendoit 100 à 105 livres la pièce, ce qui fait 210 livres le tonneau.

Les pluies, le vent & le froid ont été fort contraires aux abeilles qui, ne pouvant sortir, ont beaucoup consommé de leurs provisions pour l'hiver; celles qui sont sorties de leurs ruches par le mauvais temps, ont péri dans la campagne sans pouvoir regagner leurs ruches.

578 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
OCTOBRE.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre.		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi.	Soir.			
		Degrés	Degrés.	Degrés.	pouc.	lignes.	
1	N. E.	10	16	11 $\frac{1}{2}$	27.	9 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
2	E.	9	14 $\frac{1}{2}$	10	27.	8 $\frac{1}{2}$	variable avec brouillard & pluie.
3	E.	9	15 $\frac{1}{2}$	11	27.	5	variable avec pluie.
4	S. O.	12	15	12	27.	4	variab. avec grand vent & pluie le m.
5	S.	10	14	10	27.	5 $\frac{1}{2}$	grande pluie la nuit.
6	S.	13	15	11	27.	6 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie & vent.
7	S.	12	16	12 $\frac{1}{2}$	27.	8	beau avec nuages.
8	S.	12	17 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$	27.	7 $\frac{1}{2}$	couvert & pluvieux.
9	S.	11 $\frac{1}{2}$	13	9 $\frac{1}{2}$	27.	9	variable avec pluie.
10	S. E.	9	15	11 $\frac{1}{2}$	27.	8	beau avec nuages.
11	N.	11	13	9 $\frac{1}{2}$	27.	6	variable avec petite pluie.
12	E.	6	9	7 $\frac{1}{2}$	27.	8 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages & vent froid.
13	N.	7 $\frac{1}{2}$	9	7	27.	8	couvert & bruine.
14	N. E.	8	9 $\frac{1}{2}$	8	27.	8 $\frac{1}{2}$	couvert & pluvieux.
15	S. O.	8	10	7	27.	10 $\frac{1}{2}$	idem.
16	S.	6	10	8 $\frac{1}{2}$	27.	11	couvert & bruine.
17	N.	4	9	5 $\frac{1}{2}$	27.	10 $\frac{1}{2}$	beau temps.
18	E.	3	9	6 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau temps, gelée blanche.
19	N. O.	8 $\frac{1}{2}$	11	5 $\frac{1}{2}$	28.		variable sans pluie.
20	N. E.	3 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	28.	1	beau temps.
21	E.	4	9 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	28.	1	idem.
22	E.	3	9 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	27.	9 $\frac{1}{2}$	beau temps, gelée blanche.
23	S. O.	6 $\frac{1}{2}$	10	8	27.	8 $\frac{1}{2}$	couvert & pluvieux.
24	S.	6 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{1}{2}$	9	27.	7 $\frac{1}{2}$	couvert & bruine.
25	E.	9	10	6	27.	8 $\frac{1}{2}$	grand brouillard, pluie & vent.
26	S.	6 $\frac{1}{2}$	10	6	27.	8	beau avec nuages.
27	S. O.	6 $\frac{1}{2}$	10	5	27.	10	idem.
28	S.	2	10	5	27.	11 $\frac{1}{2}$	beau temps, gelée blanche.
29	E.	4	7 $\frac{1}{2}$	7	27.	8	couvert & pluvieux.
30	S. O.	6	8	7 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau avec nuages.
31	S. O.	6	8 $\frac{1}{2}$	5	27.	8 $\frac{1}{2}$	couvert & venteux.

Eau de pluie, du 1 au 31, 2 pouces 7 lignes  $\frac{1}{4}$ .

Ce mois peut passer pour très-humide ; cependant malgré les pluies , le niveau des eaux de sources continuoit à baisser ; on étoit obligé de fouiller de nouveau les puits qui l'avoient été pendant l'été , parce qu'ils manquoient encore d'eau.

Ces pluies ont été cause qu'on a eu bien de la peine à semer les fromens , & plusieurs pièces dans les terres noires n'ont pu être ensemencées , parce que la terre étoit trop molle.

Les blés nouveaux de semence ont valu 33 à 36 livres le sac , l'avoine 7 livres 10 sous à 8 livres 10 sous.

Le lundi 3 , on a commencé la vendange , & on a continué le 4 & les jours suivans ; le fromenté étoit assez mûr , mais les gouas n'étoient que rouges , & il y avoit beaucoup de grains pourris ; comme les grappes étoient petites , la récolte étoit encore beaucoup moindre qu'on ne l'avoit espéré.

Les vins vieux de deux ans étoient fort chers , ils se vendoient jusqu'à 200 livres le tonneau ; à l'égard des nouveaux , le prix n'étoit point encore fait.

Le 15 , on entonna les vins qui avoient été faits les premiers.

Le 9 , on voyoit encore quelques hirondelles qui passaient en faisant route vers le midi , & ce sont les dernières qu'on ait vues.

Le 25 , on cueilloit encore quelques fleurs de safran qui avoit commencé à fleurir les premiers jours du mois.

580 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
NOVEMBRE.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre.		ÉTAT DU CIEL.
		Matin	Midi	Soir.	pouc.	lign.	
1	S. O.	6	9	8 $\frac{1}{2}$	27.	6 $\frac{1}{2}$	couvert, venteux & pluvieux.
2	O.	6	9 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	27.	8	beau avec nuages.
3	S.	9 $\frac{1}{2}$	12	7 $\frac{1}{2}$	27.	7	couvert & pluvieux.
4	S. O.	9	9	7 $\frac{1}{2}$	27.	6 $\frac{1}{2}$	couvert & venteux. <i>Le mat.</i> 4 <sup>l</sup>
5	N.	6	7	1 $\frac{1}{2}$	28.	1	beau avec nuages.
6	N. E.	-1 $\frac{1}{2}$	5	- $\frac{1}{2}$	28.	3	beau temps, gelée à glace.
7	N. E.	-1 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	0	27.	10 $\frac{1}{2}$	bruine.
8	S. O.	-1 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	4	27.	10	<i>idem.</i>
9	S. O.	3 $\frac{1}{2}$	7 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	27.	10	couvert.
10	S.	2	7	4 $\frac{1}{2}$	27.	9	bruine.
11	S. E.	3 $\frac{1}{2}$	8	3	27.	5	couvert.
12	E.	3 $\frac{1}{2}$	7 $\frac{1}{2}$	7	27.	6	couvert avec bruine. <i>Le mat.</i> 4 <sup>l</sup>
13	S.	6	6 $\frac{1}{2}$	7	27.	10	grand brouillard tout le jour.
14	S.	5	10 $\frac{1}{2}$	8 $\frac{1}{2}$	27.	8 $\frac{1}{2}$	grand brouill. orage de pluie & tonn.
15	O.	7	9	4	28.	1	beau temps.
16	N. E.	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{2}$	27.	10	gr. brouill. gel. blanche, beau temps.
17	S.	- $\frac{1}{2}$	6	4 $\frac{1}{2}$	27.	7	beau avec nuages.
18	O.	4	3	5	27.	10 $\frac{1}{2}$	pluvieux & venteux.
19	N. E.	4	6	1	28.	1	beau avec nuages.
20	S. O.	- $\frac{1}{2}$	4	3 $\frac{1}{2}$	27.	11	couvert.
21	S.	3	4	6	26.	11	pluie & vent de tempête.
22	S. O.	3 $\frac{1}{2}$	4	2	26.	6 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie & vent. <i>midi.</i> 6 <sup>l</sup>
23	S.	3	4	2	26.	9	<i>idem.</i>
24	S.	2	5 $\frac{1}{2}$	4	27.	2	pluie par ondées.
25	S. O.	2	6	3 $\frac{1}{2}$	27.	7 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages & vent.
26	S. O.	2	4 $\frac{1}{2}$	2	27.	10	variable avec brouillard.
27	S.	3	6	9	27.	10 $\frac{1}{2}$	couvert, & bruine.
28	S. E.	6 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	6	27.	10	beau temps.
29	S.	5	9 $\frac{1}{2}$	8	27.	7 $\frac{1}{2}$	variable avec pluie & vent.
30	S. O.	9	9	9	27.	2	couvert, pluvieux, vent de tempête.

Eau de pluie du 1 au 30, un ponce 5 lignes  $\frac{1}{16}$ .

Quoique ce mois ait été humide, que les mares fussent pleines & les chemins impraticables, il n'est pas tombé beaucoup d'eau : le lit de la rivière étoit plein, mais les sources ne pouffoient pas.

On a eu bien de la peine à achever les blés dans ce pays, & ils ne l'étoient pas encore dans les terres noires ; la terre ayant été difficile à labourer tout l'été, & les fumiers à voiturer, les chevaux étoient très-fatigués : de plus, l'avoine n'étant pas de bonne qualité, les chevaux qui en ont mangé depuis la récolte ont été mal nourris.

Le blé vieux a valu pendant ce mois 34 livres le sac, le nouveau 27 à 30 livres, l'avoine 8 à 9 livres le sac.



582 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE  
D É C E M B R E.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE.			Baromètre		ÉTAT DU CIEL
		Matin.	Midi.	Soir.			
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S.	4	7 $\frac{1}{2}$	4	27.	5	beau avec nuages.
2	S.	4	6 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	27.	4	variable avec pluie & vent.
3	S. O.	4	6	1 $\frac{1}{2}$	27.	8	idem.
4	S.	3 $\frac{1}{2}$	6	4.	27.	9 $\frac{1}{2}$	variable sans pluie.
5	E.	1 $\frac{1}{2}$	6	3 $\frac{1}{2}$	28.	1	beau temps, gel. blanche, aurore bor.
6	E.	1 $\frac{1}{2}$	7	3	28.	$\frac{1}{2}$	beau temps, gelée blanche.
7	N. E.	0	4 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$	28.		grand brouillard & beau temps.
8	N. E.	1 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	28.		grand brouillard & vent.
9	N. E.	4	3	— 1	27.	11	beau avec nuages & vent.
10	N. E.	— 2	1	— 1 $\frac{1}{2}$	28.		beau avec vent.
11	N. E.	— 3	0	— 2 $\frac{1}{2}$	28.	2	beau temps.
12	N. E.	— 4	— $\frac{1}{2}$	— 3 $\frac{1}{2}$	28.	2 $\frac{1}{2}$	idem.
13	N. E.	— 2	— 2	— 6	27.	8 $\frac{1}{2}$	couvert & nébuleux.
14	N. E.	— 9 $\frac{1}{2}$	— 5 $\frac{1}{2}$	— 9	27.	7	beau temps.
15	S. E.	— 4 $\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{2}$	— 1 $\frac{1}{2}$	27.	4	couvert & pluvieux.
16	E.	3	4 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{1}{2}$	27.	3	variable avec petite pluie.
17	S. E.	4	6	4	27.	7	couvert & pluvieux. <i>Le mat.</i> 2 <sup>1</sup>
18	S.	3	5	3	27.	11 $\frac{1}{2}$	variable avec bruine.
19	S.	$\frac{1}{2}$	3	1	28.	2	variable avec gelée blanche & brouil.
20	S.	1	3 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	27.	11 $\frac{1}{2}$	couvert & pluvieux.
21	S. E.	2	4	1	28.		couvert & bruine.
22	E.	1 $\frac{1}{2}$	4	1	27.	10	grand brouillard, beau temps.
23	E.	— $\frac{1}{2}$	4	3 $\frac{1}{2}$	27.	9	beau temps.
24	E.	— 1	3 $\frac{1}{2}$	1	28.	1	idem.
25	S. O.	1	5	3 $\frac{1}{2}$	28.	2 $\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
26	S. O.	2	4 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{1}{2}$	28.	1	couvert. <i>Le mat.</i> 28 pouces 2 lign. $\frac{1}{2}$ .
27	S.	3 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{2}$	1	28.	2	beau avec nuages & brouillard.
28	S.	1	4 $\frac{1}{2}$		27.	9	couvert.
29	S.	3 $\frac{1}{2}$	5 $\frac{1}{2}$	6	27.	8	variable avec vent & bruine.
30	S. O.	6	5	4	27.	8	beau avec nuages & bruine.
31	S.	4	7	7	27.	6	variable & pluie fine.

Eau de pluie, du 1 au 31, 8 lignes  $\frac{1}{2}$ .

Il a fait très-froid pendant ce mois ; il n'est pas tombé beaucoup d'eau , cependant les chemins étoient extrêmement mauvais ; & comme l'été & l'automne ont été extrêmement humides , il y a eu beaucoup de personnes qui n'ont pu faire leur provision de bois , & la gelée n'a pas duré assez long-temps pour aller à la forêt ; les mauvais chemins ont aussi empêché les voituriers d'enlever les vins , ce qui l'a fait diminuer de quelque chose.

Le blé a diminué de 5 ou 6 livres par sac ; il y en a eu du nouveau mouillé à 22 livres , du nouveau glacé à 26 livres , & du vieux de l'année dernière à 29 livres.

### IDE E G É N É R A L E

*de la Température de l'air & des Productions de la Terre ; pendant l'année 1768.*

L'hiver & le commencement du printemps ont été très-secs ; c'est pourquoi on a eu de la peine à faire les mars ; mais la fin du printemps , l'été , & même l'automne , ont été très-humides ; ainsi on peut dire que l'année a été humide & s'est passée sans été ; car il n'y a eu que peu de jours de chaleur qui , étant vives , ont échaudé beaucoup de blés qui avoient été nourris d'humidité , & étoient encore très-verts lorsque ces jours très-chauds les ont tout d'un coup fait germer ; les blés tardifs & ceux qui étant venus dans des terres froides , étoient les moins avancés ont plus souffert que les autres.

### F R O M E N S.

Les blés donnoient généralement les plus belles espérances jusqu'aux brouillards de la fin de Mai & du commencement de Juin qui les ont rouillés : dans les terres fortes , qui sont ordinairement les meilleures pour le froment , ce grain a été moins beau que dans les terres légères , parce que faute de chaleur , ils n'ont commencé à monter que par les humidités de la fin du printemps , alors ils ont été surpris par la chaleur qui les a échaudés ; quoique dans les terres légères ils aient été moins endommagés ;

584 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

il y a bien un quart des grains qui sont échaudés & retraits : d'ailleurs , comme la moisson a été humide , beaucoup de blés ont été mouillés ; le sac pesant 240 livres , ne rend que dix-neuf à vingt pains de 9 livres , pendant que le blé vieux en rend vingt-trois ou vingt-quatre ; ce qui provient , 1.<sup>o</sup> de ce que la farine boit moins d'eau , 2.<sup>o</sup> les grains échaudés & retraits ne rendent que peu ou point de farine , 3.<sup>o</sup> les grains humides ne se broyant pas sous la meule rendent peu de farine ; le blé mouillé de l'année , vaut au marché 22 à 23 livres ; celui qui ne l'a pas été , 25 à 26 livres ; & le blé de l'année dernière 1767 , 29 à 30 livres : le blé vieux des années antérieures a valu jusqu'à 34 & 35 livres , mais il n'y en avoit plus que quelques sacs dans les greniers , qui sont très-recherchés par les Pâtissiers.

Il faut environ quinze à vingt gerbes pour fournir une mine ; & dans les bonnes années douze gerbes suffisent ; de plus il sort au criblage beaucoup de petits grains qui ne rendent point de farine ; d'où il suit que , quoiqu'il y ait eu assez de gerbes , la récolte a peu rendu en pain.

• A V O I N E S .

Les avoines ont été semées fort tard à cause de la sécheresse du printemps ; mais ayant été nourries d'humidité pendant l'été , elles ont été très-belles sur pied dans les endroits où les vers ne les ont pas mangées , comme il est arrivé en Beauce où ils ont fait un grand dommage. Cependant ces belles avoines en apparence n'ont produit que du foin , & elles ont rendu très-peu de grain , qui même est fort léger.

O R G E S .

Les orges ont été très-bonnes , parce qu'elles ont profité de l'humidité des pluies de l'été qui leur ont été favorables.

G R O S L É G U M E S .

Les pois , les vesces , les lentilles ont très-bien réussi , mais ils ont été difficiles à serrer à cause des pluies , & il y en a eu beaucoup  
qui

qui ont pourri sur le champ : les fèves ont aussi souffert des pluies, & plusieurs ont pourri au lieu de mûrir.

#### PLANTES POTAGÈRES.

Il y a eu très-peu d'oignons, parce qu'après avoir beaucoup souffert des sécheresses du printemps, les pluies de l'été les ont fait pourrir ; les melons n'ont pas été bons, ayant été nourris d'humidité, & parce qu'il n'a pas fait assez de chaleur pour les faire mûrir.

#### FOINS ET SAINFOINS.

Les sainfoins ont été fort bas à cause de la sécheresse du printemps, & presque tous ont été mouillés : les foins ont été bons, mais très-difficiles à faner à cause des pluies ; il y en a même eu beaucoup de gâtés.

#### CHANVRES.

Les chanvres ont été bons, mais la filasse est tendre.

#### VINS.

Il y a eu très-peu de vin & d'une très-médiocre qualité, ils ont très-peu bouilli ; cependant ils sont meilleurs, & ont un peu plus de couleur que l'année dernière, mais en général ils sont très-verts & plats : la récolte n'a été que de deux demi-queues par arpent, aussi sont-ils très-chers.

#### E A U - D E - V I E.

Le prix de l'eau-de-vie a suivi celui du vin, & a été à 250 livres la demi-queue.

#### F R U I T S.

Il n'y a point eu de cerises, beaucoup de prunes, point de figues, la plus grande partie des figuiers ayant été gelés en 1767 & cette année ; peu de pêches, médiocrement de poires, des pommes en abondance : aussi au défaut de vin a-t-on fait beaucoup de cidre, qui s'est vendu jusqu'à 30 livres la demi-queue ; il n'y a presque point eu de noix.

#### P L A N T A T I O N S.

Les plantations ont bien réussi, parce que le printemps a été  
*Mém. 1769.* E e e e

frais, & que la terre a été humectée par les pluies survenues lors de la sève d'Août.

Le grand froid de l'hiver a fait peu de tort aux arbres & arbrustes étrangers ; les liquidambar, les *cupressus foliis acacie deciduis*, les *magnolia* même n'ont point souffert ; le *syderoxylon*, les *cephalanthus*, les phaléoloïdes ont perdu quelques branches ; les lièges, une partie de leurs feuilles, ainsi que les alaternes : nous n'avons perdu que quelques jeunes cypres, le *belladonna Hispanica frutescens*, & quelques arbrustes peu importants.

#### S A F R A N S.

Les oignons de safran ont donné très-peu de fleurs, parce que l'œil a été noyé dans le temps qu'il s'est formé, à cause des grandes pluies ; cette récolte a donc été très-médiocre, cependant il ne s'est vendu que 30 francs la livre.

#### I N S E C T E S.

Il n'y a point eu cette année de hannetons ni de chenilles, non plus que de guêpes, fort peu de cantarides, mais il y a eu beaucoup de vers qui ont fait un grand dégât dans les avoines, & des mulots qui ont fort endommagé les blés en Beauce & encore plus en Picardie.

#### G R O S B É T A I L E T V O L A I L L E S.

Il n'y a point eu de maladie sur les bêtes à laine, sur les bêtes à corne, ni sur les chevaux, qui en général ont tous été très-fatigués chez les laboureurs ; ce qui vient, 1.<sup>o</sup> de ce que la terre a été toute l'année *lourde* à labourer ; 2.<sup>o</sup> de ce qu'ils ont eu beaucoup de peine à voiturier les fumiers & à ferrer les moissons, non-seulement parce que la terre étoit molle & les chemins mauvais, mais encore parce que les fourrages humides étoient fort pesans ; à quoi il faut ajouter que l'avoine de l'année dernière étoit supérieure à celle de cette année, tant pour la quantité que pour la qualité.

Plusieurs chiens ont encore été attaqués de maladies convulsives ; quelques-uns en sont morts, d'autres ont été guéris par l'usage de la thériaque.

Au mois d'Août on éprouva une mortalité si prodigieuse sur les oies, qu'elle mérite d'être détaillée: un marchand en conduisoit une bande de cent quatre-vingts douzaines, il lui en mourut en traversant la forêt d'Orléans cent trente douzaines; un Fermier perdit en un jour huit douzaines sur quinze; un autre, perdit en un jour huit douzaines sur douze; un de nos Fermiers ayant envoyé les siennes à portée de la rivière pour les rafraîchir, en perdit cependant plus de la moitié; quelques bandes ont été préservées de la mortalité, & on juge que celles qui ont été attaquées de la maladie l'ont gagnée sur la route, soit par manque d'eau ou par la mauvaise qualité de celles qui ont été rassemblées dans les mares qui provenoient des orages; d'autres prétendent, & cela paroît plus vraisemblable, que cette mortalité vient de ce que ceux qui sont partis les premiers pour vendre leurs oies plus cher, les ont fait marcher plusieurs jours dans la boue après les orages, & que pour arriver des premiers, ils leur ont fait faire de trop grandes journées sans leur donner le temps de manger, ce qui les a excédées de fatigue; il est certain que ceux qui sont arrivés les derniers & qui ont été à plus petites journées, n'en ont pas perdu une seule.

## GIBIER.

Il n'y a pas eu beaucoup de perdrix, parce que les pluies ont contraint les mères d'abandonner une partie de leurs nids, mais il y a eu assez de cailles; il y a eu pendant la vendange beaucoup de cette petite grive, qu'on appelle *mauviette*. On n'a pas vu de l'année une seule de ces grosses grives qu'on appelle *trage* ou *chacha*, non plus que de cette grive qui chante au printemps sur le plus haut des arbres; il y a eu beaucoup d'allouettes & médiocrement de lièvres.

## ABEILLES.

Les abeilles ont très-peu fourni d'essains, parce qu'il n'y a point eu de mères & que les jettons ont demeuré dans les ruches.

## MALADIES DES HOMMES.

Quoiqu'il n'y ait point eu de fruits d'aucune espèce l'année dernière, cependant il a régné pendant l'hiver & l'été beaucoup de dyssenteries.

# 588 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Il y a eu moins de fièvres intermittentes & beaucoup plus de malignes qu'en 1767, mais toujours dangereuses; il en est mort peu de ceux qui ont eu des secours & qui ont été traités méthodiquement par les purgatifs, l'usage de l'émétique huileux & des humectans.

## EAU DE PLUIE.

Comme nous avons indiqué à la fin de la Table de chaque mois, la quantité d'eau de pluie qui est tombée pendant le mois, nous ne répéterons point cette Table ici; nous allons seulement en donner un résultat par chaque trois mois de l'année.

		pouces.	lignes		
Trimestre de	JANVIER.....	2.	1	$\frac{20}{48}$	
	AVRIL.....	8.	10	$\frac{18}{48}$	
	JUILLET.....	8.	6	$\frac{11}{48}$	
	OCTOBRE.....	4.	9	$\frac{20}{48}$	
				24	3 $\frac{29}{48}$

Total de l'eau de pluie qui est tombée pendant l'année 1768, 24 pouces 3 lignes &  $\frac{29}{48}$  de lignes.

## NIVEAU DES EAUX.

Les eaux ont été fort basses cette année; on a encore été obligé de fouiller pendant le printemps & l'automne les puits qui l'avoient déjà été l'année dernière. Cependant cet hiver la rivière d'Essonne a débordé plusieurs fois par le trop plein des étangs de la forêt, mais les eaux se sont écoulées en peu de temps, parce que les sources qui entretiennent cette rivière ne fournissoient pas; l'année a pourtant été fort humide, puisque, suivant la Table ci-dessus, il est tombé plus de 24 pouces d'eau.

## B O U S S O L E.

La déclinaison de l'aiguille aimantée s'est trouvée à la fin de 19 degrés 30 minutes au nord-ouest.



## DESCRIPTION\*

*D'un grand Fourneau à raffiner le cuivre , construit au mois d'Août 1755 , dans la Fonderie des Mines de Cheiffey en Lyonnois , dans lequel se raffine tout le Cuivre provenant desdites Mines & de celles de Sainbel.*

Par M. J A R S.

**A**VANT la construction du fourneau dont le dessin accompagne le présent Mémoire , on raffinoit le cuivre des mines de Saint-Bel & de Cheiffey sur un petit foyer pareil à celui représenté par la *planche 51* du *Traité des Fonderies* de Schlutter ; mais ayant lu dans le même Traité , que dans certaines fonderies des mines d'Allemagne , on raffinoit le cuivre avec succès dans un grand fourneau , & avec moins de frais que sur le petit foyer , je pensai que pour diminuer la dépense de l'exploitation , il conviendrait de suivre la même méthode , je vis en même-temps que les cuivres que l'on traitoit dans ces fourneaux , provenoient du travail de la liquation , & qu'ils contenoient par conséquent du plomb qui aide beaucoup à la fonte & accélère la scorification des parties hétérogènes , comme fer , zinc , arsenic , &c. qui sont unies ordinairement au cuivre qui n'est pas raffiné , & que l'on ajoutoit jusqu'à deux quintaux de plomb sur chaque raffinage de quarante quintaux de cuivre qui n'a pas passé par le plomb ; ces considérations suspendirent quelque temps la résolution où j'étois de proposer aux Intéressés de ces mines , de faire construire un grand fourneau à raffiner , puisque le cuivre de Saint-Bel provient d'un minéral très-ferrugineux , & celui de Cheiffey d'un minéral uni à beaucoup de blinde , & dont le cuivre contient par conséquent du zinc ; dans l'un il faut scorifier le fer , & dans l'autre le zinc : on sait que ces matières exigent une chaleur très-vive

\* Ce Mémoire a été lu le 12 Juillet 1761 , c'est par oubli qu'il n'a pas été imprimé plus tôt.



pour se scorifier, de-là je conclus que si l'on vouloit se servir des fourneaux dont parle Schlutter, on seroit dans la nécessité d'ajouter du plomb; & quoiqu'il y eût encore de l'avantage à les préférer au petit foyer, je fus du sentiment que si l'on pouvoit augmenter le degré de chaleur à ces fourneaux, on pourroit se dispenser de cette addition; j'avois déjà formé plusieurs projets de fourneau, lorsque je fus envoyé à Sainte-Marie-aux-mines où je vis que l'on se servoit du fourneau représenté par la *planche 44* du *Traité des Fonderies* de Schlutter, mais seulement pour séparer le plomb des mattes, comme on le pratique dans le pays d'Hanovre, & ensuite le cuivre noir des mêmes mattes après qu'elles ont été refondues; & comme ce cuivre noir est encore mêlé au plomb pour en séparer l'argent par la liquation, je proposai au Directeur de suivre la méthode décrite par Schlutter pour raffiner le cuivre dans le même fourneau, il le fit exécuter, & je fus témoin de la réussite; il cessa alors de faire raffiner sur le petit foyer où l'opération étoit extrêmement longue & consumoit beaucoup de charbon, parce que le plomb uni au cuivre se revivifioit de nouveau par le contact immédiat du charbon qui lui communiquoit du phlogistique; l'arsenic ne se scorifioit aussi que difficilement, car on retiroit fort souvent du cuivre qui n'avoit pu parvenir au vrai point du raffinage; il n'en est pas de même du réverbère où l'opération se fait par la flamme. Cependant celui dont je parle, ainsi que tous ceux dont on se sert en Allemagne, perdent beaucoup de chaleur par les trois bouches à feu qui restent ouvertes pendant l'opération; c'est pourquoi ayant projeté de nouveau de perfectionner le grand fourneau de raffinage, je fus d'avis de fermer toutes les ouvertures pendant l'opération, & de substituer aux bouches à feu une grande cheminée fort élevée, celle du fourneau anglois me parut très-propre pour cela; de cette façon, j'augmentai le courant d'air dans le fourneau & donnai plus d'activité au feu: la façon de diriger le vent des soufflets me parut aussi très-importante, c'est pourquoi je disposai la chauffe ou réverbère de façon qu'elle porte la flamme devant la tuyère, d'où le vent des soufflets la reporte sur le cuivre; je fis en conséquence le dessin du fourneau que je projetois, je distribuai de mon mieux toutes les parties

relatives à l'aisance de l'opération , & tâchai de ne rien oublier de ce qui pouvoit contribuer à la perfection de ce fourneau ; en ayant informé la Compagnie , elle obtint du Ministre que je me rendrois à Cheissey pour l'y faire construire : c'est celui dont le dessin est joint au présent Mémoire , & dont je vais donner la description qui sera suivie du procédé pour y raffiner le cuivre , il y sera aussi parlé de quelques changemens que j'y ai faits depuis la construction.

Pour construire ce fourneau , on a tracé la forme telle qu'elle est représentée par les plans , avec 3 pouces tout autour de plus d'étendue ; on a creusé & enlevé tout ce terrain jusqu'au solide que l'on a rencontré à 4 pieds de profondeur , comme on peut le voir dans les deux coupes (*fig. 3 & 4*) : on a fait alors un massif de maçonnerie de 3 pieds 6 pouces de hauteur , sur lequel on a tracé les canaux pour l'humidité ; on a élevé ensuite le corps de la maçonnerie de 6 pouces , laissant le vide des canaux à cette hauteur qui est le niveau du terrain de la fonderie ; on a fait une recoupe de 3 pouces tout autour , son étendue a été pour lors pareille à celle marquée par les deux plans ; on a recouvert les canaux avec des pierres plates , sur lesquelles on a formé des petits soubiraux ou ventouses : c'est à cette hauteur qu'a été fait le plan inférieur , on a entouré ces ventouses de scories , on les en a aussi recouvertes de l'étendue du bassin ; sur ces scories , on a arrangé des briques droites ou verticales , ainsi que l'on peut le voir dans les deux coupes ; ce qui est à préférer à l'argile dont on se sert ordinairement pour les fourneaux , parce qu'elle est sujette à se fendre lorsqu'on la fait sécher , & ne donne pas autant de passage à l'humidité ; cependant on en met environ un pouce d'épaisseur sur les briques , afin d'empêcher le cuivre de pénétrer , au cas que le bassin formé de brasque , vienne à s'enlever pendant l'opération ; on bat par-dessus cette terre environ 1 pied d'épaisseur de brasque , comme il sera expliqué dans le procédé : avec cette brasque , on forme un bassin capable de contenir la quantité de cuivre que l'on y veut raffiner ; ce bassin avoit d'abord été fait de 9 pieds  $\frac{1}{2}$  de long sur 7 pieds  $\frac{1}{2}$  de large , ainsi qu'on peut le voir dans le plan inférieur (*figure 1*) , mais je ne tardai pas à en faire diminuer

Construction  
du fourneau.

Fondation du  
fourneau.

Briques  
droites à pré-  
férer à l'argile.

l'étendue tout autour, comme il paroît par le plan supérieur; elle est plus que suffisante pour y raffiner cinquante quintaux, & même soixante à la fois; cette recoupe est devenue très-utile au fourneau, puisqu'elle sert à y faire une chemise ou doublure que l'on peut réparer sans que la voûte en puisse être endommagée;

Briques blanches dont est fait l'intérieur du fourneau.

cette voûte, de même que la chemise, sont construites avec des briques faites d'une argile blanche que l'on tire du Dauphiné, & dont Messieurs de l'affinage se servent à Lyon pour faire leurs creusets\*, n'ayant point trouvé jusqu'à présent d'argile dans le pays qui puisse supporter le degré de chaleur du fourneau sans se vitrifier: l'intérieur du conduit de la petite cheminée qui communique à la grande, est fait pareillement avec des briques de la même terre, ainsi que la couverture dudit conduit, mais en briques beaucoup plus grandes, comme on peut le voir dans l'élévation; l'extérieur du conduit est fait en briques ordinaires.

Soupiraux ou ventoufes.

Dans l'épaisseur des murs du fourneau, on a ménagé tout autour deux rangs de petites ventoufes ou soupiraux pour l'évaporation de l'humidité, dont les unes prennent depuis les briques & les autres depuis la brasque en-dedans, & montent obliquement jusqu'en-dehors; elles sont absolument nécessaires, on ne sauroit en faire une trop grande quantité; on en sera convaincu, si l'on fait attention jusqu'à quel point l'eau peut être raréfiée par la chaleur: malgré cela, il n'arrive que trop souvent ( lorsque l'on a été quelque temps sans raffiner ) qu'il sort une flamme bleuâtre à travers les murs, quelquefois par les soupiraux, & qui est suivie d'un bruit considérable, ce qui ébranle beaucoup le fourneau & peut occasionner que la brasque qui forme le bassin ne s'élève & que le cuivre n'entre par-dessous. On doit aussi observer qu'il faut au moins que le mur de derrière le fourneau soit bâti avec un mortier de terre, au lieu d'y employer de la chaux & du sable qui, devenant trop compactes, empêchent la sortie de l'humidité & occasionnent par cette raison des ébranlemens.

Lorsque je fis construire le fourneau dont il est ici question; je n'avois pratiqué à la chauffe qu'un simple cendrier pareil à ceux des fourneaux que l'on a en Allemagne; je l'ai fait depuis

\* C'est la terre de Larnage.

beaucoup

beaucoup plus bas afin d'augmenter le courant d'air qui entre dans le fourneau pour procurer plus de chaleur. Je n'avois également fait placer qu'un soufflet double à la tuyère du fourneau ; je me suis déterminé à en ajouter un second ; ces changemens ont avancé l'opération au moins de deux heures , & ont diminué un peu la consommation du bois.

*Procédé pour le raffinage du cuivre dans un grand fourneau.*

J'observerai , avant toutes choses , qu'on ne sauroit trop faire sécher un pareil fourneau avant que de commencer à y raffiner : pour n'avoir attendu que quinze jours après son entière construction , dont huit avoient été employés à y entretenir un peu de feu , je fus sur le point de douter de sa réussite , comme on va le voir.

Ayant fait former le bassin avec de la brasque , ainsi qu'il sera dit plus bas , je fis arranger trente quintaux de cuivre noir dans le fourneau , on ferma les ouvertures , & l'on mit du bois dans la chauffe ; mais malgré un feu très-vif que l'on entretint pendant quinze heures consécutives , on ne put parvenir à faire fondre le cuivre , je l'attribuai en partie à l'humidité du fourneau , mais je crus aussi que la nature du cuivre demandoit qu'on y ajoutât du plomb ; c'est pourquoi je ne me rebutai point , & me déterminai à imbiber ce cuivre dans le bassin de réception du fourneau à manche , d'une quantité de cinq pour cent de plomb : ce cuivre ainsi imbibé , fut fondu & raffiné fort aisément dans le fourneau de réverbère , j'essayai pour une seconde opération de ne mettre que moitié cuivre imbibé & moitié cuivre sans plomb , ce qui ne faisoit plus que deux & demi pour cent de ce métal ; on fit deux raffinages de trente quintaux chacun en cette proportion : enfin , voyant que le fourneau devenu parfaitement sec , avoit une chaleur bien au-dessus des précédentes fois , je fis de nouveau un raffinage avec du cuivre sans plomb , il réussit ; j'augmentai aussi la quantité , de sorte qu'aujourd'hui chaque raffinage est fixé à cinquante quintaux ; il fallut en conséquence agrandir les bassins de réception qui n'avoient alors que quatre piéds de diamètre extérieurement. Quoique l'on ait également réussi à en mettre soixante-

Première  
opération qui  
n'a pas réussi,

Addition  
de plomb.

Combien on  
raffine de cui-  
vre à la fois.

à la fois, on n'a pas continué par l'embarras de retirer les rosettes qui sont pour lors trop pesantes, il a fallu du temps pour amener cette opération au point où elle aujourd'hui, sur-tout ayant été obligé de former des ouvriers qui n'étoient accoutumés qu'à travailler au petit foyer; c'est la façon dont se conduit à présent l'opération que je vais décrire.

Comment on place la tuyère.

Il est très-essentiel de bien placer la tuyère pour ce procédé; on a reconnu qu'en donnant 6 lignes d'inclinaison ou pente à son plan horizontal, qui dirige le vent des soufflets sur le cuivre, c'étoit la placer le plus avantageusement pour ce fourneau.

Composition de la brasque du grand bassin.

Le grand bassin servant à contenir le cuivre, est formé avec une brasque \* composée de deux parties & demie d'argile & de deux parties de charbon réduit en poudre, lesquelles ont été auparavant pilées & passées par un crible; sur quatre parties de cette composition, on en ajoute une de sable également passé par un crible: cette brasque étant mêlée & humectée de façon qu'elle puisse se peloter dans la main sans s'y rendre adhérente; le maître

Comment l'on met la brasque dans le fourneau, & comme on la bat.

raffineur entre dans le fourneau par l'ouverture *C* marquée dans l'élévation (*fig. 5*), un aide lui donne la brasque par cette ouverture, de même que par celle *B*; il en arrange suffisamment sur le sol du grand bassin pour former une couche, il sort ensuite du fourneau pour laisser la place aux deux aides qui la battent avec des palettes de bois, comme on se pratique à tous les fourneaux; cette couche battue, le maître raffineur fait avec un ciseau de fer, des raies en tous sens dans cette brasque, & jette un peu d'eau sur la surface, c'est afin que la couche supérieure puisse mieux se lier; il se fait ensuite apporter de nouvelle brasque qu'il arrange comme la précédente & que l'on bat de la même manière; il en use de même pour mettre la dernière couche, en observant à chacune de laisser le milieu du bassin plus profond que les bords, avec une pente vers les deux petits murs *H*, marqués dans le plan supérieur (*fig. 2*); on prend alors des pilons de fer d'environ 2 pouces de diamètre qu'on fait chauffer à leurs extrémités, afin

\* Par des expériences que mon frère vient de faire, de concert avec moi, nous sommes parvenus à trouver une composition bien préférable à la brasque; on en trouvera tous les détails dans le Supplément.

que la brasque ne s'y attache point & avec lesquels on bat fortement toute la surface du bassin, de façon que le doigt n'y fasse aucune impression : le maître raffineur prend ensuite le niveau depuis la tuyère, & avec un fer recourbé il creuse dans la brasque jusqu'à ce que le bassin ait 5 pouces  $\frac{1}{2}$  de profondeur dans le milieu ; il est pour lors d'une capacité suffisante pour contenir cinquante quintaux de cuivre, en y comprenant les deux canaux pour l'écoulement de ce métal, lesquels s'étendent jusqu'aux murs *H* du plan supérieur, avec une pente de 3 lignes environ depuis le fond du grand bassin ; on apporte ensuite des marteaux larges, arrondis & polis qu'on a fait chauffer auparavant, avec lesquels on bat encore toute la surface, afin de la rendre parfaitement unie. Il seroit beaucoup mieux de ne former le bassin qu'avec une seule couche de brasque qu'on pileroit tout-à-la-fois, mais on ne pourroit se procurer l'aïssance nécessaire pour cela, qu'aux dépens de la chaleur, puisqu'il faudroit élever la voûte du fourneau ; pour y suppléer, j'avois fait faire un chapeau de fer pareil à ceux qu'on met aux fourneaux de coupelle, mais la chaleur est trop considérable dans ce fourneau pour qu'on ait pu continuer à s'en servir : la première fois le chapeau se plia, il auroit fallu à chaque raffinage y faire des réparations, soit pour redresser le fer, soit pour le garnir de nouvelle argile. Le grand bassin étant formé, comme je viens de le dire, on met une brique devant chacun des petits murs *H* pour retenir le cuivre, on la lute avec de l'argile dont on remplit le restant de l'ouverture de chaque mur ; on prépare ensuite les bassins de percée avec une brasque composée de parties égales d'argile & de poussier de charbon ; après qu'elle y a été bien battue, on les creuse en cônes renversés, de façon qu'ils puissent contenir chacun environ vingt-cinq quintaux de cuivre ; ils ont 3 pieds  $\frac{1}{2}$  de diamètre intérieurement sur 1 pied 4 pouces de profondeur : lorsque le tout a été préparé, on met une pelote de terre devant la tuyère pour diriger le vent des soufflets dans le haut du fourneau, afin qu'il puisse mieux étendre la chaleur jusqu'à ce que le cuivre soit entièrement fondu : le maître raffineur se fait ensuite apporter de la paille dont il couvre toute la surface du grand bassin d'environ 3 ou 4 doigts d'épaisseur pour empêcher que le cuivre

Profondeur  
du bassin,

Chapeau de  
fer qui n'a pas  
réussi.

Brasque pour  
les bassins de  
réception.

Comment  
on arrange le  
cuivre dans le  
fourneau.

n'y fasse des trous & ne l'endommage, après quoi il y arrange cinquante quintaux de cuivre noir qu'on fait entrer par l'ouverture *C* marquée dans l'élévation : il met les pièces de cuivre les unes sur les autres, mais laissant suffisamment de vide entre chacune pour que la flamme puisse y pénétrer ; il laisse aussi un vide d'un pied  $\frac{1}{2}$  entre la tuyère & le métal, il a soin de mettre quelques pièces de cuivre sur le canal de la percée, qui est proche de la petite cheminée, à l'endroit *R* de la coupe sur la ligne *AB*. (*fig. 3*) afin de diminuer l'ouverture pour la sortie de la flamme, qui seroit trop grande sans cela ; lorsque le cuivre est fondu, le canal est plein de cuivre, ce qui rétrécit également le passage de la flamme. Les cinquante quintaux de cuivre noir ayant été arrangés dans le fourneau, on ferme toutes les ouvertures avec des grandes briques faites avec de l'argile ordinaire, de la paille hachée & de la bourre de veau ; on les lute bien tout autour, & l'on met du bois dans la chauffe, dont on entretient le feu de façon que le cuivre soit cinq à six heures avant d'être entièrement rouge : ceci s'observe seulement lorsqu'on a refait deux couches ou même les trois couches du bassin, c'est afin de le sécher & d'en faire évaporer l'humidité ; on n'est pas souvent dans ce cas-là, car on peut raffiner au moins deux cents milliers de cuivre sans toucher à celle du fond ; pour la seconde, elle ne dure guère passé dix à douze raffinages ; & quant à la supérieure, que nous nommerons actuellement la première, elle ne résiste qu'à deux ou trois opérations tout au plus ; mais que l'on refasse cette première ou non, on force le feu dès le commencement, le bassin ayant assez le temps de sécher & de s'échauffer jusqu'à ce que le cuivre soit fondu : dans ce cas-ci, il ne faut que deux heures au cuivre pour être parfaitement rouge, c'est alors qu'on fait agir les soufflets, le cuivre devient d'abord pâteux, il dégoutte ensuite peu-à-peu jusqu'à ce qu'il soit entièrement fondu ; on le reconnoît par un petit trou que l'on a pratiqué dans le milieu de la brique qui bouche l'ouverture par où l'on dégrasse ; depuis le moment qu'on a fait agir les soufflets jusqu'à la parfaite fusion du cuivre, il faut environ six heures, ce qui fait huit heures depuis que l'on a commencé à mettre du bois dans la chauffe : on a grande attention pendant la fonte, de n'ouvrir aucune

Temps qu'il  
faut pour rou-  
gir le cuivre.

Temps où il  
faut faire agir  
les soufflets.

Temps pour  
fondre le cui-  
vre.

ouverture du fourneau, ni de toucher le cuivre en aucune façon, parce qu'on le refroidiroit & retarderoit par conséquent l'opération; pendant tout ce temps-là, on a soin de prendre de la charbonnaille dans le cendrier pour la porter dans les bassins de réception, avec laquelle on les chauffe en la remuant de temps en temps & en'y mettant de la nouvelle après avoir retiré la première; on les chauffe de cette façon-là lorsqu'ils ont déjà servi, & que par conséquent ils ne renferment aucune humidité; mais lorsqu'on les refait à neuf, ( ce qui n'arrive qu'après trente ou quarante raffinages ) on les sèche & les chauffe bien un jour auparavant avec un gros feu de charbon; on ne sauroit assez prendre de précaution pour cela, afin d'éviter les accidens qui pourroient survenir: on entretient aussi un feu de charbon à l'endroit où se fait la percée. Un quart-d'heure après qu'on a jugé que le cuivre est en belle fusion, on le décrasse pour la première fois, on ouvre à cet effet l'ouverture marquée par la lettre *B* dans l'élévation ( *fig. 5* ) : on prend ensuite dans le cendrier, de la charbonnaille qu'on arrose d'un peu d'eau, & avec une pelle on la jette sur tout le bain de cuivre; elle refroidit assez les scories qui surnagent le bain, pour qu'elles s'y rendent adhérentes: on met ensuite devant l'ouverture, la barre de fer qui est marquée dans l'élévation, & que l'on y rend fixe en la faisant entrer de chaque côté dans le mur; elle sert à supporter le *racle* de fer avec lequel on retire les scories; cet instrument est fait d'un fer plat d'environ un pied de long sur cinq pouces de large, & demi-pouce d'épaisseur soudé à l'extrémité d'une grande barre de fer qui a un pouce en quarré; on retire avec ce *racle*, que l'on peut aussi nommer *écumoire*, les scories qui surnagent le bain; lorsqu'il est rouge au point de se plier, on le retire pour le redresser; pendant ce temps-là on jette de nouvelle charbonnaille qui refroidit un peu le restant des scories qu'un autre ouvrier retire avec un *racle* pareil au précédent: cela fait, on referme l'ouverture avec la même brique qu'on lute bien tout autour avec de l'argile; le raffineur passe ensuite derrière la tuyère & fait sauter la pelote d'argile dont il a été parlé précédemment; pour lors le vent des soufflets frappe sur le bain de cuivre, l'agite, & par le contact immédiat de l'air accélère, la scorification: depuis ce

Comment  
l'on chauffe les  
bassins de ré-  
ception.

Combien  
durent les  
bassins de  
réception.

Comment  
on retire les  
scories.



Comment on  
prend l'essai.

Marques que  
le cuivre donne  
avant d'être  
raffiné.

Quand est-ce  
que le cuivre  
est raffiné.

moment, le raffineur doit visiter souvent la tuyère pour en détacher, avec une baguette de bois, des morceaux de cuivre qui s'y attachent quelquefois: si le cuivre est trop adhérent, il lui substitue une baguette de fer; il prend ensuite des essais pour connoître à quel point se trouve le cuivre; il a pour cela un fer arrondi & poli aux deux extrémités, que l'on nomme *fer d'essais*, il le passe par la tuyère, le trempe dans le cuivre, d'où il le retire promptement pour l'éteindre dans un petit baquet d'eau; quoiqu'il soit difficile de donner des règles certaines pour connoître quand le cuivre a acquis le point de perfection, on peut cependant dire en général qu'il donne par gradation les marques suivantes. Si, peu de temps après que l'on a décrassé le cuivre pour la première fois, on en prend un essai, il est uni & d'une couleur pâle en-dehors mêlé de taches noires, la fracture est d'un rouge cendré, l'essai se détache en frappant la baguette sur un marteau, on l'essuie bien pour prendre un second essai, même on la frotte sur une pierre tendre, afin que le cuivre s'en détache plus aisément: le cuivre du second essai, que l'on prend environ un quart-d'heure après, devient raboteux sur la surface extérieure, les ouvriers le nomment la *rape*; on prend de ces essais de temps en temps, par lesquels on voit que le cuivre devient de plus en plus raboteux & acquiert une plus belle couleur; on y aperçoit intérieurement des taches couleur de laiton, & le cuivre de l'essai devient plus mince: à la *rape* succèdent des petites élévations, mais qui sont toutes percées, de sorte que l'essai est encore raboteux au toucher; lorsque les élévations deviennent plus considérables, quoique toujours percées, on décrasse le cuivre pour la seconde & dernière fois de la même façon qu'il a été décrit plus haut; le cuivre approche alors de la perfection, ce que l'on reconnoît à la belle couleur, aux élévations qui commencent à se fermer, & à ce que l'essai devient de plus en plus uni au toucher: enfin une partie des élévations se ferme, il se forme un ou deux petits crochets à l'extrémité de l'essai; on y aperçoit aussi quelquefois des taches d'un rouge approchant de la couleur de sang, lesquels endroits sont fort unis, quoiqu'un peu ondés; il faut environ une ou deux heures au plus pour que le cuivre parvienne à ce point-là depuis la première fois qu'on a

décrassé, c'est alors que l'on doit faire les percées : un moment auparavant on commence à dégager le passage en ôtant, avec un ringard, l'argile que l'on a mis derrière la brique dans le trou de la percée, c'est afin qu'aussi-tôt que le raffineur a reconnu le vrai point du raffinage du cuivre, on puisse le faire couler dans les bassins de réception ; on met à cet effet dans le trou de la percée, une barre de fer d'environ un pouce de diamètre, pointue à une de ses extrémités, dont l'autre est garnie d'un bouton de fer sur lequel on frappe, jusqu'à ce que l'on pense qu'elle a été assez avant pour faire sauter la brique ; on a ensuite un morceau de fer d'un pouce  $\frac{1}{2}$  en carré sur 1 pied 8 pouces de long, dont on peut voir le dessin sur la planche (*fig. 6*) : on le met sur le fer de la percée, de façon que ce dernier puisse entrer dans la fourche *B*, à l'endroit du bouton ; un ouvrier le tient perpendiculairement par l'extrémité *A*, pendant qu'un autre frappe avec une masse à l'endroit *C* ; de cette façon, on retire les fers de la percée & le cuivre coule dans chaque bassin de réception : mais, comme il arrive quelquefois qu'une des percées est ouverte plus promptement que l'autre, on a ménagé un canal horizontal pour faire communiquer les deux bassins ; on peut le voir dans le plan supérieur (*fig. 2, L*) ; par ce moyen le surplus du cuivre se rend dans l'autre bassin ; sans cela, on courroit risque de voir le cuivre se répandre dans la fonderie, & mettre les ouvriers en danger par l'humidité qu'il rencontreroit. Lorsqu'on fait les percées, on n'ôte point la charbonnaille qui a été mise dans les bassins de réception pour les échauffer, parce qu'elle surnage le cuivre & qu'on la retire à l'aide d'un morceau de bois emmanché au bout d'une baguette de fer, avec les scories qui ont suivi le cuivre ; on bouche ensuite les deux trous de percée avec de l'argile, pour qu'il ne coule pas davantage de scories ; lorsque toute la surface du cuivre a été bien nettoyée, il s'y élève une espèce de fumée qui n'est autre chose que de petites parties de cuivre sphériques divisées à l'infini, & que l'on nomme par cette raison *cendrée de cuivre* \*. Pour éviter qu'il ne s'en élève une trop grande quantité qui se répand autour du bassin & même jusque sur le

Comment se  
fait la percée.

Cendrée de  
cuivre.

\* Si le cuivre étoit un peu moins raffiné, il s'en élèveroit une plus grande quantité.

fourneau , on a plusieurs petits soufflets à bras avec lesquels on souffle sur la surface pour que le cuivre se refroidisse plus tôt : aussi-tôt qu'il est figé , on y répand un peu d'eau que l'on renouvelle jusqu'à ce que la rosette ait assez de consistance pour la transporter ; on fait venir à cet effet les fondeurs & autres ouvriers qui sont à portée , pour aider à transporter ces rosettes ; on en met cinq à chaque bassin pour lever & porter les pièces de cuivre dans deux cuves qui sont à côté , & où l'eau se renouvelle continuellement , afin qu'elle soit toujours froide , parce que le cuivre de cette façon en acquiert une plus belle couleur : on lève ces rosettes avec des fourches & des fers plats par le bout qui servent d'abord de levier , en prenant pour point d'appui les cercles de fer qui sont fixés autour des bassins , c'est afin qu'ils ne puissent être endommagés , ces cercles de fer sont marqués dans le plan supérieur ; à mesure que les rosettes diminuent de diamètre , & par conséquent de pesanteur , on renvoie les ouvriers à leur premier travail , on en met deux à chaque cuve qui restent jusqu'à la fin pour retirer les rosettes à mesure qu'elles sont froides ; ils les portent sur des planches , afin qu'elles puissent se sécher avant de les enfermer dans le magasin.

Le grand bassin peut servir pour deux & souvent trois raffinages , comme il a été dit plus haut , sans autre réparation que celle d'ôter les scories qui s'arrêtent devant la percée & de mettre une nouvelle brique devant chaque petit mur ; j'observerai à cette occasion , que lorsqu'on fait à neuf toutes les couches qui forment le bassin , on doit avoir l'attention de ne pas battre aussi fortement les couches inférieures que la supérieure , sans quoi la brasque de cette couche étant frappée & trouvant de la résistance par-dessous , ne s'y lie point ; c'est par cette raison qu'on ne se sert des pilons de fer que pour battre la couche supérieure , m'étant aperçu dans les commencemens que cette couche s'enlevoit fort souvent avant la fin de l'opération , quelquefois aussitôt qu'on avoit fait la percée , je l'attribuai d'abord à la négligence des ouvriers ; pour m'en convaincre , je voulus être témoin lorsqu'on battoit la brasque , mais la couche résista encore moins qu'auparavant ; je pris dès-lors le parti de ne faire frapper fortement que la couche supérieure , on le continue  
avec

avec avantage ; j'aurois cependant désiré que la couche supérieure eût pu résister à plus de deux ou trois raffinages \* : on prétend que le bassin du fourneau de Tayoba en Hongrie, résiste à dix ou douze, mais je pense devoir l'attribuer au plomb qu'on ajoute au cuivre, lequel en se scorifiant, s'unit à l'argile & au sable qui composent la brasque, après que le charbon en a été détruit, & forme un vernis sur toute la surface, je le crois d'autant plus que les bassins de réception du même fourneau ne durent pas à beaucoup près autant que ceux du fourneau de Cheiffey. Comme il pourroit arriver que, par la négligence de ceux qui battent la brasque, il s'enlevât non-seulement une couche, mais même deux du grand bassin ; on verra par le plan supérieur, que j'ai pratiqué un bassin (*fig. 2, M*), qui est ordinairement plein de poussier de charbon, mais que l'on peut vider au besoin pour y faire couler le surplus du cuivre qui se trouveroit trop bas dans le fourneau pour couler dans les deux bassins de réception.

Troisième  
bassin de  
réception.

L'opération que je viens de décrire, dure ordinairement dix à douze heures, comme on peut le voir par ce qui a été dit ci-dessus ; on a reconnu que chaque raffinage consomme l'un dans l'autre environ quatre cents fagots de 4 pieds  $\frac{1}{2}$  à 5 pieds de long sur 2 pieds de circonférence ; comme la flamme du fagot tourmente beaucoup plus le fourneau, que ne fait celle du bois de corde, on emploie fort souvent de ce dernier, l'opération n'en devient pas plus chère ; pour en brûler moins, on rétrécit la chauffe, comme on peut le voir dans le plan supérieur, par la ligne ponctuée (*fig. 2, B*) ; lorsqu'il est refendu, trois moules ou voies au plus faisant ensemble 184 pieds cubes de bois blanc, comme tremble & peuplier, suffisent ; lorsque le bois est très-sec, soit en fagot, soit en bois de corde, on en brûle encore moins que la quantité ci-dessus : un maître raffineur & deux aides conduisent le raffinage.

Combien de  
temps dure un  
raffinage.

Consomma-  
tion du bois.

Le charbon de terre peut s'employer utilement pour l'opération dont je viens de parler, l'épreuve en a été faite ; il est vrai qu'une demi-heure après que le cuivre fut fondu, voyant qu'il n'avançoit pas autant qu'avec le bois, je fis achever le raffinage avec

Le charbon  
de terre peut  
être employé  
au raffinage.

\* On verra dans le supplément, que, conjointement avec mon frère, nous sommes parvenus à remplir notre objet & à ne rien laisser désirer à cet égard.

des fagots bien secs, & je conseillerois d'en user toujours de même si on avoit une mine de charbon assez à portée pour que l'on put préférer son usage à celui du bois, parce que lorsque le cuivre approche de la perfection, il seroit à craindre que l'acide vitriolique du charbon ne scorifiât une partie du cuivre, au lieu qu'on ne court pas les mêmes risques tant que le cuivre noir contient du fer & du zinc avec lesquels l'acide vitriolique a plus d'affinité.

Déchet du  
cuivre au  
raffinage.

Un raffinage de cinquante quintaux de cuivre noir, rend ordinairement quarante-cinq à quarante-six quintaux de cuivre rosette, ce qui fait un déchet de huit à neuf pour cent; mais ce déchet n'est qu'apparent, puisque par des essais réitérés on a reconnu que son déchet réel n'étoit que de quatre & demi pour cent, parce qu'il reste toujours beaucoup de cuivre dans les crasses; on sait que dans quelque fourneau que ce soit, les scories provenant du raffinage sont toujours riches en cuivre: ce déchet a été constaté en 1760 par un essai de deux cents quintaux de cuivre noir en quatre raffinages, dont les crasses furent fondues séparément dans un fourneau à manche; il est aussi prouvé que le cuivre fait environ un pour cent moins de déchet dans ce fourneau que sur le petit foyer, je crois qu'on peut attribuer cette différence à ce que l'on perfectionne dans une seule opération, une quantité de cuivre qui en exige au moins vingt sur le petit foyer; on sait que l'on ne peut raffiner du cuivre sans qu'il n'y en ait toujours un peu qui se scorifie avec les matières qui lui sont étrangères; plus le volume est grand, plus la quantité qui se scorifie est moindre à proportion: d'ailleurs le petit foyer est un fourneau ouvert d'où l'on s'aperçoit que le soufflet enlève des petites parties de cuivre qui se répandent dans la fonderie, la violence du vent en enlève aussi par la cheminée; on en ramasse une partie en Allemagne, en pratiquant une petite chambre dans la cheminée des petits foyers à raffiner le cuivre: quant à la différence pour la consommation du bois, il est prouvé que la dépense du grand fourneau, est moindre des deux tiers de celle qu'exige en charbon le raffinage sur le petit foyer. On peut voir par la description que je viens de donner, que le fourneau à raffiner le cuivre, construit aux mines de Cheiffey en Lyonnais, a plus de chaleur que n'en ont ceux d'Allemagne; &

par cette raison , il est plus avantageux : celui de Grunenthal en Saxe consomme 438 pieds cubes , bois de corde , & environ 24 pieds cubes de charbon pour raffiner seulement quarante quintaux de cuivre noir : à Tayoba , en Hongrie , on consomme environ 220 pieds cubes , bois de corde , pour raffiner cinquante quintaux de cuivre noir , auxquels on ajoute trois à quatre quintaux de plomb qui se scorifient en pure perte ; on fait en outre que dix livres de plomb scorifient environ une livre de cuivre.

### EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Fig. 1.<sup>re</sup> représentant le plan inférieur.

*A* , fondation de maçonnerie.

*B* , canaux pour empêcher l'humidité des fondations , de monter dans le corps du fourneau ; on les a ponctués , parce qu'ils sont au-dessous du niveau du plan ; ils communiquent en dehors par l'ouverture ou espèce de soupirail , lettre *X*.

*C* , le cendrier.

*D* , le soupirail par où entre l'air dans la chauffe ou réverbère , il est dirigé suivant les lignes ponctuées : c'est par-là que l'on retire les cendres , on y descend par l'escalier *E*.

*F* , le mur de la fonderie.

*G* , les petites ventouses.

*H* , forme du bassin rempli de scories tout autour des ventouses & par-dessus.

Fig. 2.<sup>de</sup> représentant le plan supérieur.

*A* , ouverture de la cheminée qui monte perpendiculairement.

*B* , grille sur laquelle on met le bois ; cette chauffe se récrécit suivant la ligne ponctuée , par le moyen d'un petit mur de brique , lorsque l'opération se fait avec du bois de corde , au lieu de fagots.

*C* , tuyère pour la direction du vent.

*D* , deux soufflets de bois doubles , dont on n'a dessiné qu'une partie.

*E* , passage de la flamme.

*F* , ouverture par où la flamme sort pour enfiler la cheminée.

*G* , passage des scories , c'est l'ouverture par laquelle on dégrasse le cuivre.

G g g g ij

*H*, petits murs en briques, entre lesquels on a laissé les passages pour les percées, & devant lesquels on met une brique.

*I*, bassin où se raffine le cuivre.

*K*, les deux bassins de percée.

*L*, canal de niveau qui communique les deux bassins de réception & qui sert, en cas que le cuivre coule plus abondamment d'une percée que de l'autre; pour lors il sert à recevoir le surplus du cuivre qui, sans cela, déborderoit & se répandroit dans la fonderie.

*M*, est un troisième bassin qui est au niveau du terrain, mais qui est toujours rempli de charbonnaille; on ne s'en sert que dans un cas d'accident, c'est-à-dire lorsque la brasque qui forme le grand bassin dans l'intérieur du fourneau, vient à s'élever & que le cuivre se trouve trop bas pour pouvoir s'écouler dans les bassins supérieurs, pour lors on fait couler le restant dans ce bassin *M*.

Fig. 3.<sup>me</sup> représentant la coupe du fourneau prise sur la ligne A'B', des deux plans dans laquelle on a fait paroître la voûte du soubirail pour le passage de l'air dans la chauffe.

*A*, maçonnerie des fondations.

*B*, canaux pour l'humidité.

*C*, le cendrier.

*D*, soubirail voûté par où entre l'air dans la chauffe; il y a une porte que l'on ferme lorsque le vent est trop fort.

*E*, escalier pour aller dans le cendrier.

*F*, mur de la fonderie.

*G*, les petites ventouses inférieures.

*H*, lit de scories.

*I*, briques arrangées verticalement sur les scories.

*K*, petite couche d'argile.

*L*, lit de brasque qui se fait en trois couches, comme il a été dit ci-devant.

*M*, chauffe ou réverbère où l'on met le bois.

*N*, passage de la flamme.

*O*, intérieur du fourneau.

*P*, voûte du fourneau.

*Q*, tuyère.

*R*, sortie de la flamme; il y a une petite voûte à cet endroit,

indépendante de la grande voûte, étant sujette à réparation.

- S*, premier conduit de la cheminée.
- T*, deuxième conduit qui monte obliquement & aboutit dans la grande cheminée perpendiculaire.
- V*, grande cheminée perpendiculaire, les lignes ponctuées marquent l'ouverture pour la conduite de la flamme.
- X*, porte qui se ferme avec une seule brique faite avec de l'argile, de la paille hachée & de la bourre de veau; elle ne s'ouvre point pendant l'opération, les autres ouvertures sont bouchées de même.
- Y*, petit mur de brique où se fait la percée du cuivre devant lequel on met une brique pour retenir le cuivre.
- Z*, bassin de réception.

Fig. 4.<sup>me</sup> représentant la coupe du fourneau prise sur la ligne D'C' des deux plans.

- A*, maçonnerie des fondations.
- B*, canaux pour l'humidité, ils communiquent en-dehors par l'ouverture ou espèce de soubirail *X*.
- C*, les petites ventouses inférieures.
- D*, lit de scories.
- E*, briques placées verticalement.
- F*, petite couche d'argile.
- G*, lit de brasque.
- H*, petites ventouses supérieures pour la sortie de l'humidité.
- I*, sortie de la flamme.
- K*, intérieur du fourneau.
- L*, voûte du fourneau.
- M*, conduit oblique qui aboutit à la grande cheminée.
- N*, grande cheminée perpendiculaire, les lignes ponctuées désignent l'ouverture pour la conduite de la flamme; on a ménagé une ouverture à l'endroit marqué par la lettre *O*.
- P*, bassin de réception.

Fig. 5.<sup>me</sup> représentant l'élévation au-dessus du niveau du terrain.

- A*, ouverture de la chauffe par où on met le bois, & qui se ferme avec une porte de fer.
- B*, ouverture par où on dégrasse le cuivre, qui ne s'ouvre que pour retirer les scories & que l'on referme aussi-tôt après.



*C*, ouverture pour faciliter la manœuvre dans le fourneau & par laquelle on y entre le cuivre noir, mais que l'on n'ouvre point pendant toute l'opération.

*D*, ouverture entre deux petits murs de briques par où on fait la percée.

*E*, les deux bassins pour les percées.

*F*, petite cheminée qui reçoit la flamme & la fumée qui sortent du fourneau lorsque l'on décrasse, son conduit est ponctué.

*G*, mur de la fonderie contre lequel appuie ladite cheminée.

*H*, conduit oblique qui aboutit dans la grande cheminée.

*I*, grande cheminée perpendiculaire.

*K*, ouverture des petites ventouses. On verra par le dessin, que pour donner plus de solidité au fourneau, on l'a lié avec quelques liens de fer; ceux des bassins de réception sont sur-tout indispensables.

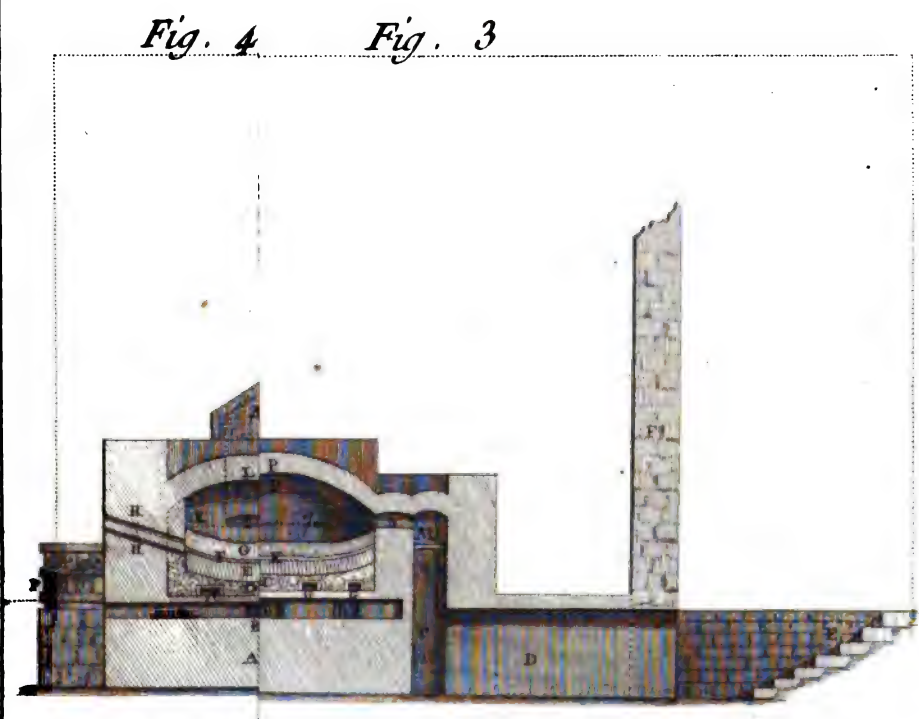
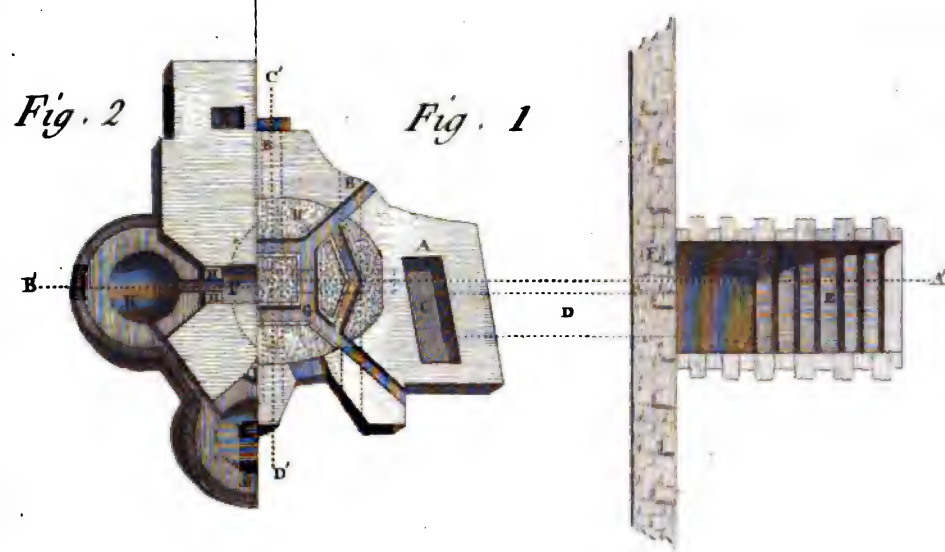
Fig. 6.<sup>me</sup> Morceau de fer pour retirer les fers de la percée & faire couler le cuivre.

*A*, extrémité de la fourche.

*B*, la fourche.

*C*, l'endroit où l'on frappe avec une masse pour retirer les fers de la percée & faire couler le cuivre dans les bassins de réception.







# F A U T E S À C O R R I G E R

*Dans l'Histoire de cette année 1769.*

*Pag. Lign.*

2...14, que comme, lisez comme  
5...16, que produisent, lisez qui produisent  
11...15, de cet instrument, lisez de ces  
liqueurs  
14...10, deux tiers, lisez un tiers  
33...22, défendu, lisez défendues  
44...*ante-pénult.* singulier, lisez intéressant  
66...15, proportion, lisez portion  
68...21, après le mot contient, supplétez  
par pinte

*Pag. Lign.*

95... 4, ne put le conclure qu'à, lisez ne  
put que le conclure à  
97...16, ne soit parvenu, lisez ne nous soit  
parvenu  
121... 3, que si les mortiers, lisez que les  
mortiers  
122...14, que dans les grandes vîtesses, lisez  
que dans les grandes rivières  
124...11, le sieur Ronbo, lisez le sieur Roubon

## *Dans les Mémoires.*

*Page 98, ligne 4, à compter d'en bas, au lieu de  $\xi \theta d\zeta^2$ , lisez  $\zeta \theta d\zeta^2$ .*

*Page 99, ligne 3, au lieu de  $\theta d (\frac{\theta''}{\theta})$ , lisez  $\theta d (\frac{\theta''}{\theta})$ .*

*Page 137, ligne 6, à compter d'en bas, & lignes suivantes, au lieu de  $\xi$ , mettez par-tout  $\frac{\xi}{\theta}$ , & au lieu de  $d\zeta$ , mettez  $d\zeta^2$ .*

*Page 141, lignes 6 & 8, à compter d'en bas, au lieu de  $\frac{\sigma - d\xi}{\xi d\pi}$ , mettez  $\sigma - \frac{d\xi}{\xi d\pi}$ .*

*Page 229, ligne 10, de  $3^d \frac{1}{2}$ , lisez de  $3^{nd} \frac{1}{2}$*

*Page 306, ligne dernière,  $F = - 9908$ , lisez  $F = + 9908$ .*

*Page 308, ligne 17,  $\frac{\sigma' \tau}{\theta}$ , lisez  $\frac{\sigma \tau'}{\theta}$ .*

*Page 318, ligne 9,  $\sqrt{(p^2 q^2 + q^2 r^2)}$ , lisez  $\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}$ .*

*Page 319, ligne 22,  $\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}$ , lisez  $\sqrt{(p^2 q^2 + p^2 r^2)}$ .*

*Page 354, ligne 11,  $2 \times \frac{\zeta \varphi}{nqr}$ , lisez  $2 \times \frac{3600'' \zeta \varphi}{nqr}$ .*

*Page 357, ligne 8, (2.<sup>e</sup> colonne),  $(\frac{\varphi r}{q} + \frac{Hws}{qf})$ , lisez  $(\frac{\varphi r}{q} - \frac{Hws}{qf})$ .*

*Page 402, ligne dernière,  $= - \frac{3600'' \zeta}{nr}$ , lisez  $b = - \frac{3600'' \zeta}{nr}$ .*

*Page 440, ligne 20,  $\frac{22}{118}$ , lisez  $\frac{22}{128}$ .*

*Page 529, ligne 4, Dollona, lisez Dollond*



